TEORIA DO ELETROMAGNETISMO

Volume I

Editora
UEPG

Sumário

Prefácio

Após a publicação de meu primeiro livro, *Equações Diferenciais Aplicadas à Física*, várias pessoas têm comentado comigo que na área de Física existem poucos livros para o terceiro grau produzidos por autores brasileiros. Essa avaliação é correta, e observa-se que a maioria dos livros se destina às disciplinas de Física Básica, tanto para o próprio curso de Física quanto para os cursos de Química, Matemática, Biologia e para as Engenharias, que também têm disciplinas de Física Básica em seu currículo. O número de livros orientados para as disciplinas mais aprofundadas da graduação em Física e mesmo para as da pós-graduação em Física é praticamente nulo, com honrosas exceções. Para as disciplinas mais específicas, os livros disponíveis estão escritos, normalmente, em língua inglesa, ou são traduções — nem sempre perfeitas — dos originais em inglês. Esse diagnóstico suscita, de imediato, duas questões. Primeiro, será que o que é bom para o aluno americano ou europeu é igualmente bom para o aluno brasileiro, que vive numa realidade geralmente bastante diferente? Eu penso que não, e creio que os livros precisam refletir as necessidades dos alunos de nossos cursos de graduação e pós-graduação. Além disso, os livros importados são geralmente bem mais caros do que os produzidos no país. Segundo, será que nós não temos a capacidade de produzir livros tão bons quanto aqueles de autores estrangeiros? E se nós a temos, como eu acredito que temos, por que não os produzimos?

Essas questões despertaram em mim o desejo de escrever um novo livro, desta vez orientado para um assunto específico de Física, o *Eletromagnetismo*, para ser usado tanto na graduação como na pós-graduação.

Nos níveis mais aprofundados, a teoria do Eletromagnetismo envolve uma fundamentação matemática que, em geral, não é suficientemente explicada, o que, via de regra, acaba prejudicando o aprendizado. Assim, decidi apresentar o Eletromagnetismo em detalhes, tanto do ponto de vista físico como da perspectiva matemática, fazendo as demonstrações matemáticas e

discutindo as considerações físicas necessárias para a resolução de problemas, com rigor e clareza. Somado a isso, apresento um grande número de exemplos resolvidos, visando a esclarecer, fixar e complementar a teoria. Esses exemplos não devem ser encarados como meros exercícios, porque é justamente neles que boa parte da teoria é discutida, como meio de estimular o aluno a verificar o desenvolvimento da resolução de um problema, criar o hábito de fazer considerações físicas acerca dele, testar e ampliar sua intuição física e suas habilidades matemáticas, descobrir se as hipóteses por ele formuladas são verdadeiras ou falsas, e finalmente, investigar os motivos que levaram a um ou outro resultado.

O livro foi formulado para atender às seguintes disciplinas: o curso básico de Eletromagnetismo ministrado em Física Geral, cuja duração é de, normalmente, um semestre, no segundo ano da graduação em Física e Engenharias, em que os conceitos físicos fundamentais referentes à matéria são apresentados e discutidos; o curso de Teoria Eletromagnética, com duração de um ano, em geral no terceiro ou quarto ano de curso de graduação, em que o formalismo matemático é refinado e ampliado; e, por fim, o curso de Eletromagnetismo da pós-graduação, com duração entre um e dois semestres, em que são apresentados novos fenômenos físicos envolvendo uma teoria matemática bem mais complexa do que a vista na graduação. Portanto, ele atende aos três níveis de estudo do Eletromagnetismo para alunos de Física, o que é interessante, porque alunos que estão iniciando os estudos de Eletromagnetismo podem ter a curiosidade de saber como problemas mais complicados são resolvidos, assim como alunos dos níveis mais altos podem sentir a necessidade de recordar conceitos físicos estudados anteriormente.

Não foi possível concentrar o texto em um único volume, porque o assunto é bastante amplo. Este volume se dedica apenas à Eletrostática, cuja compreensão é decisiva para o estudo das outras divisões e fenômenos relacionados ao Eletromagnetismo. Sem uma fundamentação sólida em Eletrostática, a investigação dos efeitos magnéticos fica prejudicada, o que certamente acarretará problemas quando reunirmos os fenômenos elétricos e magnéticos e apresentarmos os fenômenos eletromagnéticos propriamente ditos. Por causa disso, procurei dar uma atenção especial à Eletrostática, explicando detalhadamente vários tópicos importantes que são, em geral, vistos mais rapidamente do que deveriam. Por outro lado, procurei ilustrar fartamente todos os assuntos, já que uma imagem esclarece tanto ou mais do que várias linhas de texto explicativo. Cada capítulo culmina com uma série de exercícios. Procurei fazê-los interessantes e abrangentes, e em pequeno número, para não

cansar. Creio que isso possa estimular o hábito saudável da consulta de mais de um livro. A utilização de diferentes livros é muito importante porque nenhum é perfeito, e o aluno deve aprender a aproveitar o que cada um tem de melhor a oferecer.

Para poder reunir temas complexos como funções de Green com fenômenos básicos de Eletromagnetismo como os processos de eletrização, tive que dividir o texto em capítulos, seções, etc., relativamente independentes uns dos outros. É claro que essa divisão não pode ser perfeita, mas creio ter conseguido um bom resultado. Além disso, em última análise, cabe ao professor de cada disciplina escolher os assuntos que irá abordar com os seus alunos, de acordo com as peculiariedades de cada currículo em particular.

Os dois primeiros capítulos são uma introdução importante para a maioria dos desenvolvimentos feitos ao longo do texto. O capítulo 1 discute os conceitos de vetor, sistemas de coordenadas, grandezas escalares e vetoriais, e alguns teoremas de cálculo vetorial. Acredito que esse capítulo, como um todo, é importante para as disciplinas relacionadas ao Eletromagnetismo, nos três níveis de aprofundamento, e mesmo para outras disciplinas de Física, como Mecânica Clássica e Mecânica Quântica, por exemplo. Em particular, os sistemas de coordenadas retangulares, polares, cilíndricas e esféricas, abordados nas seções 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4, respectivamente, são extremamente úteis no estudo de vários assuntos. O capítulo 2 trata das séries de Taylor, na seção 2.1, das séries de Fourier, na seção 2.2, e da série geométrica, na seção 2.3. Esse capítulo pode ser estudado por inteiro, por alunos de qualquer nível, e ele também é útil para alunos de outras disciplinas de Física.

O capítulo 3 apresenta os conceitos de carga elétrica e processos de eletrização, nas seções 3.1 e 3.2. Ele é voltado principalmente aos alunos de Física Básica. A seção 3.3 trata da força elétrica. Sugiro que todos a leiam, em algum momento, porque nela são discutidos alguns aspectos físicos importantes que são muitas vezes deixados de lado. Por fim, a seção 3.4 ensina como construir um pêndulo eletrostático e um eletroscópio. Isso pode ser útil para aqueles que cursam Licenciatura em Física, porque permite a realização de algumas experiências qualitativas em sala de aula, e também para os que, como eu, gostam de reunir a teoria e alguns procedimentos experimentais.

No capítulo 4, passamos à investigação do campo elétrico, apresentando os conceitos fundamentais necessários. Esse capítulo é indicado para estudantes de Física Básica, com exceção, talvez, das seções 4.3 e 4.7, que envolvem conceitos matemáticos mais aprofundados. Para os alunos de Física Básica, a

unidade mais importante do capítulo 4 é a seção 4.2, que discute fisicamente a dedução da lei de Gauss. Também sugiro que façam as experiências qualitativas apresentadas na seção 4.8, o que certamente facilitará o estendimento do fenômeno da blindagem elétrica. E para os outros estudantes, não existem restrições com relação aos temas abordados nesse capítulo.

Os conceitos fundamentais referentes ao potencial elétrico são vistos no capítulo 5, que é mais voltado para alunos de Física Básica e Teoria Eletromagnética do que para estudantes de pós-graduação.

O capítulo 6 trata da equação de Laplace, assunto que não é usual para alunos de Física Básica. De fato, essa unidade pode ser eliminada por completo para esses alunos, sem perda de continuidade, com exceção das experiências apresentadas na seção 6.7, que são interessantes para eles. O capítulo é voltado a alunos de Teoria Eletromagnética e também a alunos de Eletromagnetismo de pós-graduação. Para estudantes de Teoria Eletromagnética, sugiro excluir as seções 6.5.2 e 6.6.2, por causa da matemática envolvida. Já os alunos de pós-graduação devem estudar o capítulo 6 por inteiro.

O método das imagens é visto no capítulo 7. O assunto não é usual para alunos de Física Básica, mas ele deve ser estudado por quem cursa Teoria Eletromagnética e Eletromagnetismo, sem restrições. Da mesma forma, o capítulo 8, que trata da expansão do potencial elétrico em multipolos (seção 8.1) e da energia potencial em multipolos (seção 8.2), é indicado apenas para os alunos de Teoria Eletromagnética e de Eletromagnetismo referidos acima. Alunos de Física Básica geralmente não vêem estes assuntos.

As funções de Green para o potencial elétrico na Eletrostática são abordadas no capítulo 9. Por causa de sua complexidade matemática, este assunto é recomendado somente para alunos de pós-graduação que estão cursando a disciplina Eletromagnetismo. Ele não é indicado para alunos de Teoria Eletromagnética e é fortemente contra-indicado para quem está cursando Física Básica.

O capítulo 10 trata do campo elétrico dentro de um material dielétrico. Algumas partes podem e devem ser estudadas pelos alunos de Física Básica, em particular a seção 10.1, que discute qualitativamente os fenômenos físicos que ocorrem dentro de um dielétrico quando um campo elétrico externo é aplicado a ele. As discussões quantitativas devem ser deixadas para alunos de Teoria Eletromagnética e Eletromagnetismo.

Finalmente, o capítulo 11 estuda os capacitores. Ele é dirigido a alunos

de Física Básica, embora alguns tópicos, como a seção 11.3, sejam apropriados para estudos mais avançados. A seção 11.4 apresenta a garrafa de Leyden, primeiro capacitor, bem como a experiência da gota de óleo de Millikan, primeira a medir a carga do elétron. Esta seção, por razões históricas, é leitura obrigatória para alunos de Física Básica.

Existem ainda quatro apêndices neste volume. O apêndice A apresenta algumas constantes físicas relevantes para o dia-a-dia. O apêndice B detalha a dedução do operador ∇, do gradiente, do divergente, do rotacional, do operador ∇^2 e do Laplaciano em coordenadas retangulares, cilíndricas e esféricas. Por fim, os apêndices C e D, que complementam o capítulo 6, apresentam a resolução das equações diferenciais de Legendre e de Bessel e mostram os polinômios de Legendre, os polinômios generalizados de Legendre, os harmônicos esféricos, a série de Legendre, a série dos harmônicos esféricos e a série de Fourier-Bessel.

Espero que o livro sirva de auxílio para a compreensão dos tópicos relacionados ao Eletromagnetismo, tanto no que diz respeito aos fenômenos físicos quanto com relação às demonstrações matemáticas. Gostaria de agradecer à Editora UEPG, que novamente fez um excelente trabalho, e peço que possíveis sugestões, críticas e comentários sobre este livro sejam a ela enviados.

Kleber Daum Machado

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Parte I

INTRODUÇÃO

Capítulo 1

Sistemas de Coordenadas, Vetores, Grandezas Escalares e Grandezas Vetoriais

Considere as seguintes situações:

a) Alguém pergunta para você qual é o comprimento do muro da frente de sua casa e você lhe responde que ele mede 15 m.

b) Alguém pergunta para você onde fica a padaria e você lhe responde que, para chegar à padaria, é preciso andar 10 m, até a esquina, e depois dobrar à esquerda e andar mais 5 m.

As situações acima envolvem grandezas físicas semelhantes, pois ambas são medidas em metros, tendo portanto a mesma representação dimensional. No entanto, há algo que as diferencia. Com relação à pessoa que procura a padaria, se você lhe disser apenas que ela deve andar 15 m, ela não terá como chegar lá, porque a informação está incompleta. Por outro lado, a informação sobre o comprimento do muro está completa e é suficiente para ser entendida. Então, para algumas grandezas, informar apenas o valor numérico e a unidade não basta para especificar completamente a situação física. É preciso indicar uma orientação em relação a algo, ou a uma *origem*. No caso da padaria, você se orienta com relação ao lugar em que você se encontra, que faz o papel de origem. Por causa da necessidade de definir orientações em relação a origens, surgiram os sistemas de coordenadas.

1.1 Sistemas de Coordenadas Retangulares

Como uma forma inicial de orientação, podemos supor uma reta, com algum ponto marcado para ser a origem, como na figura 1.1 abaixo.

-2 -1 0 1 2 x

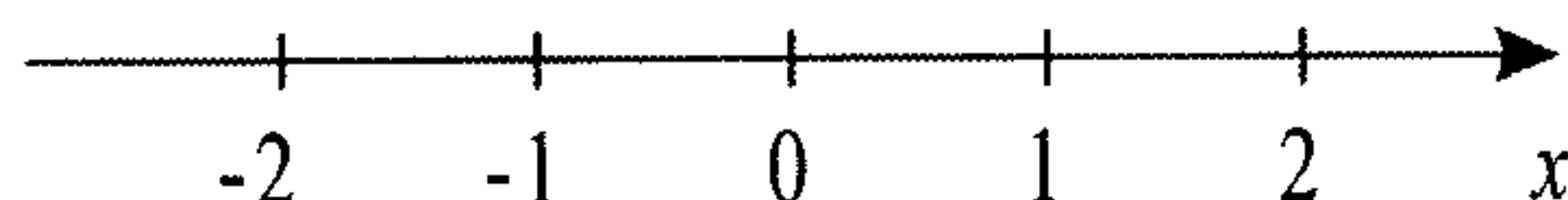



Figura 1.1: Uma reta orientada com uma origem, para um sistema de orientação unidimensional.

A reta acima define uma direção x, orientada de forma que os valores de x crescem para a direita. Vamos supor que a reta representa a rua em que você mora, sendo seus números os números das casas nessa rua. Assim, considerando que a sua casa está na origem em $x = 0$, se alguém lhe perguntar onde fica a casa de João, você responderá que fica em $x = 2$. Outros dados poderiam ser, por exemplo, que Maria mora em $x = -3$ e que as esquinas ficam em $x = -10$ e $x = 10$. Trata-se, basicamente, de um problema em uma dimensão, e esse tipo de esquematização, na verdade, só será efetivo e suficiente se nos limitarmos à rua em questão.

Assim, para ir à padaria, a nossa reta é insuficiente. Um recurso para resolver este problema é colocar uma outra reta, perpendicular à primeira, como na figura 1.2.

y 2 1 0 -2 -1 1 2 x -1 -2

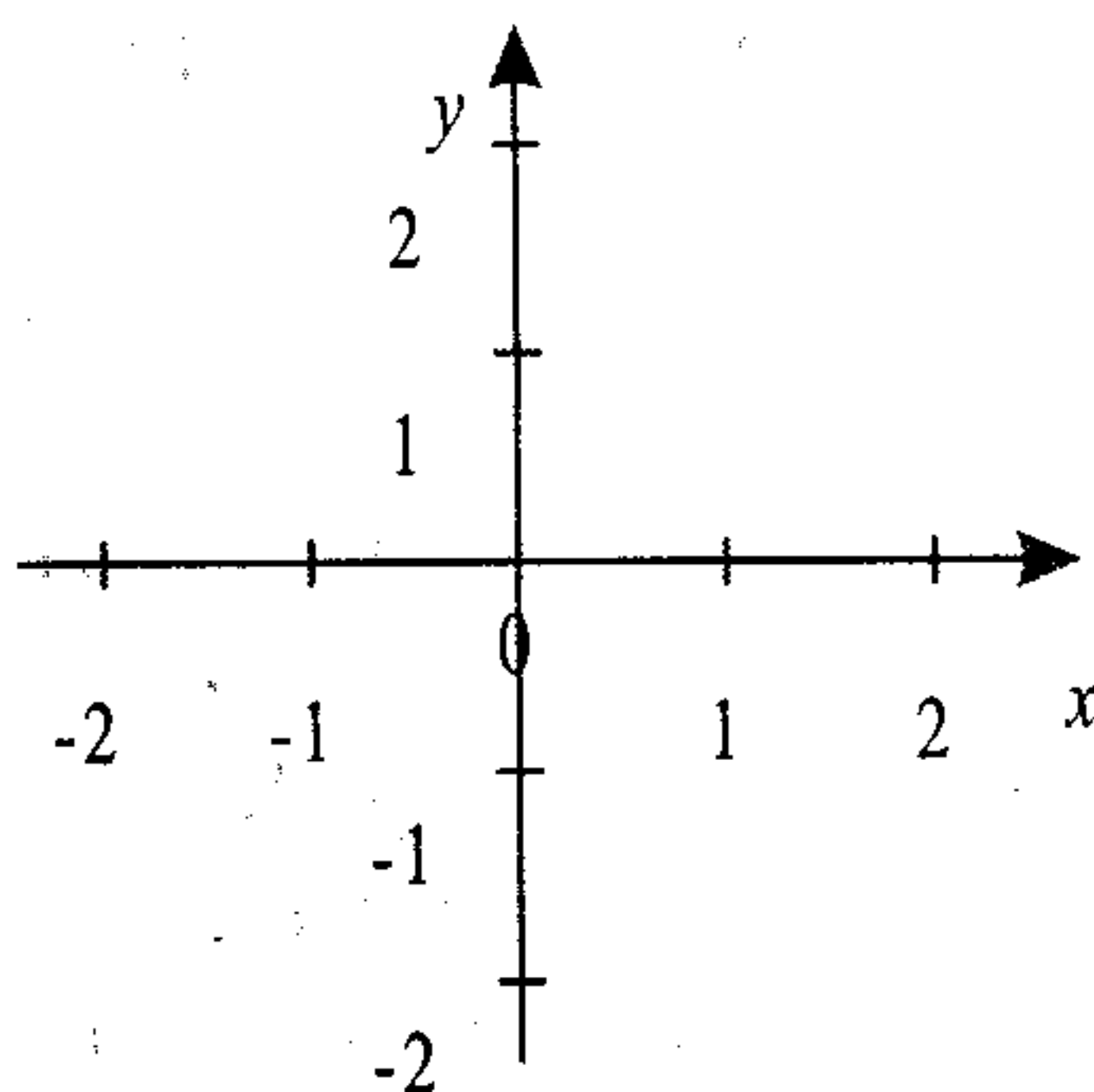



Figura 1.2: Duas retas orientadas com uma origem, para um sistema de orientação em um plano.

Agora temos duas direções possíveis, x e y. Para ir à padaria, dizemos

para a pessoa: vá até $x = 10$, e depois, até $y = 5$. No nosso sistema de eixos formado pelas duas retas orientadas, a padaria seria representada por um ponto, na forma P(10,5). A reta x é chamada eixo das *abcissas*, enquanto a reta y é o eixo das *ordenadas.* Os valores de x e y para um certo ponto P são as coordenadas de P. Para a padaria, suas coordenadas são $x = 10$ e $y = 5$. Temos agora um problema em duas dimensões.

O sistema de eixos apresentado na figura 1.2 chama-se *sistema de coordenadas cartesianas ortogonais*, porque, tendo sido proposto primeiramente pelo filósofo René Decartes, é um sistema de coordenadas baseado em retas ortogonais. Ele não se restringe a duas dimensões. Se for necessário incluir uma altura, como, por exemplo, na planta de um prédio, acrescentamos mais um eixo, denominado cota, em geral representado por z, que deve ser ortogonal aos dois anteriores, como mostra a figura 1.3. Temos então um problema tridimensional.

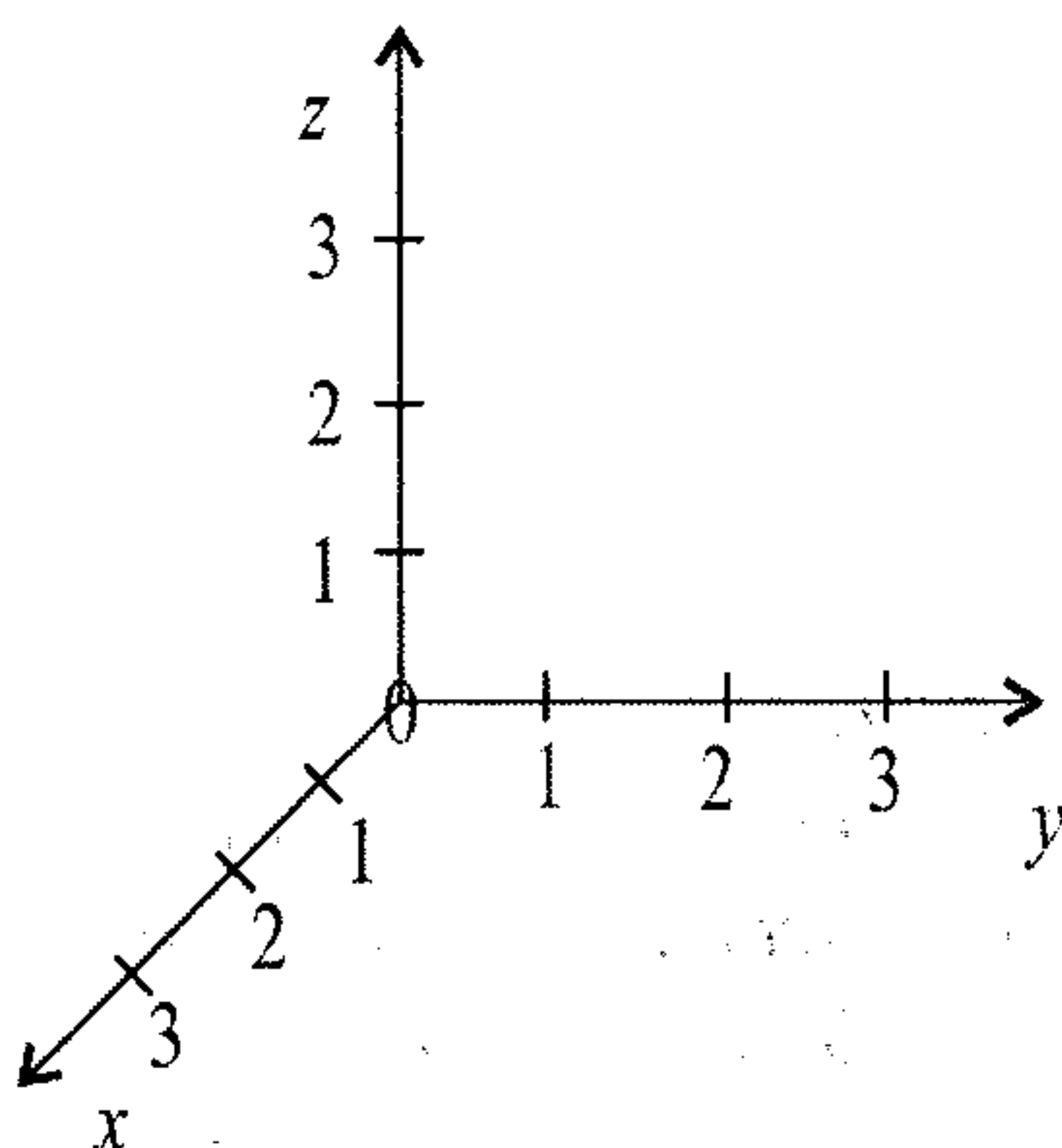



Figura 1.3: Sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço tridimensional.

O sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, também conhecido como *sistema de coordenadas retangulares*, é um dos mais importantes sistemas de coordenadas utilizados em Física. Inicialmente, vamos concentrar nossa atenção nele. Outros sistemas serão tratados ao longo do texto.

Junto com o conceito de sistemas de coordenadas surgiu também o de uma entidade geométrica chamada *vetor.*

1.1.1 Vetores

Voltando ao nosso problema anterior, podemos representar o caminho que a pessoa fez até a padaria na seguinte forma:

y
10
5
P
$\vec{A}$
$\vec{B}$
0
5 10 15 x

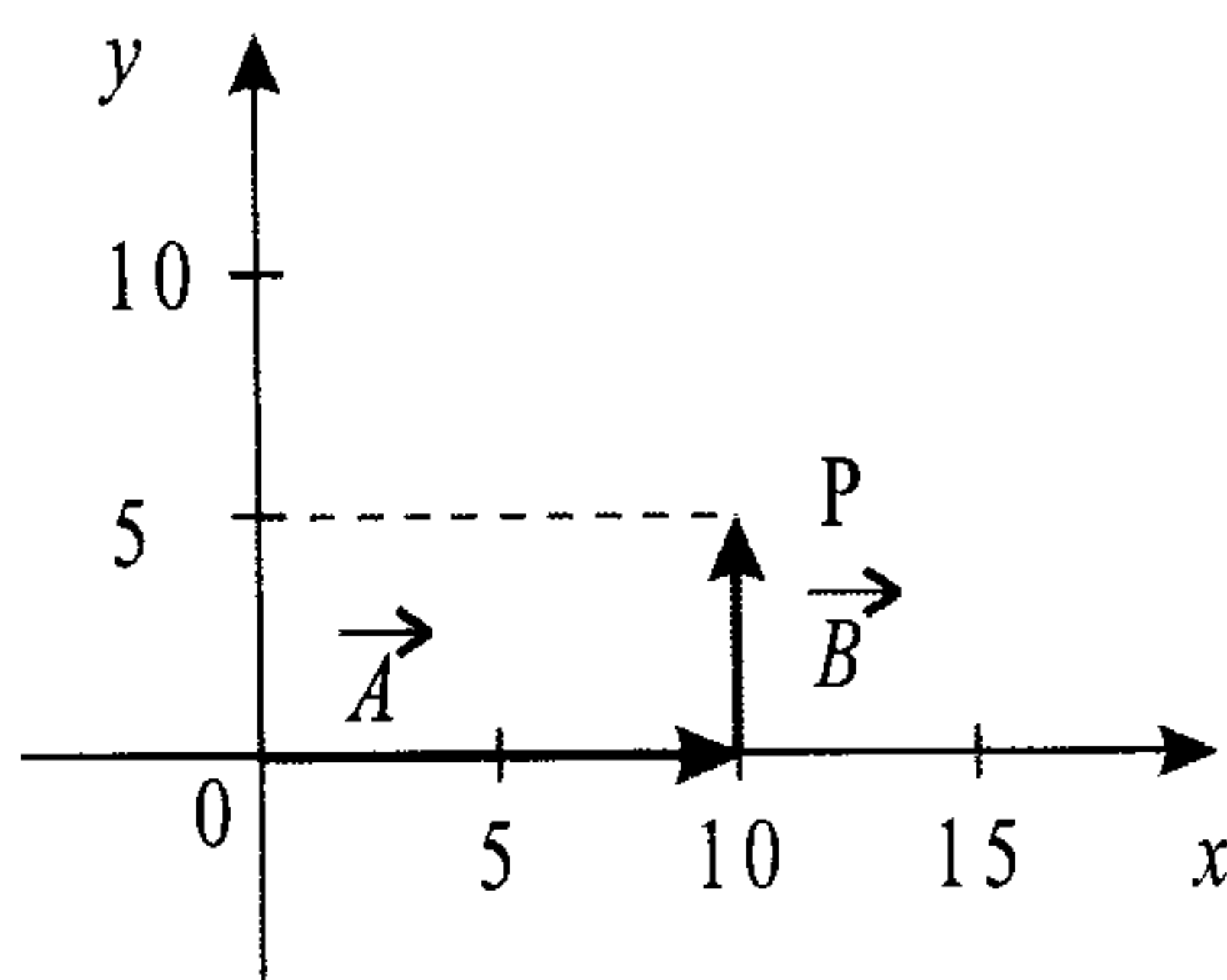



Figura 1.4: Representação do caminho percorrido pela pessoa até a padaria.

Os segmentos de reta orientados que aparecem na figura 1.4, chamados *vetores*, são construções matemáticas muito importantes. A definição de vetor é a seguinte:

Definição 1.1. Vetor *é um segmento de reta, orientado por uma flecha, que possui um tamanho e uma orientação espacial. Representamos um vetor por uma letra com uma flecha em cima, como em $\vec{a}$, ou $\vec{B}$, por exemplo. Em certos casos, também podemos usar letras em negrito, como* ***a*** *ou* ***B****. Os vetores têm algumas propriedades bastante interessantes. O tamanho ou* **módulo** *do segmento está relacionado ao valor numérico da grandeza que ele representa. Na figura 1.4, o vetor horizontal, que vamos chamar de $\vec{A}$, tem o dobro do tamanho do vetor vertical, $\vec{B}$, para representar que a pessoa anda duas vezes mais na horizontal do que na vertical. A orientação deles é tal que a pessoa vai da origem até $x = 10$, e depois, de $x = 10$ até o ponto P, em $y = 5$. Esta orientação é dada pela* **direção** *e pelo* **sentido** *dos vetores. A direção é especificada pela reta-suporte que define o segmento de reta que representa o vetor. Isto permite dois sentidos possíveis para o vetor. Obtemos o sentido desejado através da colocação da flecha na ponta do vetor, que indica o sentido correto para a grandeza em questão. Assim, para o vetor $\vec{A}$, a direção é horizontal e o sentido é para a direita. Já para o vetor $\vec{B}$, a direção é vertical e o sentido é para cima. Além disso, considerando um dado vetor $\vec{V}$, que tem um certo tamanho, uma certa direção e um certo sentido, todos os segmentos de reta paralelos a $\vec{V}$, de mesmo tamanho e orientados no*

mesmo sentido que $\vec{V}$, são completamente equivalentes ao vetor $\vec{V}$. Em outras palavras, os vetores podem ser transportados pelo espaço para a posição que for mais interessante, desde que suas características (módulo, direção e sentido) se mantenham intactas.

Outra propriedade dos vetores é que sua ordem numa soma pode ser invertida sem problemas, porque o resultado final é o mesmo. Por exemplo, o caminho até a padaria também pode ser representado pela figura 1.5 [1].

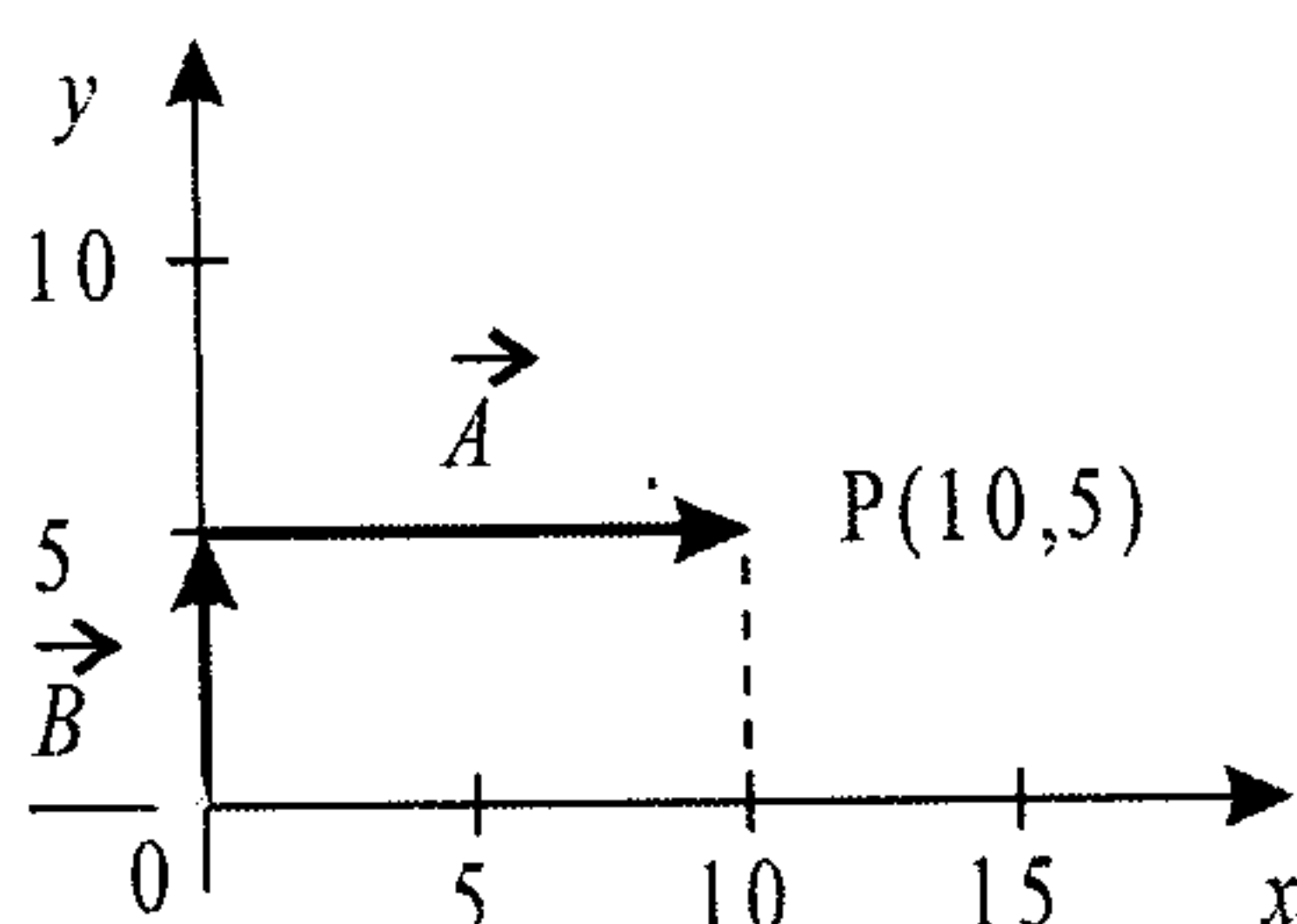



Figura 1.5: Outra representação do caminho percorrido pela pessoa até a padaria.

Assim, a soma de vetores é uma operação comutativa (como também é a soma de números), ou seja, $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$.

Como é que representamos a soma de vetores? É simples: por um outro vetor. Obtemos o vetor resultante de uma soma de vetores colocando o início do segundo vetor no final do primeiro e traçando um segmento de reta do início do primeiro até a extremidade do segundo. Então, no nosso caso, o vetor resultante $\vec{C}$ é dado por $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$, como mostra a figura 1.6.

A soma de vetores apresentada na figura 1.6, chamada de *método do polígono*, é um *método geométrico*. Para saber o valor numérico do tamanho do vetor, precisamos usar um *método analítico*, ou então, desenhar os vetores sobre um papel milimetrado e usar um método geométrico. O tamanho de um vetor, chamado *módulo* do vetor, é representado por $|\vec{A}|$, por $|\mathbf{A}|$ ou por A, sem a flecha. Note que o módulo de um vetor é sempre positivo, por definição. Para o caso da figura 1.6, os vetores formam um triângulo retângulo, sendo que os catetos (b e c) são os vetores que estão sendo somados, e a hipotenusa a, o vetor resultante. Assim, do Teorema de Pitágoras, temos que

[1] Abstraindo a presença de possíveis casas, obviamente.

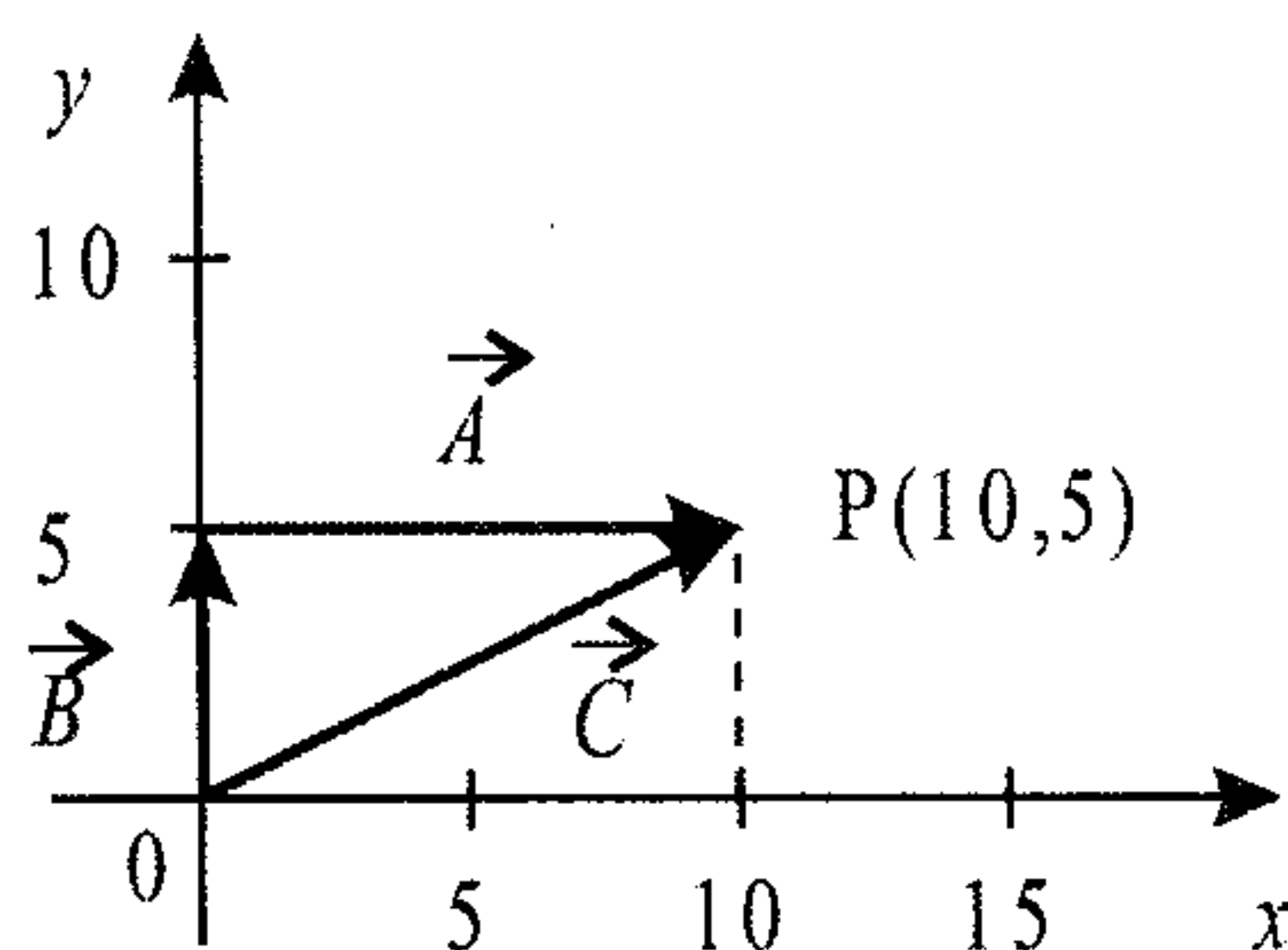



Figura 1.6: Representação da soma dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 \\
|\vec{C}|^2 &= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 \\
|\vec{C}| &= \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2} \\
&= \sqrt{10^2 + 5^2} \\
|\vec{C}| &= \sqrt{125} = 5\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

Além do método geométrico do polígono definido acima, existe o *método do paralelogramo*, que também é baseado em Geometria. Nesse método, para encontrar a soma de dois vetores, é necessário, primeiramente, que as origens de ambos coincidam. Podemos fazer isso mediante o "transporte" dos vetores, mantendo intactos, todavia, a direção, o sentido e o módulo (tamanho) deles. Depois, construímos um paralelogramo, cujos lados são os vetores, como na figura 1.7. A diagonal desse paralelogramo, formada pelo segmento de reta que une o ponto em que os inícios dos vetores se encontram com o ponto em que as extremidades se encontram é o vetor resultante, cujo início está na origem dos vetores que estão sendo somados.

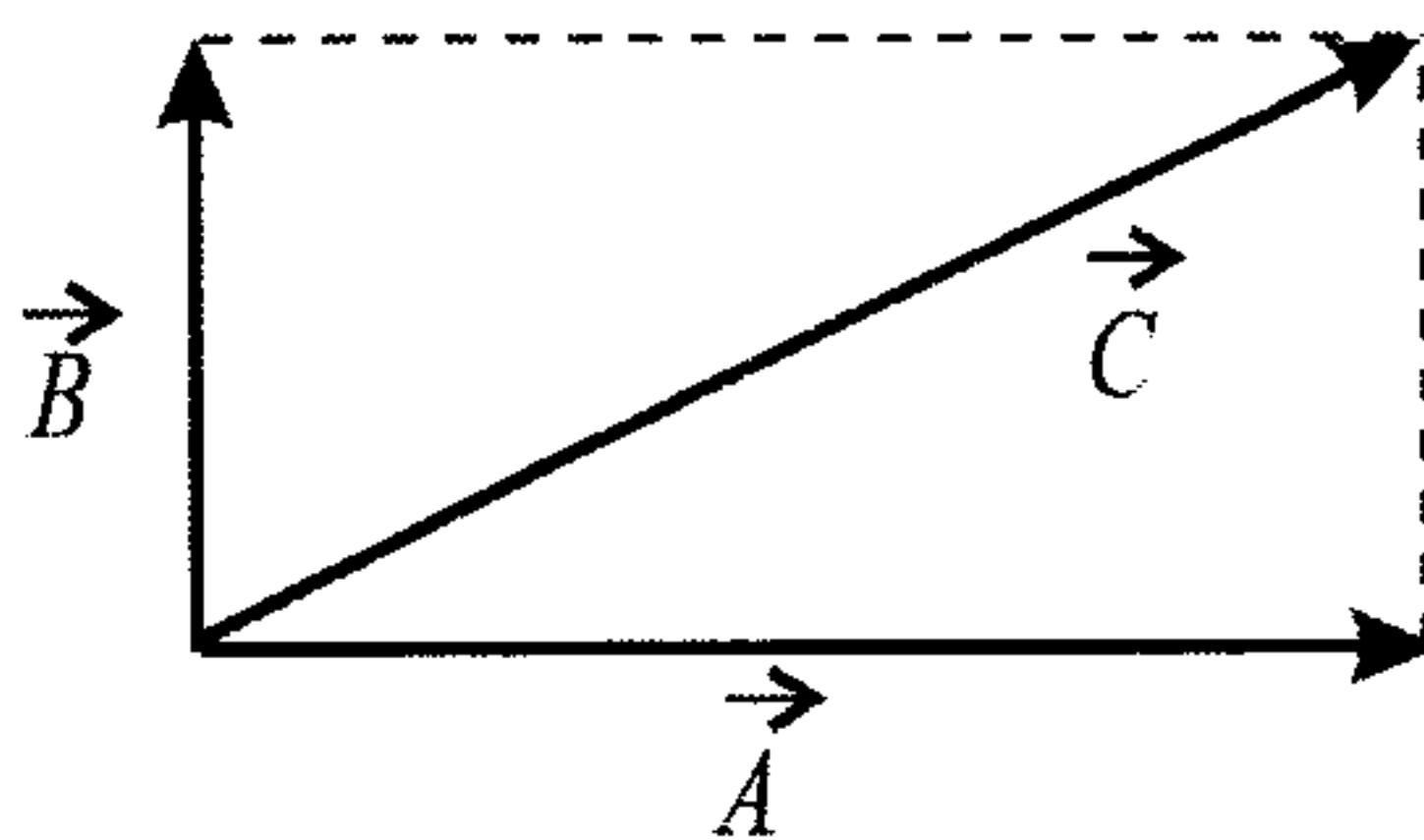



Figura 1.7: Soma dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ pelo método do paralelogramo.

Quando os vetores formam um triângulo que não é retângulo, não é possível usar o Teorema de Pitágoras para encontrar o módulo do vetor. Nesse caso, usamos a lei dos cossenos, que é

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta \tag{1.1}$$

onde os termos são definidos como mostra a figura 1.8.

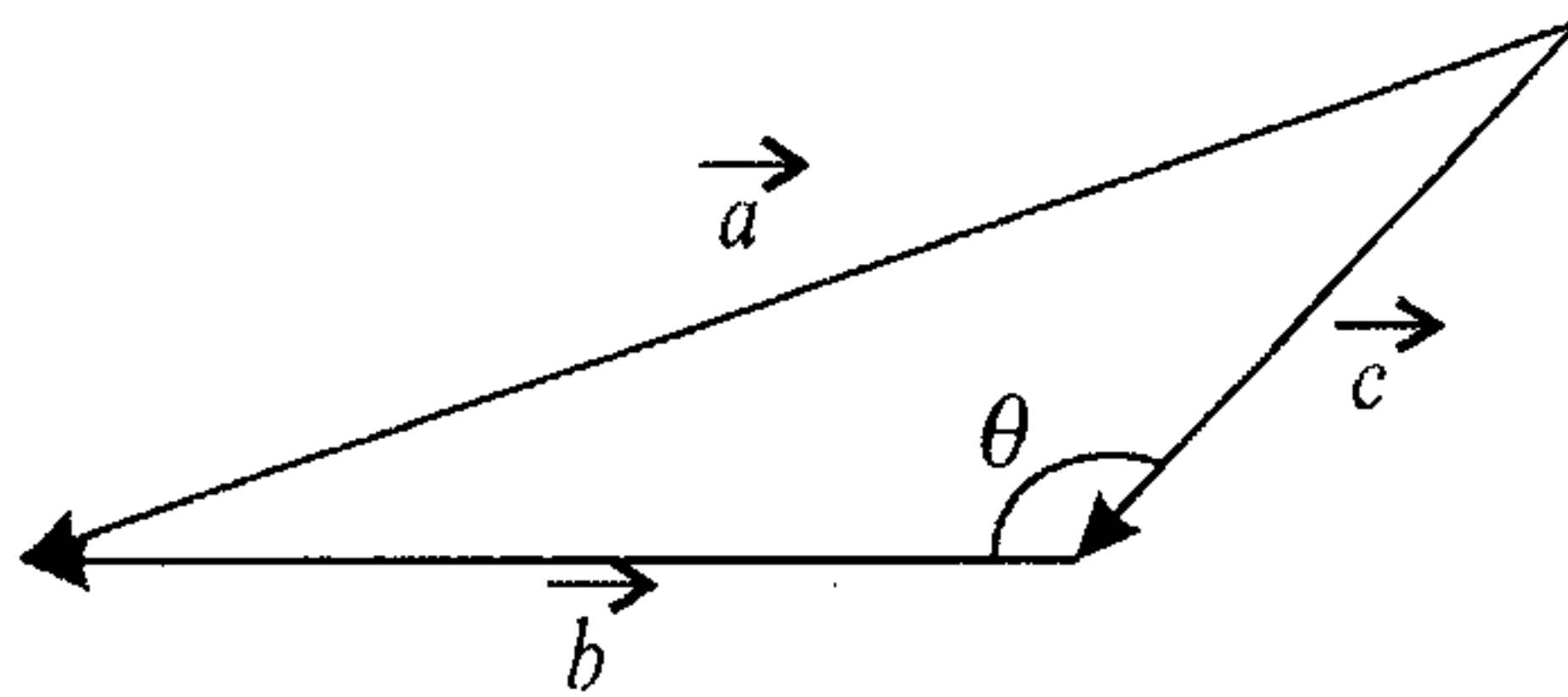



Figura 1.8: Definição dos termos para a lei dos cossenos.

Quando existem mais de dois vetores, a soma pelo método geométrico do polígono é idêntica, como se verifica na figura 1.9.

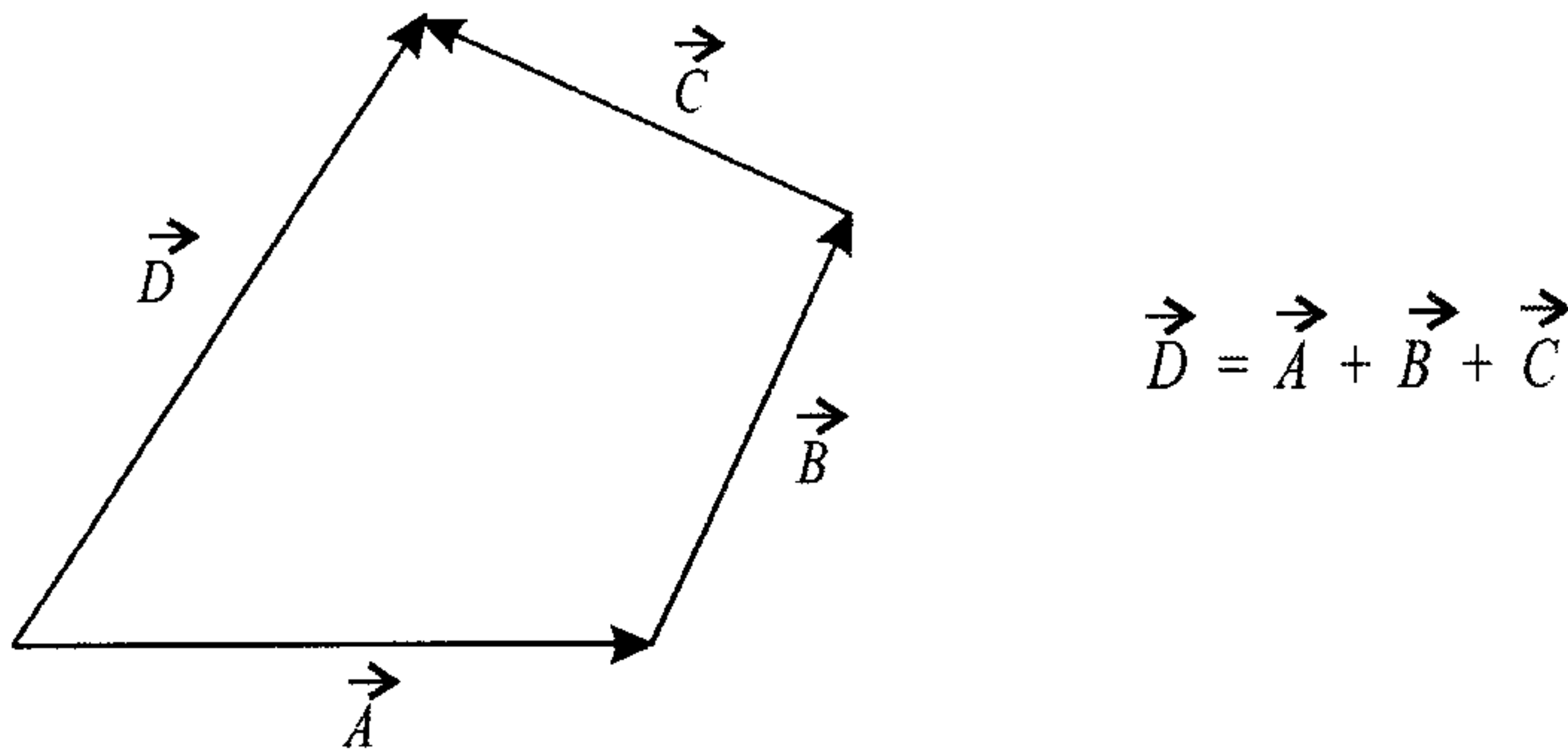



Figura 1.9: Representação da soma dos vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$, isto é, $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

Já para o método do paralelogramo devemos tomar a soma dois a dois, tendo em vista que para os vetores, assim como para números, a soma tem a propriedade associativa, ou seja, $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$.

É possível também multiplicar um vetor por um número. O resultado dessa multiplicação é um outro vetor, cujo tamanho é o tamanho do vetor inicial multiplicado pelo número. Assim, o vetor $\vec{B} = k\vec{A}$ pode ser maior do que $\vec{A}$ se $|k| > 1$; igual a $\vec{A}$ se $k = 1$; e menor do que $\vec{A}$ se $|k| < 1$. Quando

$k < 0$, a multiplicação resulta num vetor que aponta no sentido contrário ao do vetor inicial. Quando $k = 0$, o resultado é um vetor nulo. A figura 1.10 ilustra os casos discutidos.

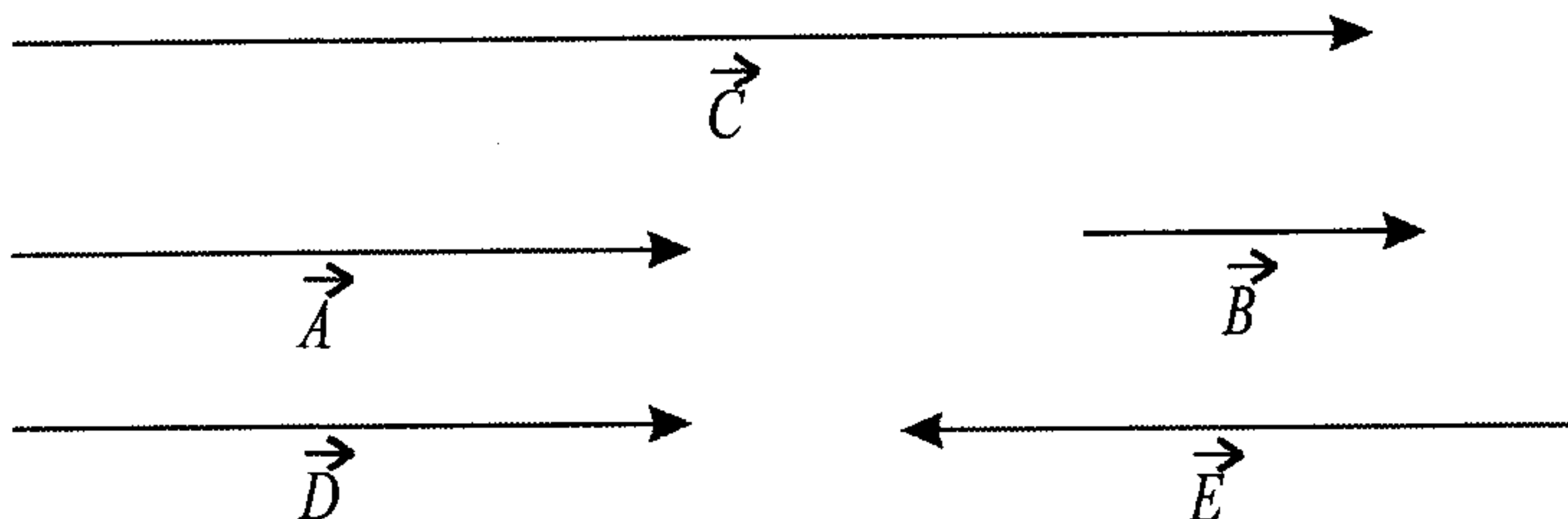



Figura 1.10: Multiplicação de um número por um vetor. $\vec{B} = \frac{1}{2}\vec{A}$, $\vec{C} = 2\vec{A}$, $\vec{D} = 1\vec{A}$ e $\vec{E} = -1\vec{A}$.

Quando efetuamos uma subtração de dois vetores $\vec{B}$ e $\vec{A}$, isto é, $\vec{B} - \vec{A}$, na verdade o que ocorre é uma soma do vetor $\vec{B}$ com o vetor $\vec{C} = -1\vec{A} = -\vec{A}$, ou seja, $\vec{B} + \vec{C}$, onde $\vec{C} = -\vec{A}$. Simplesmente invertemos o sentido do vetor (ou dos vetores, se houver mais de um) que é precedido pelo sinal negativo e fazemos uma soma por qualquer um dos métodos já discutidos.

A propriedade de multiplicação por um número faz com que seja possível definir algo semelhante a uma unidade para vetores. Podemos supor um vetor-base, que representa a unidade, e os outros vetores seriam múltiplos desse vetor especial. Esse vetor-base deve ter módulo 1 e, portanto, ele é um vetor unitário, o que facilita a multiplicação por número. Tais vetores são chamados *versores* e sua representação é a seguinte: dado um vetor $\vec{A}$, que define uma certa direção e sentido no espaço, o versor correspondente é simbolizado por $\hat{A}$. Para a figura 1.10, considerando que $|\vec{A}| = 1$, podemos escrever $\vec{B} = \frac{1}{2}\hat{A}$, $\vec{C} = 2\hat{A}$, $\vec{D} = \hat{A}$ e $\vec{E} = -\hat{A}$.

Matematicamente, um dado versor é obtido do vetor correspondente através de

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \tag{1.2}$$

Vamos relembrar agora a figura 1.6. Nela existem duas direções bem definidas, x e y. Convencionou-se que o versor da direção x é representado por $\hat{\mathbf{i}}$, enquanto o versor da direção y é representado por $\hat{\mathbf{j}}$. Em três dimensões,

o versor da direção z é definido por $\hat{\mathbf{k}}$. O conjunto desses versores forma uma base para o espaço tridimensional, representada por $R_3 = \{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$. A figura 1.11 apresenta os três versores.

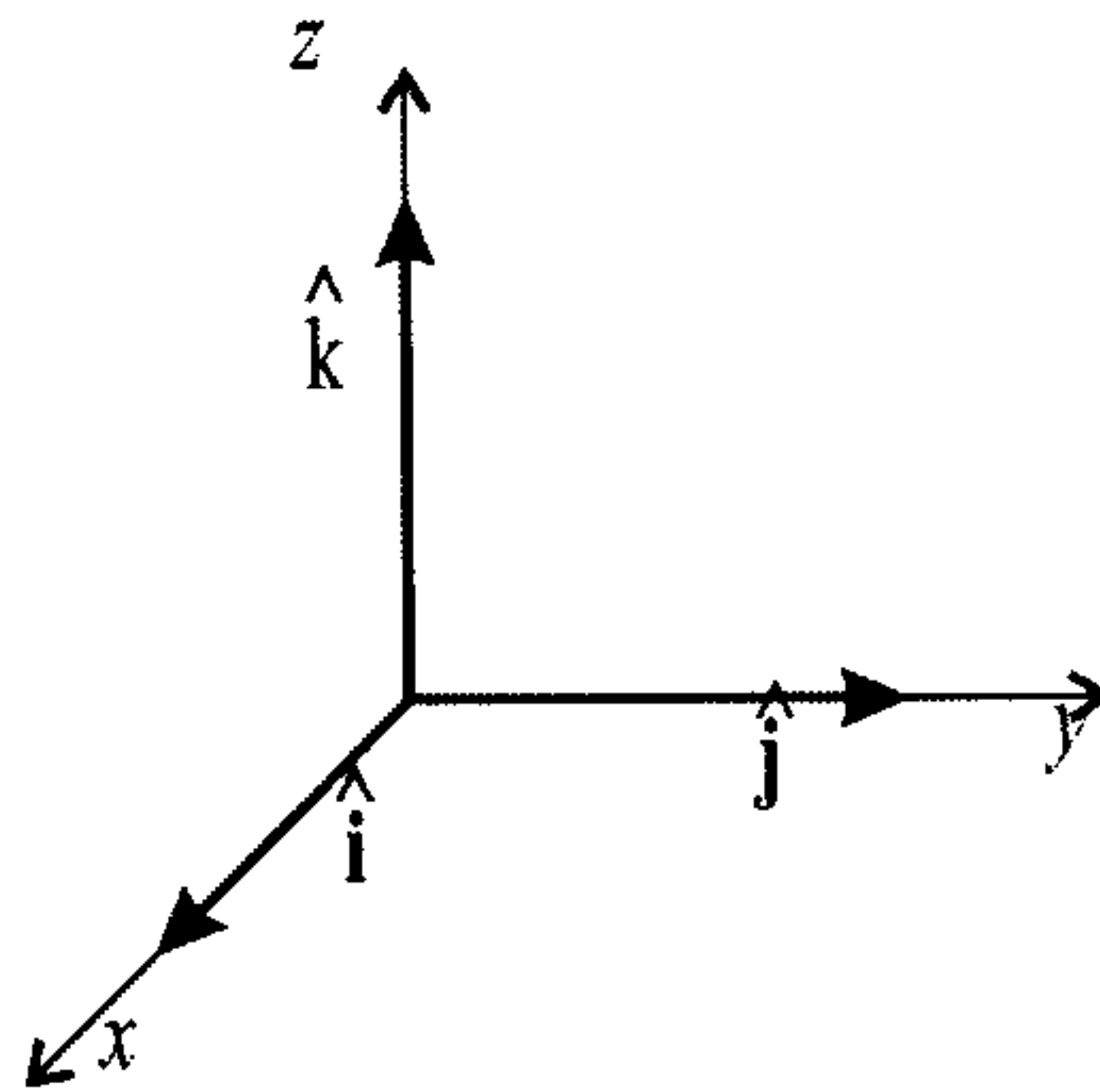



Figura 1.11: Os versores $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ para o sistema de coordenadas retangulares.

Assim, na figura 1.6, temos $\vec{A} = 10\,\hat{\mathbf{i}}$ e $\vec{B} = 5\,\hat{\mathbf{j}}$, e o vetor resultante é $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = 10\,\hat{\mathbf{i}} + 5\,\hat{\mathbf{j}}$.

Quando os vetores são escritos na forma $\vec{V} = V_x\,\hat{\mathbf{i}} + V_y\,\hat{\mathbf{j}} + V_z\,\hat{\mathbf{k}}$, a sua soma é bastante facilitada. Basta somar algebricamente as componentes em $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$, como se fossem números. Por exemplo, se tivermos os vetores $\vec{a} = a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} + a_z\,\hat{\mathbf{k}}$ e $\vec{b} = b_x\,\hat{\mathbf{i}} + b_y\,\hat{\mathbf{j}} + b_z\,\hat{\mathbf{k}}$, o vetor resultante $\vec{c}$ é

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$
$$\vec{c} = a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} + a_z\,\hat{\mathbf{k}} + b_x\,\hat{\mathbf{i}} + b_y\,\hat{\mathbf{j}} + b_z\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\vec{c} = \overbrace{(a_x + b_x)}^{c_x}\,\hat{\mathbf{i}} + \overbrace{(a_y + b_y)}^{c_y}\,\hat{\mathbf{j}} + \overbrace{(a_z + b_z)}^{c_z}\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\vec{c} = c_x\,\hat{\mathbf{i}} + c_y\,\hat{\mathbf{j}} + c_z\,\hat{\mathbf{k}}$$

O esquema mostrado vale para a soma de qualquer número de vetores, não apenas para o caso de dois.

Além de simplificar a soma dos vetores, a decomposição nos sistemas de eixos também facilita o cálculo do módulo do vetor. Considere dois vetores $\vec{a} = a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}}$ e $\vec{b} = b_x\,\hat{\mathbf{i}} + b_y\,\hat{\mathbf{j}}$. A sua soma é $\vec{c} = (a_x + b_x)\,\hat{\mathbf{i}} + (a_y + b_y)\,\hat{\mathbf{j}}$. No entanto, o vetor resultante é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são dados por $(a_x + b_x)$ e $(a_y + b_y)$, e assim, o seu módulo é dado por

$$c = |\vec{c}| = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2}$$

como mostra a figura 1.12.

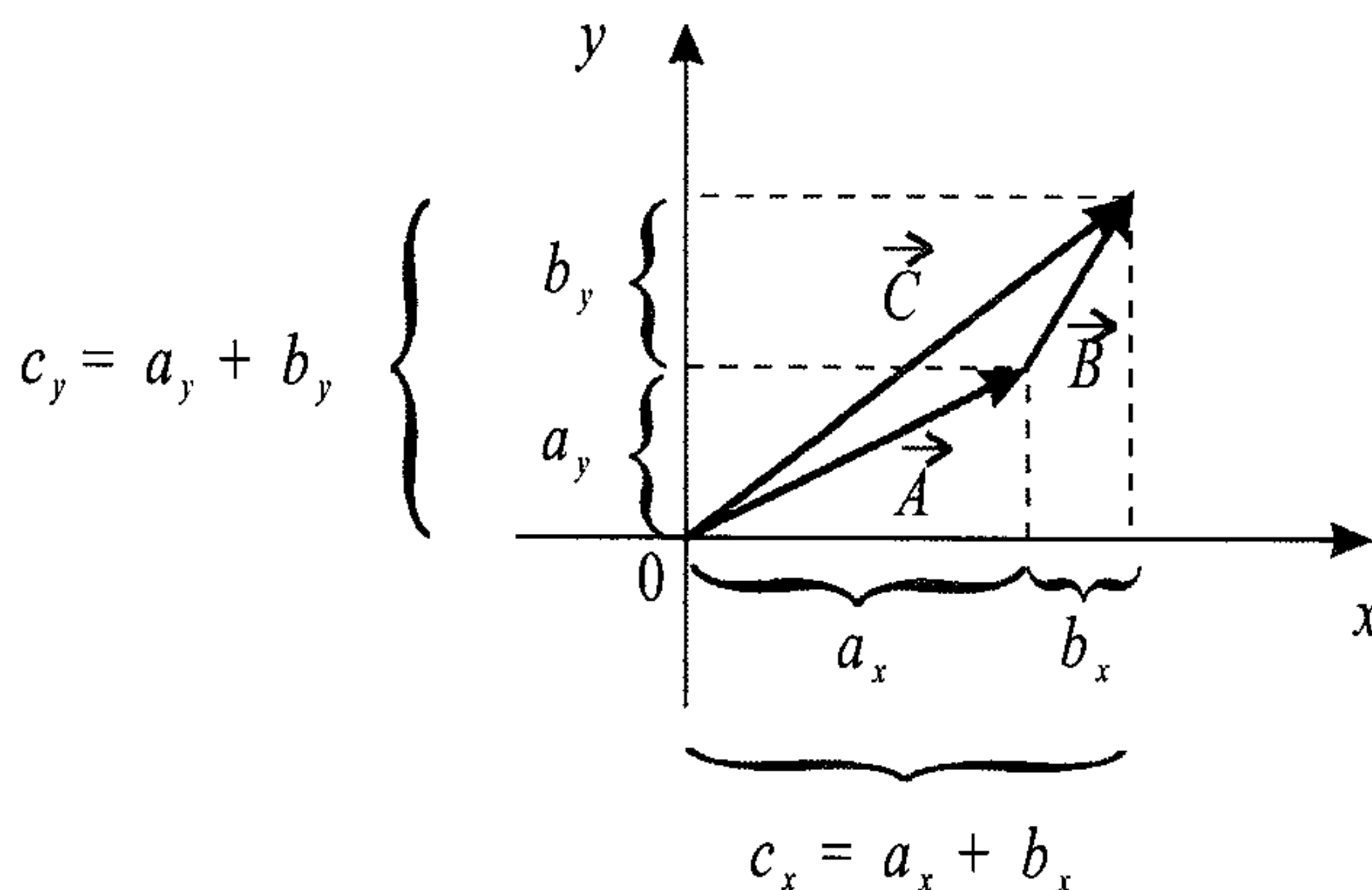



Figura 1.12: Representação da soma de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$. O vetor resultante é a hipotenusa de um triângulo retângulo, de catetos $a_x + b_x$ e $a_y + b_y$.

A expressão acima vale para qualquer número de vetores, não apenas dois. Quando estamos em três dimensões, o módulo de um vetor $\vec{V} = V_x \hat{\mathbf{i}} + V_y \hat{\mathbf{j}} + V_z \hat{\mathbf{k}}$ é dado por

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \tag{1.3}$$

e a prova é deixada como exercício.

Já que é possível multiplicar um vetor por um número, talvez seja também possível multiplicar um vetor por outro. Na verdade, existem dois modos de fazer o produto de dois vetores: mediante o *produto escalar* e através do *produto vetorial*. Vejamos inicialmente o produto escalar.

O produto escalar [2] entre dois vetores tem como resultado um número real. Sua definição, considerando dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, é

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta = AB\cos\theta \tag{1.4}$$

[2] Às vezes o produto escalar é chamado *produto-ponto*.

onde se observa que de fato o produto escalar de dois vetores resulta num número. O ângulo θ, para o produto escalar, é definido como sendo o ângulo que os vetores formam entre si quando suas origens são colocadas num ponto comum, como mostra a figura 1.13.

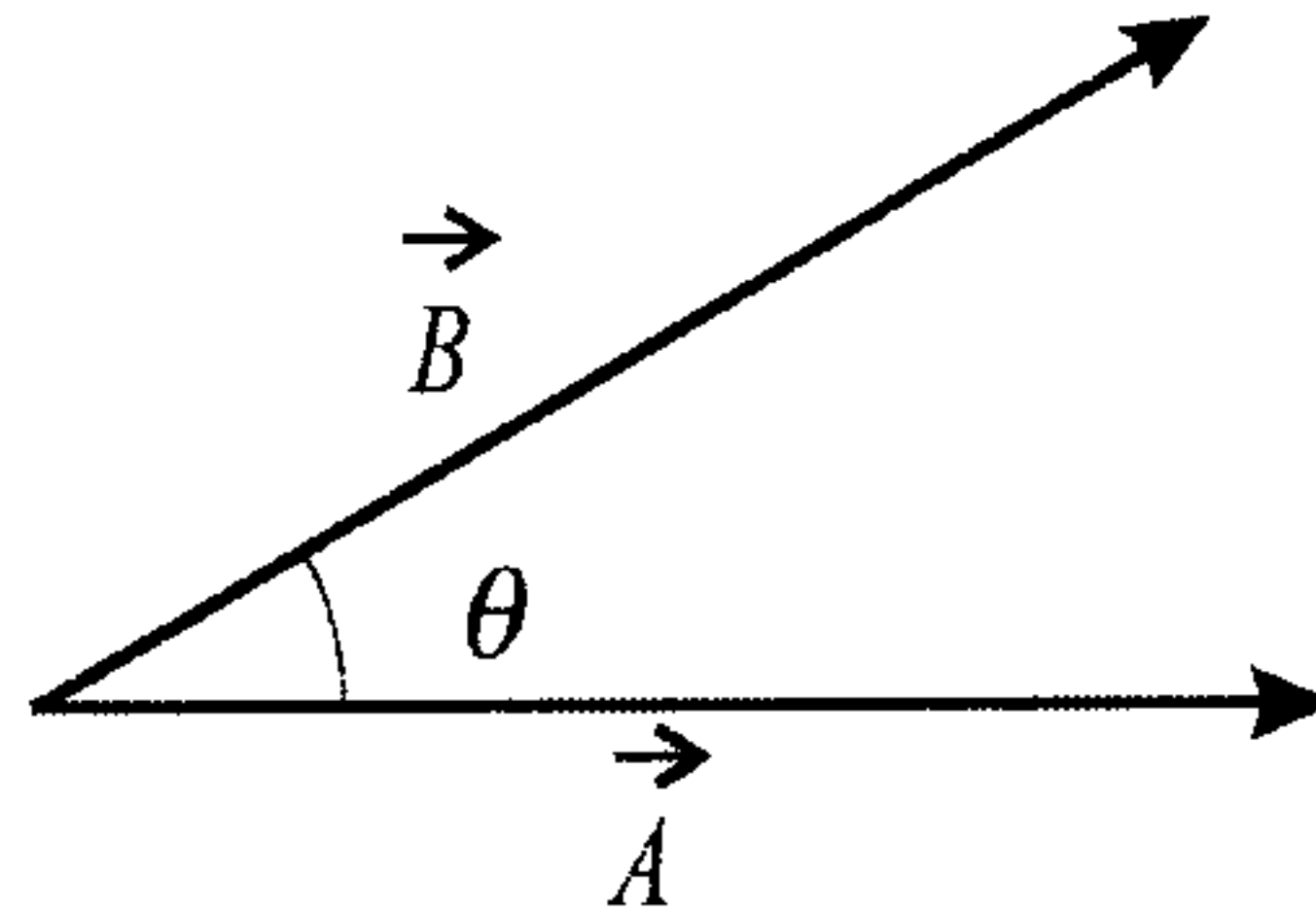



Figura 1.13: Definição do ângulo θ para o produto escalar entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

O produto escalar é utilizado, entre outras coisas, para calcular o módulo de um vetor, pois, para o vetor $\vec{V}$, temos

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = |\vec{V}||\vec{V}| \cos 0$$
$$\vec{V} \cdot \vec{V} = |\vec{V}|^2$$
$$V = |\vec{V}| = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}}$$

Um caso de especial interesse ocorre quando os vetores do produto escalar são os versores da base $R_3 = \{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$. Então, como $|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1$, e $\hat{\mathbf{i}} \perp \hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{i}} \perp \hat{\mathbf{k}}$, e $\hat{\mathbf{j}} \perp \hat{\mathbf{k}}$, temos

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 1 \qquad \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 1 \qquad \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1 \tag{1.5a}$$
$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0 \qquad \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0 \qquad \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0 \tag{1.5b}$$

Uma base que tenha as propriedades acima é denominada ortonormal, porque, além de seus vetores serem ortogonais, eles têm módulo 1. Isso vale para qualquer sistema de coordenadas, não apenas o sistema de coordenadas retangulares. Na verdade, a escolha de uma base para um sistema de coordenadas qualquer é feita de forma que as equações acima sejam verificadas para os versores da base. Outras possibilidades são, em geral, descartadas.

Quando dois vetores estão escritos numa mesma base ortonormal, o produto escalar entre eles é bastante simples de efetuar. Considere os vetores

$\vec{a} = a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} + a_z\,\hat{\mathbf{k}}$ e $\vec{b} = b_x\,\hat{\mathbf{i}} + b_y\,\hat{\mathbf{j}} + b_z\,\hat{\mathbf{k}}$. O produto escalar entre eles é dado por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} + a_z\,\hat{\mathbf{k}}) \cdot (b_x\,\hat{\mathbf{i}} + b_y\,\hat{\mathbf{j}} + b_z\,\hat{\mathbf{k}})$$

ou

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} = {} & a_x b_x\,\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + a_x b_y\,\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + a_x b_z\,\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} + a_y b_x\,\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + a_y b_y\,\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} \\ & + a_y b_z\,\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} + a_z b_x\,\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + a_z b_y\,\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + a_z b_z\,\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{1.6}$$

pois utilizamos as equações 1.5a e 1.5b. Se $\vec{a} = \vec{b}$, temos

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{a} &= |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \\ |\vec{a}| &= a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\end{aligned}$$

E assim, numa base ortonormal que siga as propriedades dadas nas equações 1.5a e 1.5b, o módulo de um vetor é dado pela raiz quadrada da soma dos quadrados das suas componentes.

O produto escalar também pode ser obtido de outra forma. Um vetor pode ser representado por uma matriz-coluna [3], e os elementos das linhas são as componentes do vetor. Assim, o vetor $\vec{v} = v_x\,\hat{\mathbf{i}} + v_y\,\hat{\mathbf{j}} + v_z\,\hat{\mathbf{k}}$ é escrito como

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Quando fazemos o produto escalar de um vetor por outro, precisamos tomar a matriz transposta [4] do primeiro vetor, o que resulta numa matriz-linha, ou seja,

---

[3] Uma matriz-coluna possui apenas uma coluna, e uma matriz-linha possui apenas uma linha.

[4] A matriz transposta de uma matriz A é dada pela seguinte regra: $A^t_{i,j} = A_{j,i}$, onde i representa as linhas, j representa as colunas da matriz A, e $A_{i,j}$ é o elemento da i-ésima linha e da j-ésima coluna de A. Por exemplo, se a matriz A for

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

e o resultado é idêntico ao expresso pela equação 1.6.

Vejamos agora o produto vetorial. O produto vetorial de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ resulta num terceiro vetor, $\vec{C}$. A representação do produto vetorial é

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \tag{1.8}$$

O módulo do vetor $\vec{C}$ definido pelo produto vetorial [5] acima é dado por

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \operatorname{sen}\theta \tag{1.9}$$

e o ângulo θ é definido da mesma forma como se verifica no caso do produto escalar (veja a figura 1.13).

Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ definem um plano no espaço. Por definição, o vetor que resulta do produto vetorial entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ deve ser ortogonal a esse plano e, portanto, ele é ortogonal, ao mesmo tempo, aos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Isso define a direção do vetor resultante. O sentido do vetor é definido pela *regra da mão direita*. Considere os dedos indicador e médio da mão direita. Represente o primeiro vetor do produto vetorial pelo dedo indicador, e o segundo, pelo dedo médio (a ordem é importante). Disponha esses dedos da mesma forma como os vetores estão no espaço. Agora forme, com o polegar da mão direita, um ângulo de 90° com o plano formado pelos outros dedos. O sentido do vetor é o mesmo que o indicado pelo polegar [6]. A figura 1.14 ilustra um produto vetorial.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

sua transposta será

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

[5] O produto vetorial também é chamado *produto-cruz*.

[6] Note que o produto vetorial não é comutativo. Na verdade, $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. Você deve ser capaz de provar isso utilizando a regra da mão direita para os dois vetores da figura 1.14.

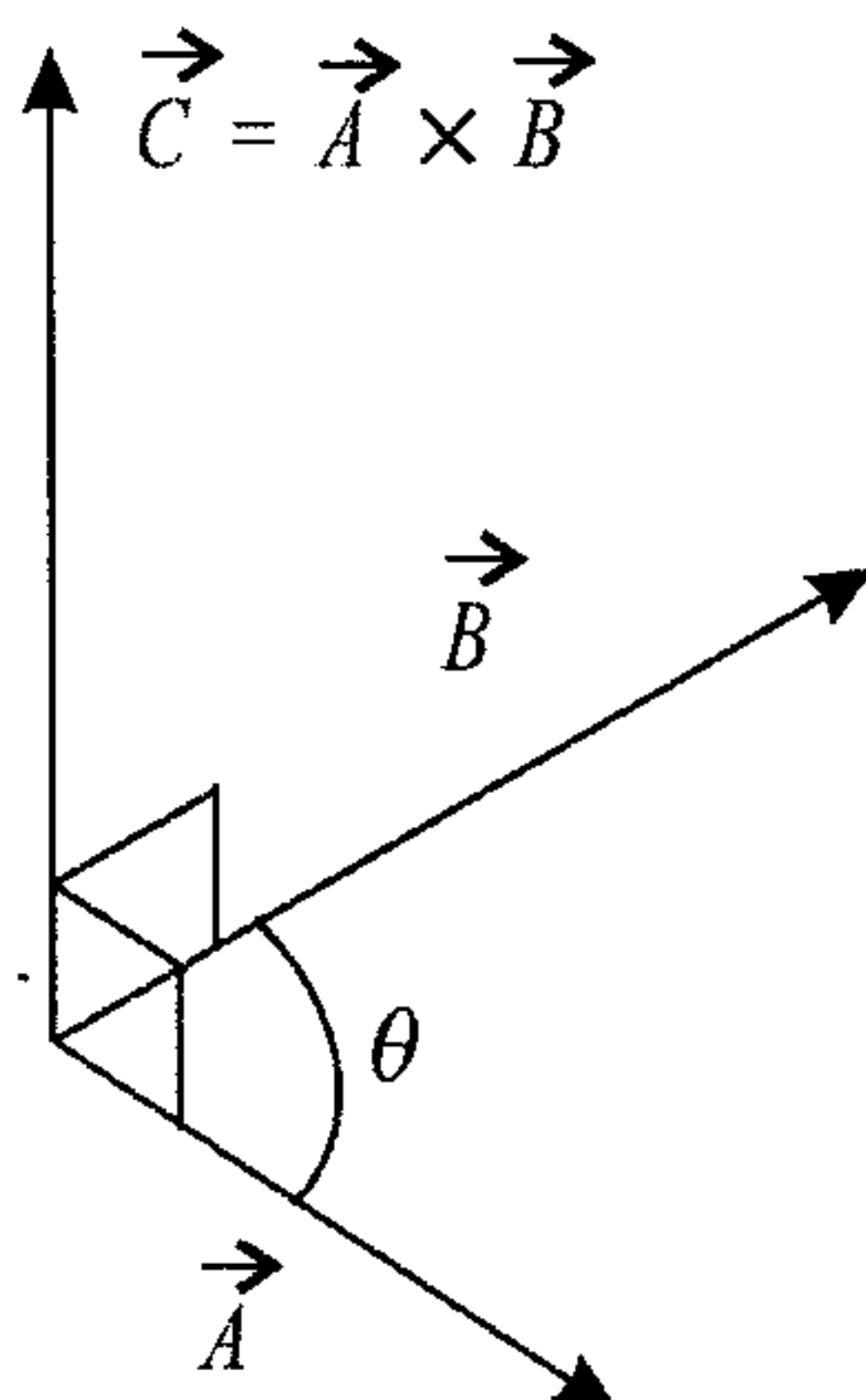



Figura 1.14: Definição do ângulo θ para o produto vetorial entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

O produto vetorial tem ainda um significado geométrico. O módulo do vetor resultante no produto vetorial é numericamente igual à área do paralelogramo definido pelos dois vetores do produto. Além disso, quando os vetores são paralelos, o produto vetorial resulta num vetor nulo, o que está de acordo com o significado geométrico, pois dois vetores paralelos não definem um paralelogramo, e então, a área é identicamente zero.

Quando os vetores são escritos numa base, como, por exemplo, a base $R_3 = \{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$, o cálculo do produto vetorial também é facilitado, a exemplo do que ocorre no caso do produto escalar. No entanto, inicialmente é preciso saber como se faz o produto vetorial dos versores da base. O produto vetorial de um versor por ele mesmo é nulo, pois eles são vetores paralelos, ou seja,

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = 0 \qquad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = 0 \qquad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0 \tag{1.10}$$

Voltando à figura 1.11, temos, pela regra da mão direita,

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \qquad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \qquad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \tag{1.11a}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}} \qquad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}} \qquad \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}} \tag{1.11b}$$

Assim, o produto vetorial dos vetores $\vec{a} = a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} + a_z\,\hat{\mathbf{k}}$ e $\vec{b} = b_x\,\hat{\mathbf{i}} + b_y\,\hat{\mathbf{j}} + b_z\,\hat{\mathbf{k}}$ é dado por

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} + a_z\,\hat{\mathbf{k}}) \times (b_x\,\hat{\mathbf{i}} + b_y\,\hat{\mathbf{j}} + b_z\,\hat{\mathbf{k}})$$

ou

$$\vec{a}\times\vec{b} = a_x b_x\,\hat{\imath}\times\hat{\imath} + a_x b_y\,\hat{\imath}\times\hat{\jmath} + a_x b_z\,\hat{\imath}\times\hat{k} + a_y b_x\,\hat{\jmath}\times\hat{\imath} + a_y b_y\,\hat{\jmath}\times\hat{\jmath} + a_y b_z\,\hat{\jmath}\times\hat{k} + a_z b_x\,\hat{k}\times\hat{\imath} + a_z b_y\,\hat{k}\times\hat{\jmath} + a_z b_z\,\hat{k}\times\hat{k}$$

ou ainda,

$$\vec{a}\times\vec{b} = a_x b_y\,\hat{k} - a_x b_z\,\hat{\jmath} - a_y b_x\,\hat{k} + a_y b_z\,\hat{\imath} + a_z b_x\,\hat{\jmath} - a_z b_y\,\hat{\imath} \tag{1.12}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\hat{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\hat{k} \tag{1.13}$$

O produto vetorial acima pode ser ordenado de uma forma mais concisa, como um determinante de uma matriz na qual os elementos da primeira linha são os versores da base, na ordem $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$, os elementos da segunda linha são as componentes do 1º vetor, e a terceira linha é dada pelo 2º vetor, ou seja,

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

Além do produto escalar e do produto vetorial, existem combinações especiais desses dois, formando alguns produtos especiais. O primeiro deles é o chamado *produto misto.* O produto misto de três vetores é denotado por

$$\text{prod. misto} = \vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}\,, \tag{1.15}$$

onde primeiro se efetua o produto vetorial e depois o escalar, já que o inverso não tem sentido. O produto misto é um número e também pode ser escrito como um determinante, na forma

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{1.16}$$

Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ definem no espaço um paralelepípedo, e o produto misto dá o volume desse sólido geométrico. Esta é a interpretação geométrica do produto misto. Se o produto misto é nulo, os três vetores são coplanares. Além disso, para o produto misto vale a seguinte propriedade:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a} = \vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b} \tag{1.17}$$

A prova desta propriedade, que é bastante simples, utiliza a expressão 1.16. Vamos mostrar que $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a}$. Para tanto, temos

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Agora, trocamos a segunda linha com a terceira, o que, por causa de uma propriedade do determinante de qualquer matriz, troca o sinal do determinante. Assim,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Trocando agora a segunda linha com a terceira, obtemos

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

e o determinante troca de sinal novamente. No entanto,

$$\vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

e assim,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a}$$

que completa esta parte da prova. Você pode determinar as outras igualdades, como exercício.

O segundo produto especial é o *duplo produto vetorial*, dado por

$$\text{duplo produto vetorial} = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \tag{1.18}$$

O duplo produto vetorial tem as seguintes propriedades:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \tag{1.19a}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) \tag{1.19b}$$

Por fim, existe um último produto importante, sem um nome especial, que envolve o produto escalar de dois vetores, os quais, por sua vez, são o resultado de um produto vetorial. Para esse produto, existe a seguinte propriedade:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}) \qquad (1.20)$$

Até agora concentramos nossa atenção no sistema de coordenadas retangulares. Existem outros sistemas de coordenadas importantes em Física. Particularmente, em duas dimensões, temos o sistema de coordenadas *polares*, e em três, o sistema de coordenadas *cilíndricas* e o sistema de coordenadas *esféricas*.

1.2 Sistema de Coordenadas Polares

Em duas dimensões, o sistema de coordenadas retangulares utiliza duas coordenadas, x e y, para indicar um ponto P no plano, na forma P(x,y) (ver figura 1.5, para um exemplo). Além disso, a base nesse sistema é definida pelos versores $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$, e vamos representá-la por $R_2 = \{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}\}$. Nessa base, qualquer vetor $\vec{v}$ é representado por $\vec{v} = v_x\,\hat{\mathbf{i}} + v_y\,\hat{\mathbf{j}}$, onde v_x e v_y são as componentes do vetor nas direções x e y, respectivamente.

O sistema de coordenadas polares também utiliza duas coordenadas [7], mas elas são diferentes. Uma delas é a distância ρ, medida em linha reta, de uma origem até o ponto P ($\rho \geq 0$). A outra é o ângulo θ que a reta que une a origem ao ponto P faz com um eixo particular, chamado *eixo polar*, geralmente correspondente ao eixo x das coordenadas retangulares ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). A figura 1.15 apresenta esse sistema de coordenadas.

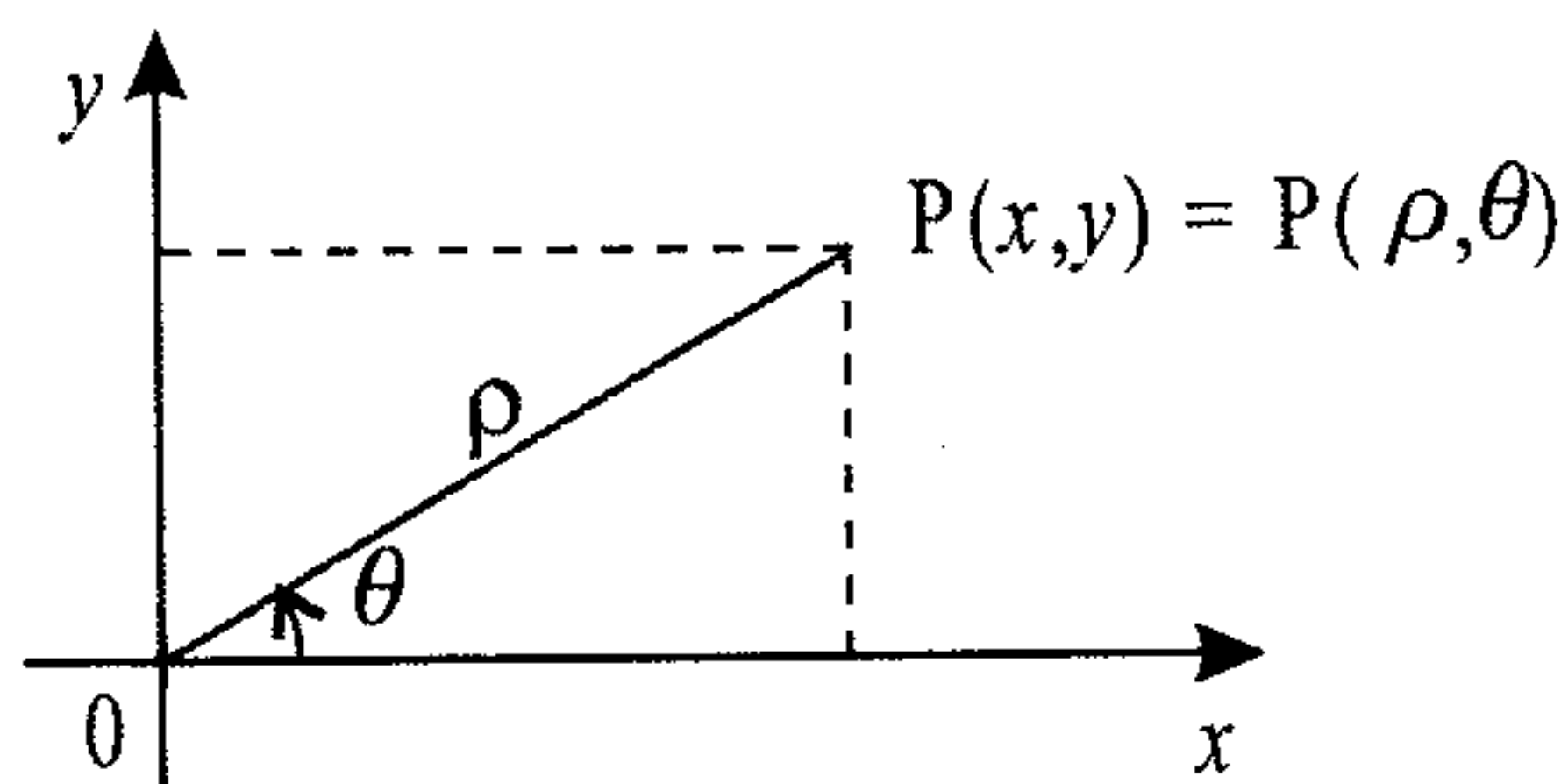



Figura 1.15: Definição das coordenadas polares ρ e θ.

[7] Na verdade, para indicar um ponto em um espaço de n dimensões, são necessárias pelo menos n coordenadas, independentemente do sistema de coordenadas em particular.

É importante ressaltar que o ângulo θ é medido a partir do lado positivo do eixo polar, no sentido anti-horário, até chegar à reta entre a origem e o ponto P.

Um ponto P do plano pode ter as coordenadas $P(x, y)$ ou $P(\rho, \theta)$. A correspondência entre os dois sistemas de coordenadas é dada por

$$x = \rho \cos\theta \tag{1.21a}$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\theta \tag{1.21b}$$

ou pelas relações inversas

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.22a}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \tag{1.22b}$$

Os versores das coordenadas polares são representados por $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. O versor $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ está na direção definida pela reta que une a origem e o ponto P, e o seu sentido é da origem para P. O versor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é ortogonal a $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, e seu sentido acompanha o do crescimento do ângulo θ, como mostra a figura 1.16.

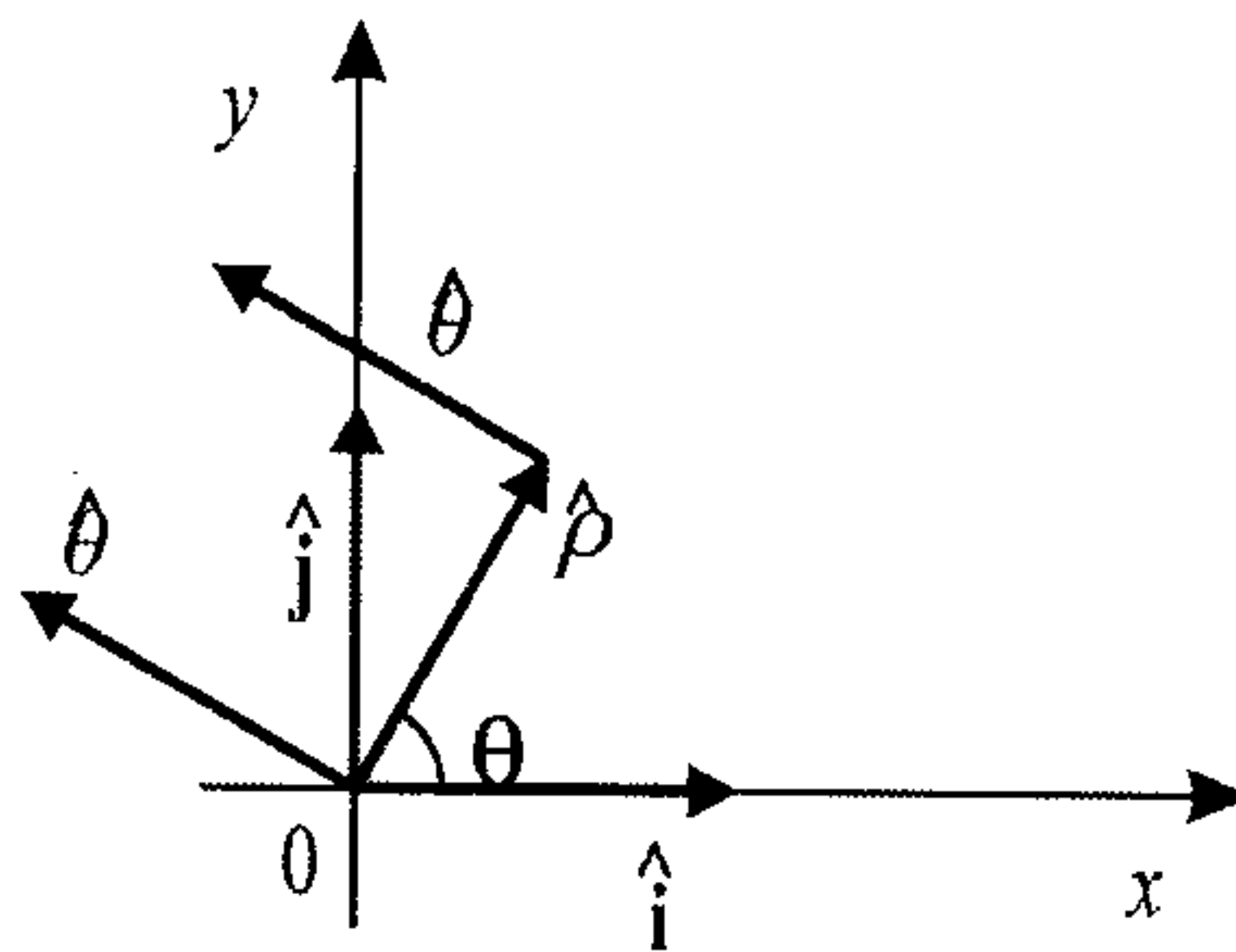



Figura 1.16: Versores $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ em coordenadas polares, juntamente com os versores $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$ de coordenadas retangulares.

A base em coordenadas polares é representada por $\mathcal{P} = \{\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}\}$. Para passar de uma base para a outra, podemos escrever, utilizando a figura 1.16,

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{j}} \tag{1.23a}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}} \tag{1.23b}$$

As equações acima podem ser escritas na forma de um produto de matrizes, de modo que $\mathcal{P} = \mathrm{T}_{R_2,\mathcal{P}} R_2$, considerando os versores de cada base como uma matriz-coluna, ou seja,

$$\begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

onde a matriz $\mathrm{T}_{\{R_2,\mathcal{P}\}}$, definida por

$$\mathrm{T}_{\{R_2,\mathcal{P}\}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

é a matriz de transformação de coordenadas retangulares (R_2) em polares ($\mathcal{P}$). Quando os dois sistemas de coordenadas que estão conectados por uma matriz T são ortogonais, T também é uma matriz ortogonal, e seu determinante vale $\det \mathrm{T} = 1$, como pode ser comprovado facilmente, pois

$$\det \mathrm{T}_{\{R_2,\mathcal{P}\}} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

Na verdade, o determinante de uma matriz ortogonal pode ser 1 ou -1. No entanto, para os sistemas de coordenadas utilizados em Física, usa-se a convenção ***dextrógira***, que só permite $\det \mathrm{T} = 1$. Na outra convenção, chamada ***levógira***, a transformação é tal que $\det \mathrm{T} = -1$. Basicamente, a diferença ocorre na definição do produto vetorial. A convenção dextrógira define o produto vetorial mediante a regra da mão direita, ao passo que a levógira utiliza a regra da ***mão esquerda***, definida da mesma forma que a da mão direita, só que com os dedos da outra mão. Com isso, o vetor que resulta do produto vetorial obtido pela regra da mão esquerda tem sentido oposto ao daquele definido mediante a regra da mão direita. Para comprovar isso, aplique a regra da mão esquerda na figura 1.14.

Além disso, uma matriz ortogonal tem a propriedade de que sua transposta é igual à sua inversa, ou seja, para uma matriz A ortogonal, temos

$$A^t = A^{-1}$$

A inversa de uma matriz A, se existir, é a matriz que satisfaz a condição

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbf{I}$$

onde **I** é uma matriz quadrada de ordem n (numa matriz quadrada, o número de linhas é igual ao d colunas, e ambos são representados por n). Os elementos dessa matriz, chamada *matriz identidade* são todos nulos, exceto aqueles que pertecem à diagonal principal, os quais valem 1. Por exemplo para $n = 3$, temos

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A condição para que uma matriz possa ter inversa é que $\det A \neq 0$. Além disso, $\det \mathbf{I}_n = 1$ a matriz identidade também é uma matriz ortogonal, e sua inversa é igual a ela própria. A matri identidade age como o número 1 na multiplicação de números. É o elemento neutro da multiplicaçã no espaço vetorial definido pelas matrizes, e assim, para qualquer matriz A, temos

$$A \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot A = A$$

Portanto, para a transformação de coordenadas inversa temos que multiplica os dois lados da equação $\mathcal{P} = \mathrm{T}_{\{R_2,\mathcal{P}\}} R_2$ por T^{-1}, o que resulta na expressã

$$\mathrm{T}^{-1}_{\{R_2,\mathcal{P}\}} \mathcal{P} = \mathrm{T}^{-1}_{\{R_2,\mathcal{P}\}} \mathrm{T}_{\{R_2,\mathcal{P}\}} R_2$$

Como

$$\mathrm{T}^{-1}_{\{R_2,\mathcal{P}\}} \mathrm{T}_{\{R_2,\mathcal{P}\}} = \mathbf{I}$$

e

$$\mathrm{T}^{t}_{\{R_2,\mathcal{P}\}} = \mathrm{T}^{-1}_{\{R_2,\mathcal{P}\}}$$

a equação acima resulta em

$$R_2 = \mathrm{T}^{t}_{\{R_2,\mathcal{P}\}} \mathcal{P}$$

ou, finalmente,

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

de onde extraímos

$$\hat{\mathbf{i}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.27a}$$

$$\hat{\mathbf{j}} = \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.27b}$$

Além disso, $\mathcal{P} = \{\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}\}$ é uma base ortogonal, e como $|\hat{\boldsymbol{\rho}}| = |\hat{\boldsymbol{\theta}}| = 1$, temos também

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} = 1 \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = 1 \qquad \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} = 0 \tag{1.28}$$

A aplicação das coordenadas polares será feita ao longo do texto. Vejamos agora outro sistema de coordenadas.

1.3 Sistema de Coordenadas Cilíndricas

O sistema de coordenadas cilíndricas é tridimensional, e assim, ele utiliza três coordenadas para indicar um ponto P no espaço, as quais são apresentadas na figura 1.17.

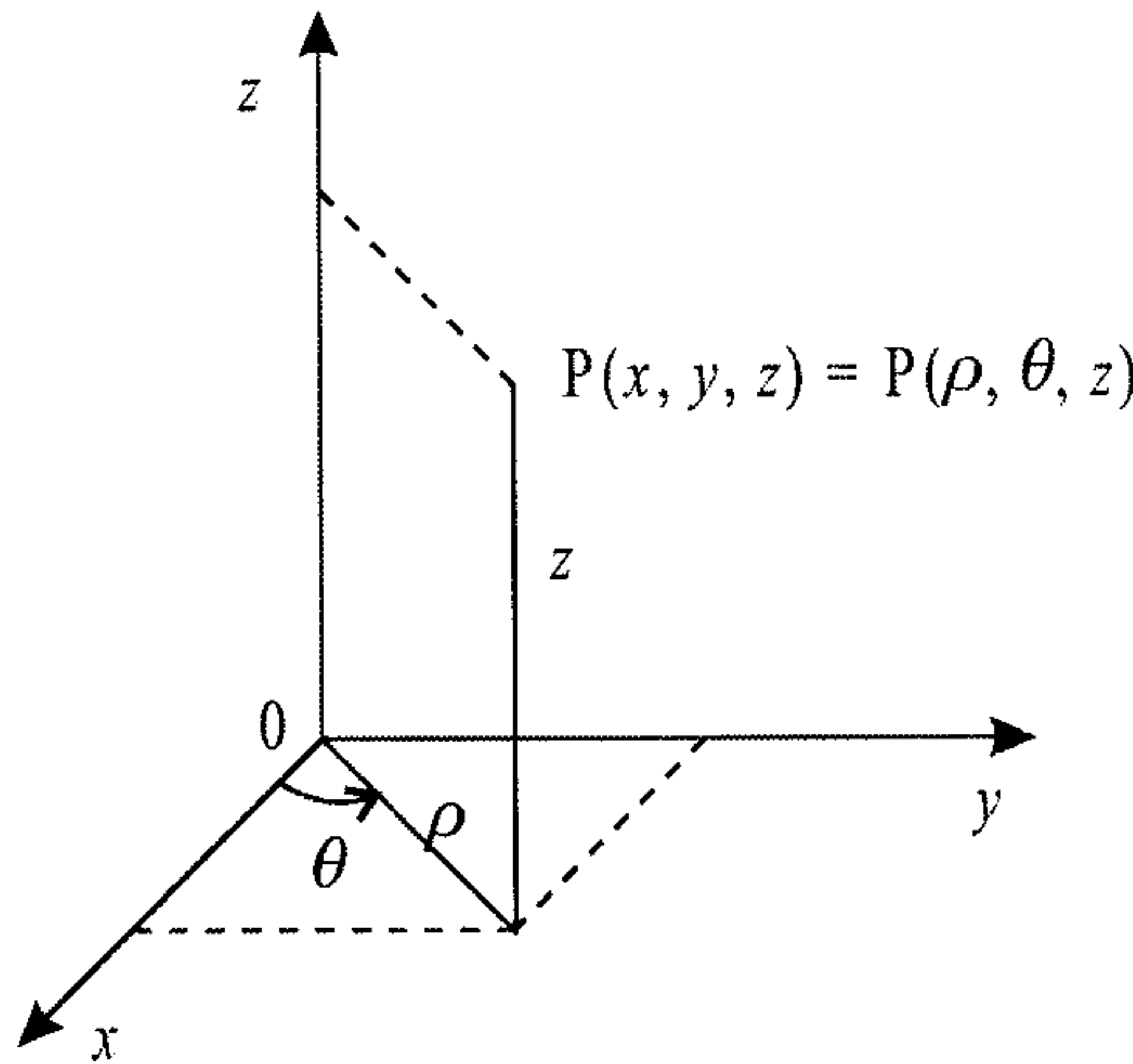



Figura 1.17: Definição das coordenadas (ρ, θ, z) do sistema de coordenadas cilíndricas.

As coordenadas cilíndricas são a distância entre a origem e a projeção do ponto P no plano xy, representada por ρ ($\rho \geq 0$); o ângulo θ entre a reta definida pela origem e a projeção do ponto P e o eixo x ($0 \leq \theta \leq 2\pi$); e a

altura z do ponto, que é idêntica ao z de coordenadas retangulares ($-\infty \leq z \leq \infty$). Na verdade, as coordenadas cilíndricas são, basicamente, as coordenadas polares com um eixo z a mais, para representar a dimensão extra. Assim, em coordenadas cilíndricas, um ponto P é representado por $P(\rho, \theta, z)$, e a correspondência entre as coordenadas cilíndricas e as retangulares é dada por

$$x = \rho \cos\theta \tag{1.29a}$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\theta \tag{1.29b}$$

$$z = z \tag{1.29c}$$

ou pelas relações inversas

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.30a}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \tag{1.30b}$$

$$z = z \tag{1.30c}$$

A base das coordenadas cilíndricas é indicada por $\mathcal{C} = \{\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{k}}\}$, e seus versores são apresentados na figura 1.18.

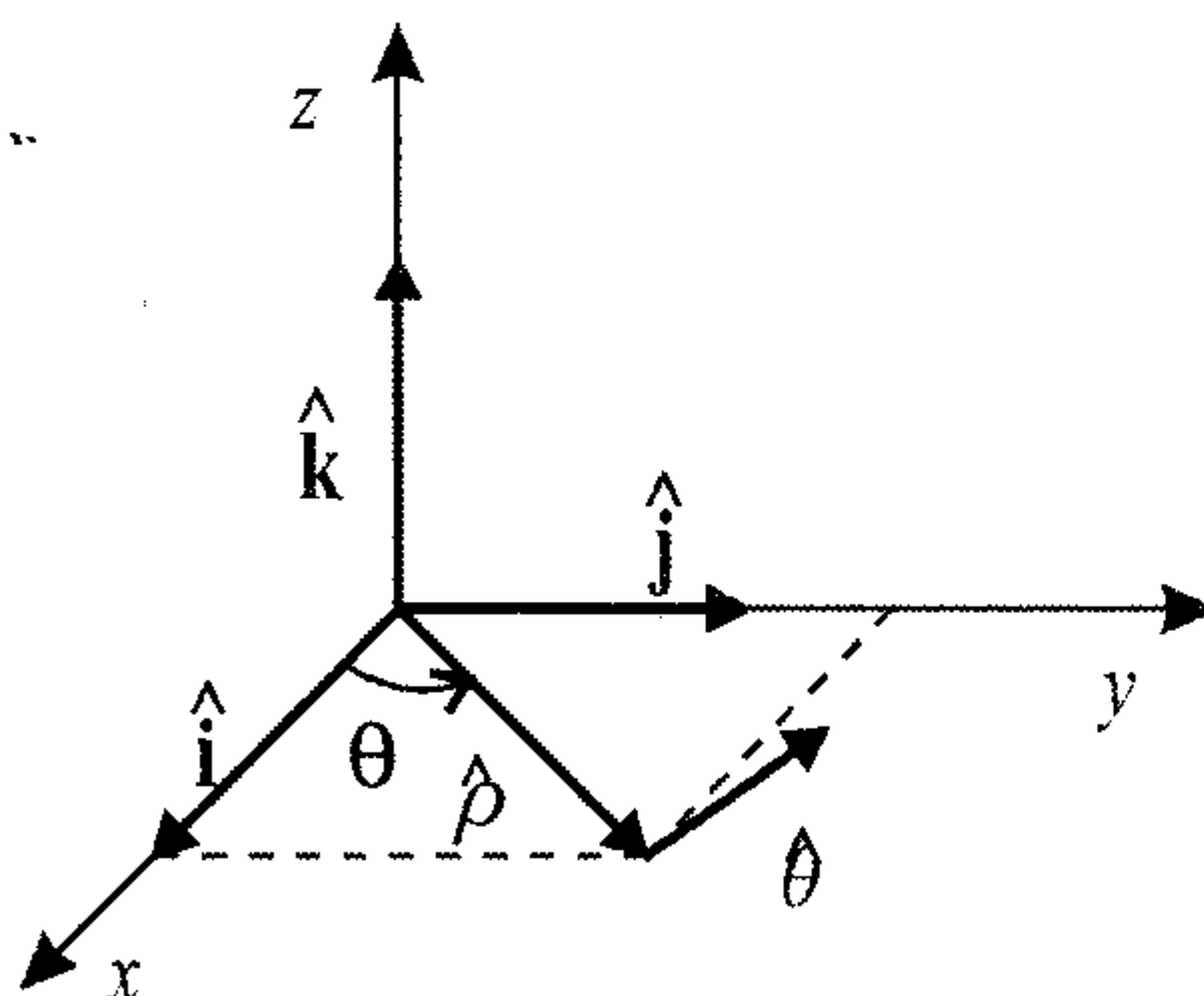



Figura 1.18: Versores das coordenadas do sistema de coordenadas cilíndricas.

As equações de transformação dos versores da base de coordenadas retangulares, representada por $R_3 = \{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$, nos versores da base de coordenadas cilíndricas, são

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{j}} \tag{1.31a}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}} \tag{1.31b}$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \tag{1.31c}$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{pmatrix}$$

onde agora a matriz de transformação de coordenadas é

$$\mathrm{T}_{\{R_3,\mathcal{C}\}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que também é uma matriz ortogonal. A relação inversa, que é obtida facilmente como no caso das coordenadas polares, é dada na forma $R_3 = \mathrm{T}^t_{\{R_3,\mathcal{C}\}}\mathcal{C}$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{pmatrix}$$

e, portanto, temos

$$\hat{\mathbf{i}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.32a}$$

$$\hat{\mathbf{j}} = \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.32b}$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \tag{1.32c}$$

Com relação aos produtos escalares, temos

$$\begin{array}{lll} \hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}} = 1 & \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = 1 & \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1 \\ \hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}} = 0 & \hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}} = 0 & \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = 0 \end{array}$$

e os produtos vetoriais ficam

$$\begin{array}{lll} \hat{\boldsymbol{\rho}}\times\hat{\boldsymbol{\rho}} = 0 & \hat{\boldsymbol{\theta}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}} = 0 & \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}} = 0 \\ \hat{\boldsymbol{\rho}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{k}} & \hat{\boldsymbol{\theta}}\times\hat{\mathbf{k}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} & \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}\times\hat{\boldsymbol{\rho}} = -\hat{\mathbf{k}} & \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\boldsymbol{\rho}} & \hat{\boldsymbol{\rho}}\times\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{array}$$

As coordenadas cilíndricas são bastante úteis em problemas que exibem simetria cilíndrica. Vejamos agora o sistema de coordenadas esféricas.

1.4 Sistema de Coordenadas Esféricas

O sistema de coordenadas esféricas é apresentado na figura 1.19.

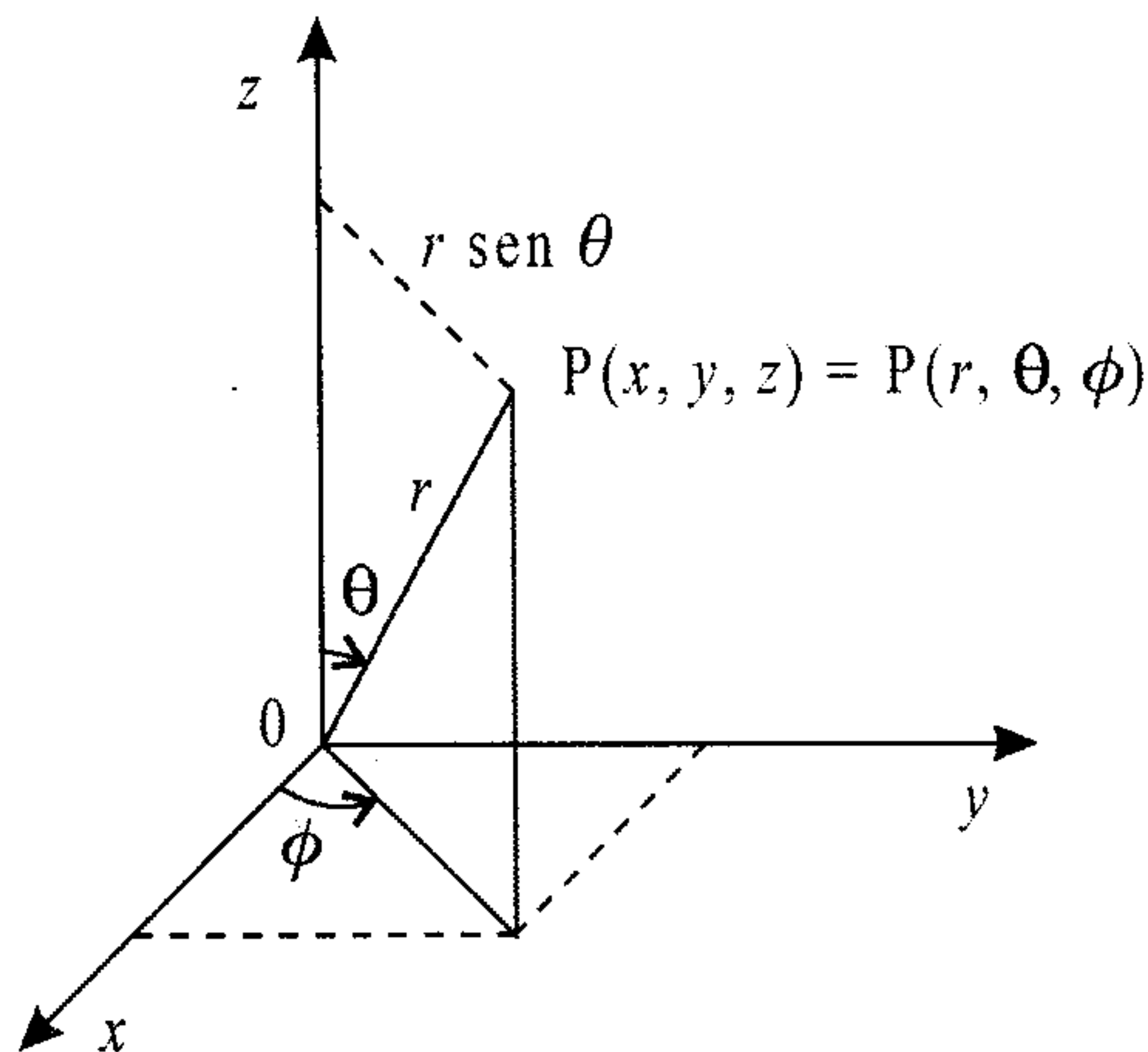



Figura 1.19: Definição das coordenadas do sistema de coordenadas esféricas.

O sistema de coordenadas esféricas consiste em três coordenadas: a distância r entre a origem e o ponto P, e portanto, $r \geq 0$; o ângulo θ que a reta que une a origem ao ponto P faz com o eixo z, sendo o ângulo medido a partir do lado positivo do eixo z, de modo que $0 \leq \theta \leq \pi$; e o ângulo ϕ que a reta que une a origem à projeção do ponto P no plano xy faz com o eixo x. Para ϕ, temos $0 \leq \phi \leq 2\pi$. A correspondência entre as coordenadas esféricas e retangulares é

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \tag{1.35a}$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \tag{1.35b}$$

$$z = r \cos \theta \tag{1.35c}$$

e a relação inversa é

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.36a}$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \tag{1.36b}$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \tag{1.36c}$$

A base das coordenadas esféricas é representada por $\mathcal{E} = \{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}\}$. A relação entre esta base e a base R_3 das coordenadas retangulares pode ser vista na figura 1.20.

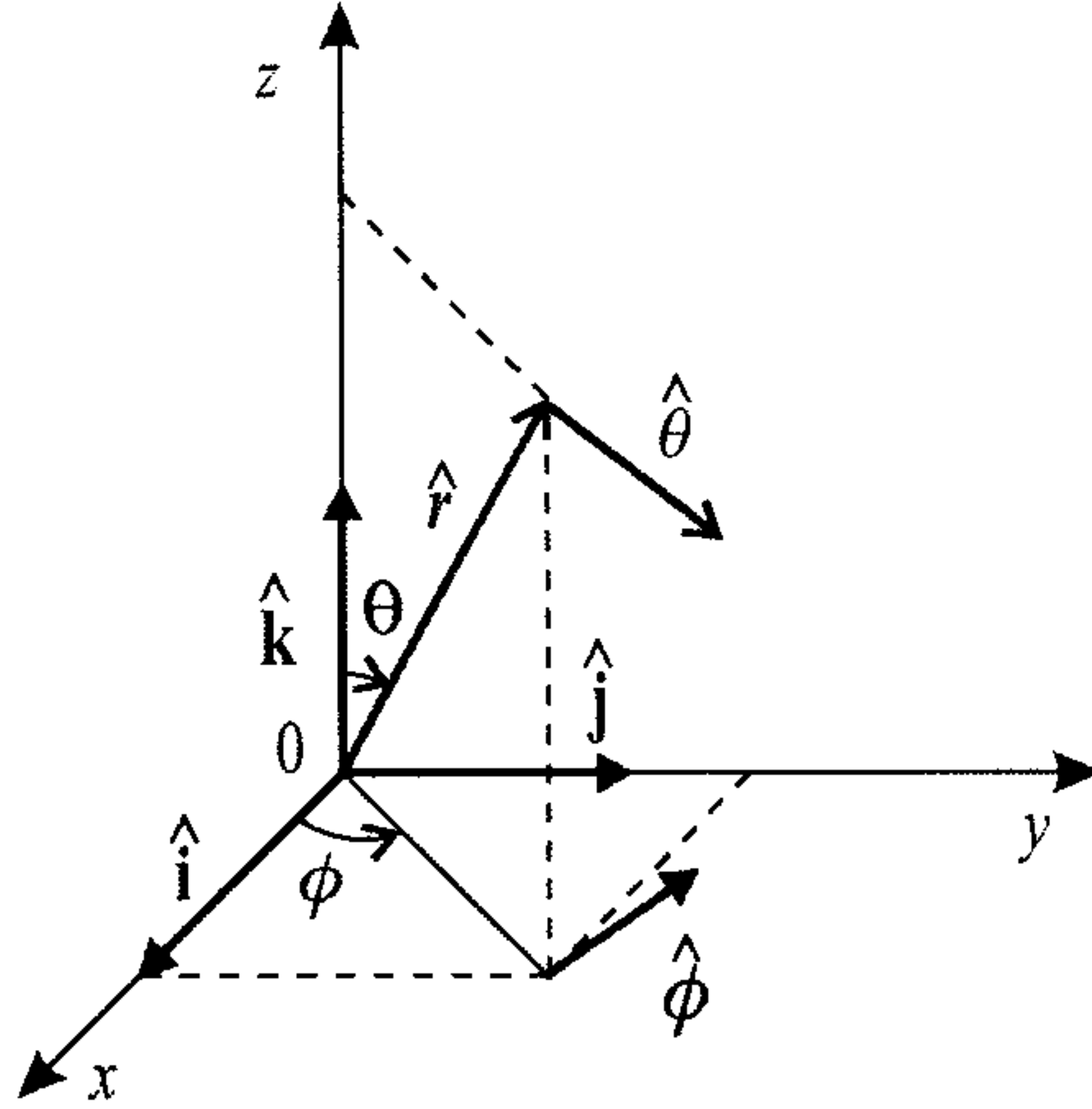



Figura 1.20: Versores das coordenadas do sistema de coordenadas esféricas.

As equações de transformação da base $\mathcal{E}$ para a base R_3 são

$$\hat{\mathbf{r}} = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{k}} \tag{1.37a}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{k}} \tag{1.37b}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{j}} \tag{1.37c}$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{pmatrix}$$

A matriz de transformação para este caso é

$$\mathrm{T}_{\{R_3,\mathcal{E}\}} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix}$$

e, como a transformação é ortogonal, a sua inversa é dada simplesmente por

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix}$$

que resultam em

$$\hat{\mathbf{i}} = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \operatorname{sen}\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{1.38a}$$

$$\hat{\mathbf{j}} = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{1.38b}$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.38c}$$

Em coordenadas esféricas, os produtos escalares são

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = 1 \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = 1 \qquad \hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}} = 1 \tag{1.39a}$$

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = 0 \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = 0 \qquad \hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}} = 0 \tag{1.39b}$$

Os produtos vetoriais ficam

$$\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{r}} = 0 \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}} = 0 \qquad \hat{\boldsymbol{\phi}}\times\hat{\boldsymbol{\phi}} = 0 \tag{1.40a}$$

$$\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}}\times\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{r}} \qquad \hat{\boldsymbol{\phi}}\times\hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.40b}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}\times\hat{\mathbf{r}} = -\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad \hat{\boldsymbol{\phi}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{r}} \qquad \hat{\mathbf{r}}\times\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.40c}$$

As coordenadas esféricas são muito usadas em problemas que apresentam simetrias esféricas.

Após o estudo dos conceitos de vetor e de sistemas de coordenadas, vamos voltar agora à discussão que iniciou este capítulo.

1.5 Grandezas Escalares e Vetoriais

Recordando as proposições do início deste capítulo, verificamos que algumas grandezas necessitam de algo mais do que apenas o valor numérico e a unidade de medida. Assim, as grandezas em Física são divididas em dois grupos: as grandezas **escalares** e as grandezas **vetoriais**. As grandezas escalares ficam completamente definidas quando apenas o seu valor numérico e a unidade de medida são especificados. Já as grandezas vetoriais precisam, além do número e da unidade, de uma orientação em relação a algum sistema de coordenadas, para que essas grandezas possam ser completamente definidas. Isso fica claro no caso da localização da padaria, que envolve uma grandeza vetorial chamada de *posição*. Assim, temos uma definição importante, que é:

Definição 1.2. *A* **posição** *de um certo ponto no espaço é a localização espacial desse ponto em relação a um sistema de coordenadas. Esta grandeza é vetorial, pois é preciso estabelecer, além da distância a que o ponto se situa da origem do sistema de coordenadas (que é o módulo do vetor posição), a direção e o sentido em que essa distância deve ser medida (que são, respectivamente, a direção e o sentido do vetor posição). A posição é representada em geral por $\vec{r}$, que, no sistema de coordenadas retangulares, assume o valor*

$$\vec{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \tag{1.41}$$

como mostra a figura 1.21. Além disso, a posição tem dimensão de comprimento, ou seja, [posição] = L, e, no SI, ela é medida em metros (m).

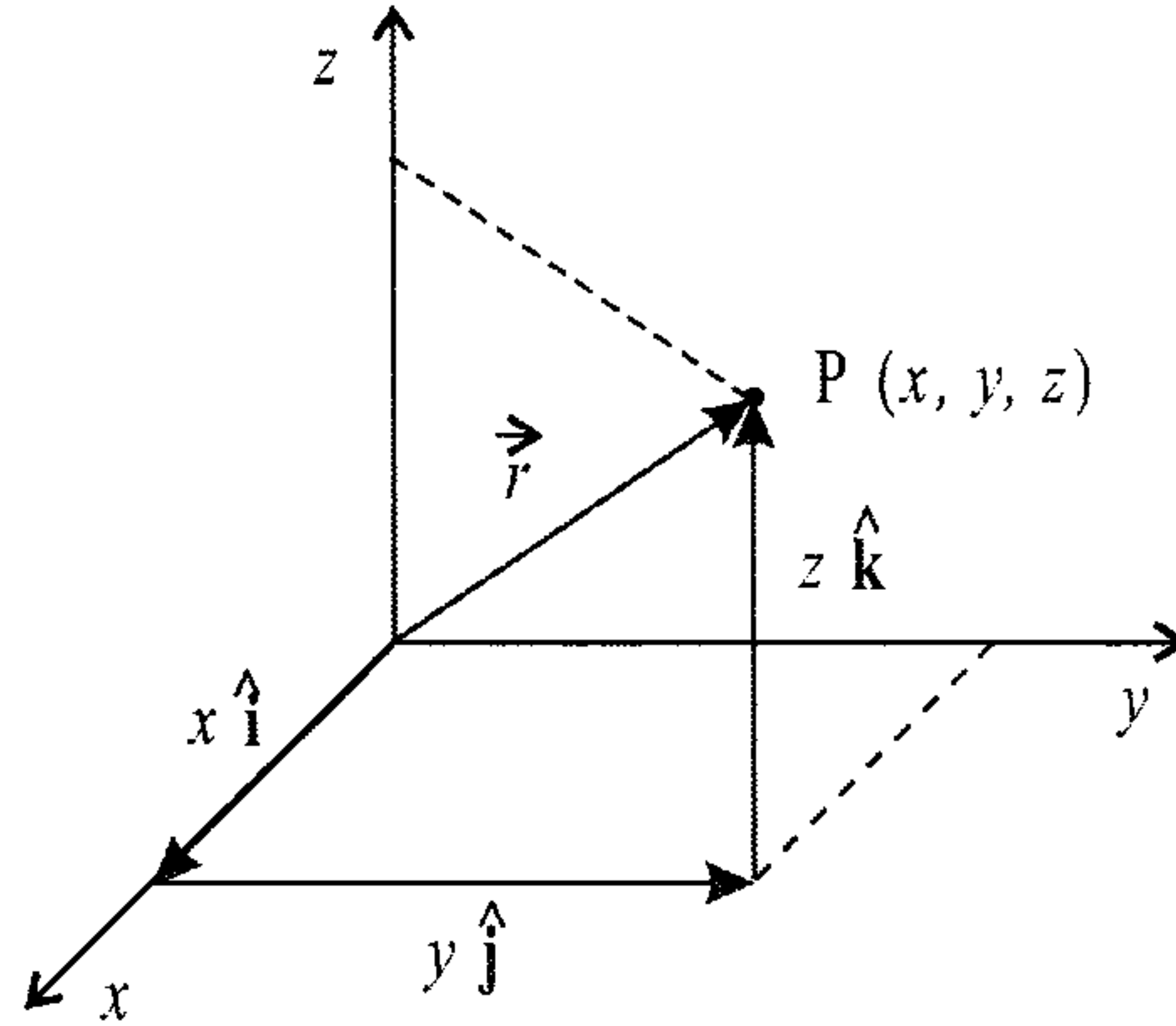



Figura 1.21: Posição de um ponto $P(x, y, z)$ em coordenadas retangulares.

Em coordenadas cilíndricas, a posição de um ponto é representada por

$$\vec{r} = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \tag{1.42}$$

como mostra a figura 1.22, ao passo que, em coordenadas esféricas, a posição de um ponto no espaço é simplesmente

$$\vec{r} = r\hat{\mathbf{r}} \tag{1.43}$$

como ilustra a figura 1.23.

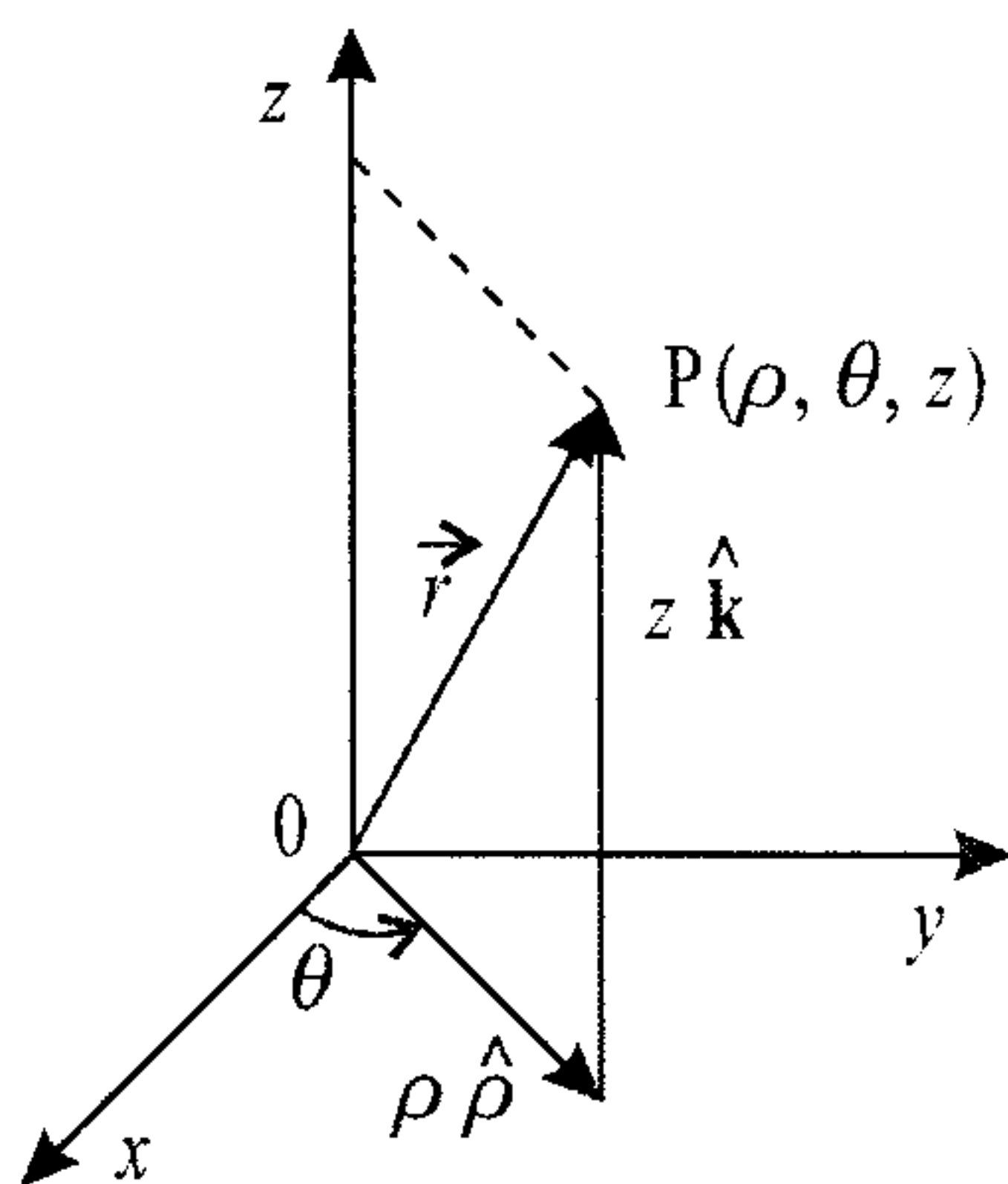



Figura 1.22: Posição de um ponto $P(\rho, \theta, z)$ em coordenadas cilíndricas.

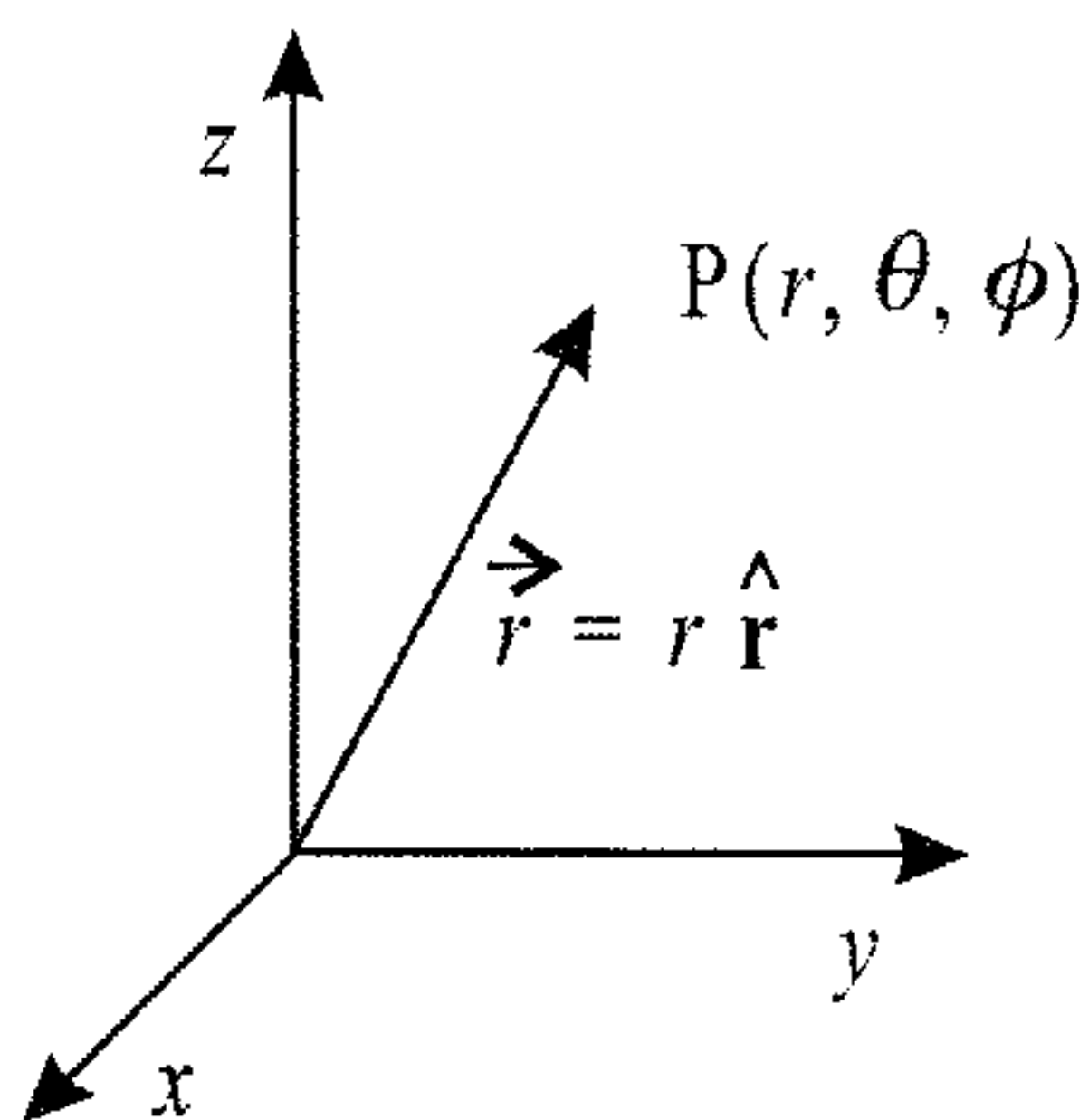



Figura 1.23: Posição de um ponto $P(r, \theta, \phi)$ em coordenadas esféricas.

A tabela 1.1 apresenta alguns exemplos de grandezas escalares e vetoriais importantes.

Quando as grandezas são escalares, as operações matemáticas feitas com elas são bastante simples, porque envolvem apenas a soma, multiplicação, potenciação, etc., de números. Já quando as grandezas são vetoriais, a soma é uma soma vetorial, processo um pouco mais complicado. O produto de duas grandezas vetoriais pode ser escalar ou vetorial, e é sempre necessário escolher uma base para efetuar as operações.

O resultado do produto escalar, por ser um número, é independente da base considerada. Já o produto vetorial tem como resultado um vetor, cujas coordenadas dependem da base escolhida.

Grandezas Escalares	Grandezas Vetoriais
distância percorrida	posição
comprimento	velocidade
tempo	aceleração
temperatura	força
energia	campo elétrico
massa	campo magnético
potência	*momentum* linear
pressão	*momentum* angular
fluxo magnético	torque
corrente elétrica	magnetização

Tabela 1.1: Algumas grandezas físicas escalares e vetoriais.

No entanto, o módulo do vetor que resulta de um produto vetorial independe da base, por ser um número ou escalar.

Além disso, mesmo que duas grandezas sejam medidas na mesma unidade, uma pode ser escalar e a outra, vetorial, e isso tem que ser levado em conta na hora de efetivar cálculos. Assim, voltando ao nosso problema inicial, para chegar na padaria, a pessoa percorre uma distância escalar de $10 + 5 = 15$ m. No entanto, seu deslocamento vetorial (utilizando a equação 1.1) é de apenas $\sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \cong 11,18$ m, menor do que a distância efetivamente percorrida. Um caso que demonstra a grande diferença que existe entre grandezas escalares e vetoriais é o de uma pessoa que sai de um ponto A e anda num círculo de raio R até voltar ao ponto A. Ela percorre uma distância escalar de $C = 2\pi R$, que é o comprimento da circunferência. No entanto, como ela volta ao lugar de onde saiu, seu deslocamento vetorial é nulo.

Tanto as grandezas escalares como as vetoriais possuem derivadas e integrais. Uma grandeza escalar g que depende de uma outra grandeza x é uma função escalar de x e pode ser representada por

$$g = g(x)$$

Essa grandeza pode ser derivada em relação a x quantas vezes se queira (desde que a função e suas derivadas sejam, pelo menos, contínuas por partes), através de

$$\frac{dg}{dx} = g'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{g(x+dx) - g(x)}{dx}$$

Além disso, a integral dessa grandeza é uma função $f(x)$, dada por

$$f(x) = \int g(x)\, dx$$

Do mesmo modo, se $\vec{G}(x)$ é uma grandeza vetorial que depende de x, ou, de outro modo, uma função vetorial de x, então sua derivada é

$$\frac{d\vec{G}}{dx} = \vec{G}\,'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{\vec{G}(x+dx) - \vec{G}(x)}{dx}$$

e todas as propriedades válidas para a derivada de funções escalares também permanecem para as funções vetoriais. Em especial, temos

$$\frac{d}{dx}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dx} + \frac{d\vec{B}}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dx} + \frac{d\vec{A}}{dx} \cdot \vec{B}$$
$$\frac{d}{dx}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dx} + \frac{d\vec{A}}{dx} \times \vec{B}$$
$$\frac{d}{dx}(A\vec{B}) = A\frac{d\vec{B}}{dx} + \frac{dA}{dx}\vec{B}$$

Além de deriváveis, as funções vetoriais também podem ser integradas. Por exemplo, a integral de uma função $\vec{A} = A_x\, \hat{\mathbf{i}} + A_y\, \hat{\mathbf{j}} + A_z\, \hat{\mathbf{k}}$ num volume V é

$$\int_V \vec{A}\, dV = \hat{\mathbf{i}} \int_V A_x\, dV + \hat{\mathbf{j}} \int_V A_y\, dV + \hat{\mathbf{k}} \int_V A_k\, dV$$

ou seja, integram-se as componentes da função vetorial, separadamente.

Algumas das integrais que aparecem freqüentemente em Física envolvem o elemento de comprimento de arco (integrais de linha), o elemento de área (integrais de superfície) e o elemento de volume (integrais de volume). Por causa disso, conhecer essas grandezas é muito importante. A figura 1.24 apresenta um elemento de volume dV em coordenadas retangulares, formado por um paralelepípedo de lados dx, dy e dz.

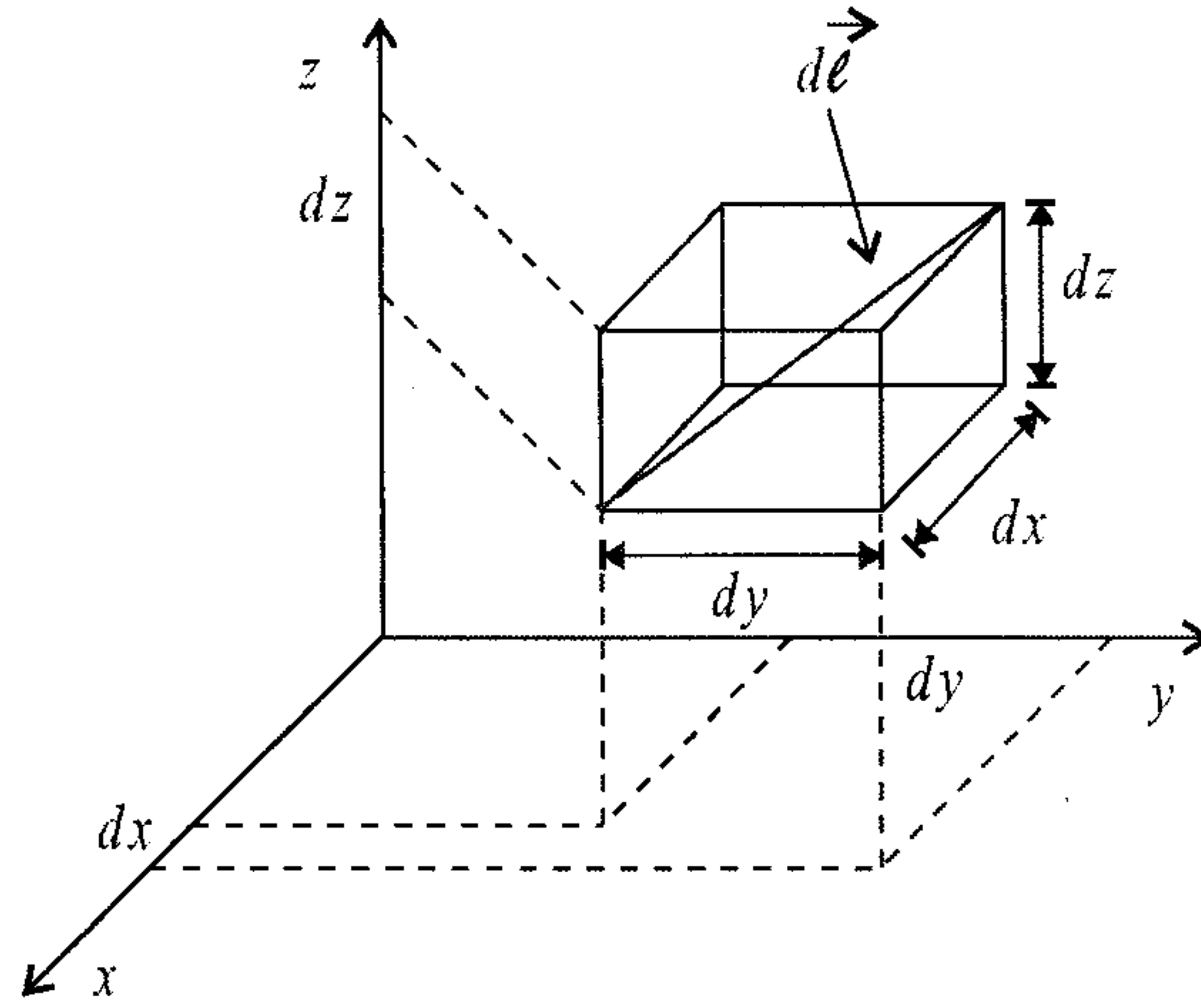



Figura 1.24: Elemento de volume dV em coordenadas retangulares. A diagonal do paralelepípedo é o elemento de comprimento de arco.

Da figura, percebemos que o elemento de volume em coordenadas retangulares é dado por

$$dV = dx\,dy\,dz$$

enquanto o elemento de comprimento de arco (que é uma grandeza vetorial) é dado pela diagonal do paralelepípedo, ou seja,

$$d\vec{\ell} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}} \tag{1.44}$$

cujo quadrado é

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

O elemento de área depende do plano em que a área é calculada. Assim, para uma área nos planos xy, xz e yz, os elementos de área são, respectivamente,

$$dA = dx\,dy \qquad\qquad dA = dx\,dz \qquad\qquad dA = dy\,dz$$

Em coordenadas cilíndricas, também consideramos um elemento de volume dV na forma de um paralelepípedo. No entanto, esse paralelepípedo é

formado por lados curvos, como mostra a figura 1.25. Note que essa figura foi bastante exagerada, para facilitar a visualização das grandezas definidas.

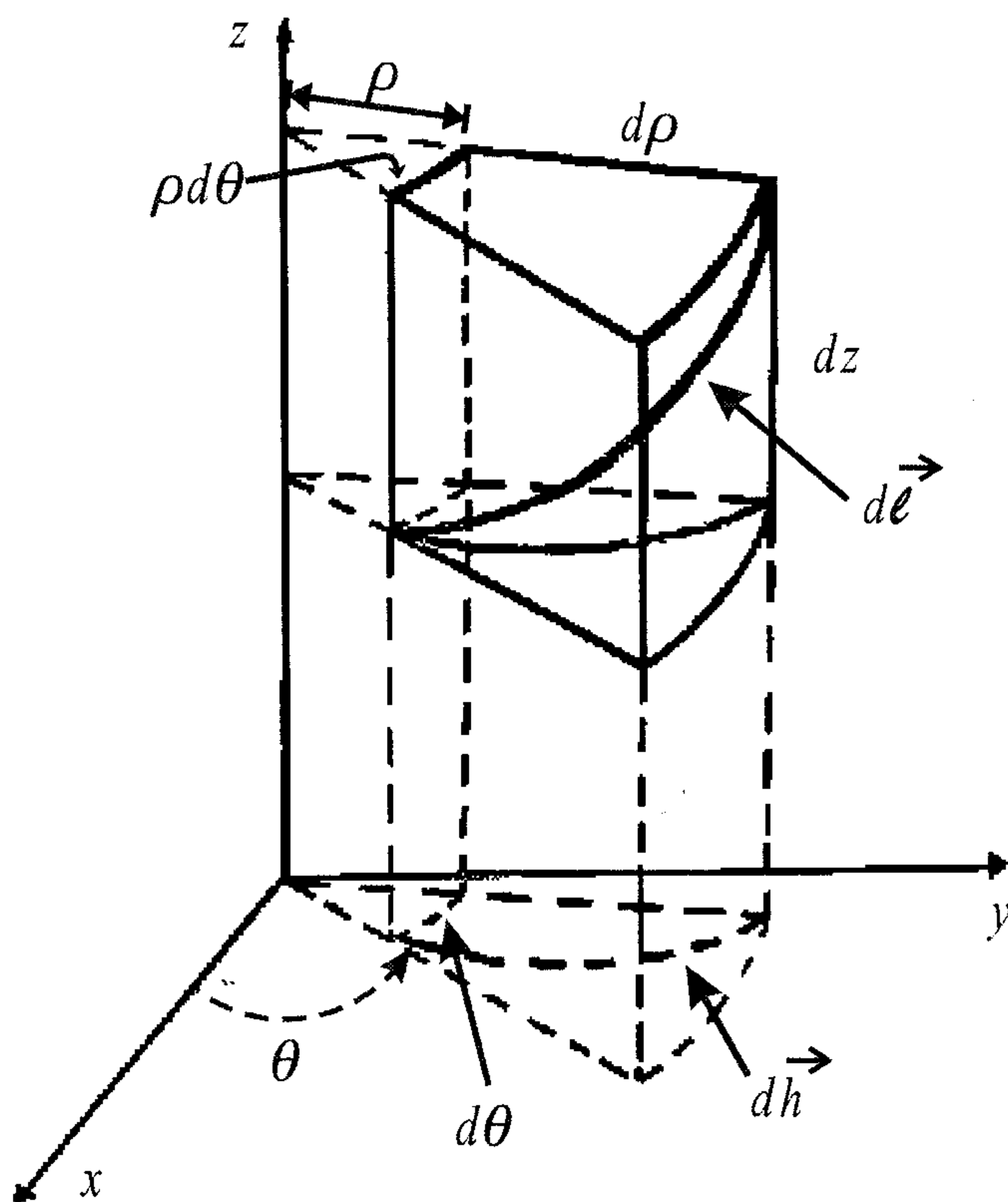



Figura 1.25: Elemento de volume dV em coordenadas cilíndricas. A "diagonal" do "paralelepípedo" é o elemento de comprimento de arco.

O elemento de volume é formado pelos lados $d\rho$, dz e pelo arco gerado pela rotação dθ feita com ρ e z constantes. Assim, esse arco vale

$$\text{arco} = \rho\, d\theta$$

e vemos que o elemento de volume dV em coordenadas cilíndricas é

$$dV = d\rho\, \rho d\theta\, dz$$

ou

$$dV = \rho d\rho \, d\theta \, dz \tag{1.45}$$

O elemento de arco no plano paralelo ao xy é o elemento de arco em coordenadas polares, representado pelo $d\vec{h}$. Esse vetor vale

$$d\vec{h} = d\rho \, \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\theta \, \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

ao passo que o elemento de comprimento de arco em coordenadas cilíndricas é a "diagonal" do "paralelepípedo", ou seja,

$$d\vec{\ell} = d\rho \, \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\theta \, \hat{\boldsymbol{\theta}} + dz \, \hat{\mathbf{k}} \tag{1.46}$$

Os módulos ao quadrado são

$$dh^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$
$$d\ell^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2$$

e, como no caso anterior, os elementos de área dependem da verificação de qual é a coordenada que fica constante. Num plano paralelo ao plano xy, z é constante, e o elemento de área fica

$$dA = \rho d\rho \, d\theta$$

que é também o elemento de área em coordenadas polares. Quando ρ é constante, o elemento de área torna-se

$$dA = \rho d\theta \, dz$$

ao passo que, no caso de θ fixo, o elemento de área é

$$dA = d\rho \, dz$$

Por fim, em coordenadas esféricas o elemento de volume dV também é um paralelepípedo formado por lados "curvos", como mostra a figura 1.26, que também foi bastante exagerada, para facilitar a visualização das grandezas definidas. Neste caso, um dos lados do "paralelepípedo" é definido por dr, e os outros dois lados são arcos curvos. O arco que fazemos considerando r e ϕ fixos, com θ variando de $d\theta$, é um arco de circunferência de raio r, e assim, este lado vale

$$1^{\underline{o}} \text{ arco} = r \, d\theta$$

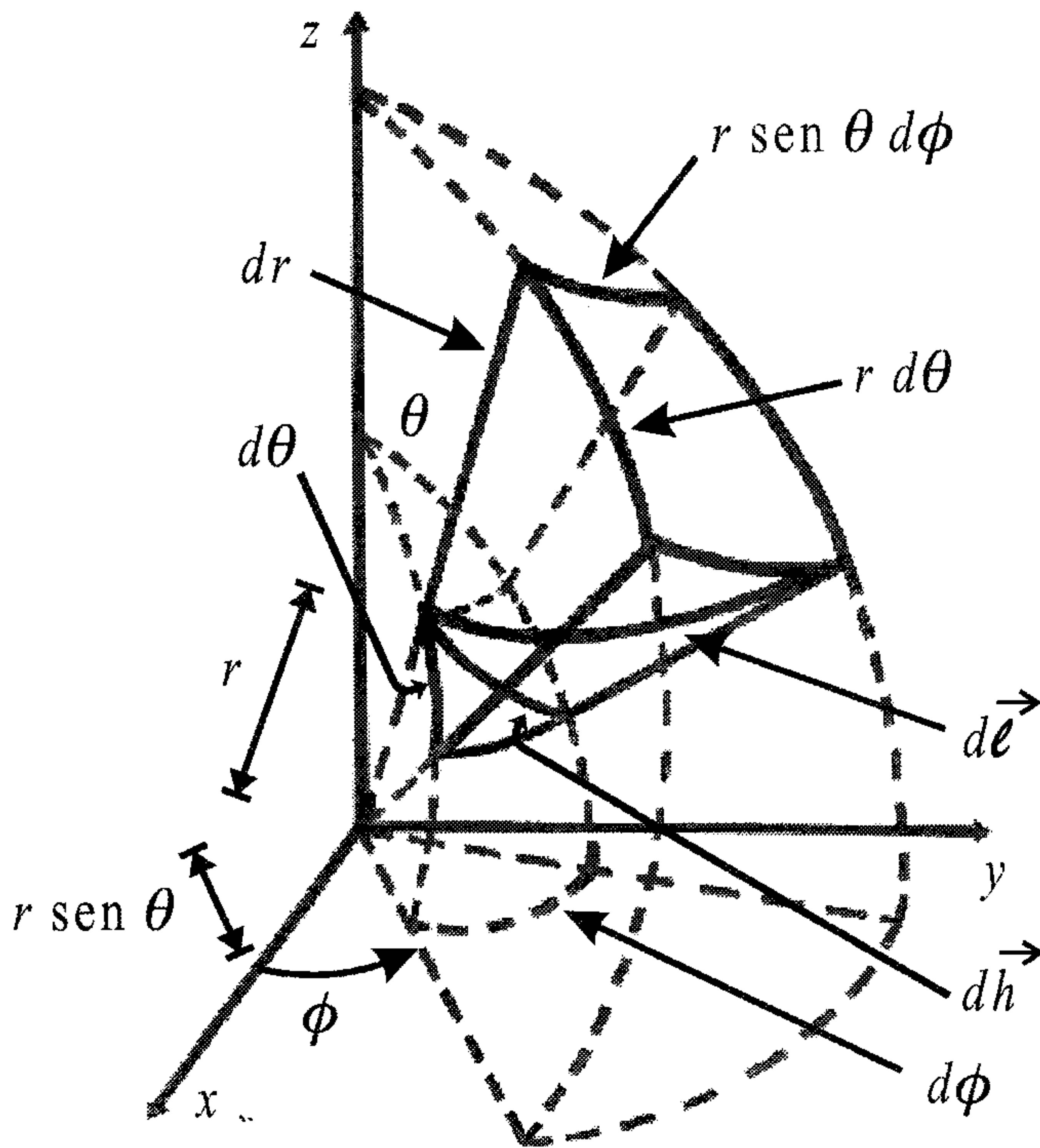



Figura 1.26: Elemento de volume dV em coordenadas esféricas. A "diagonal" do "paralelepípedo" é o elemento de comprimento de arco.

O outro arco é obtido quando r e θ são fixos, e com ϕ variando de $d\phi$. Neste caso, o lado é um arco de circunferência, mas o raio dessa circunferência é dado pela projeção de r num plano paralelo ao plano xy, e assim, esse raio vale $r \operatorname{sen} \theta$. Este arco fica, então,

$$2^{\underline{o}} \text{ arco} = r \operatorname{sen} \theta \, d\phi$$

e o elemento de volume dV torna-se

$$dV = dr \, r d\theta \, r \operatorname{sen} \theta d\phi$$

ou

$$dV = r^2 \operatorname{sen} \theta dr \, d\theta \, d\phi \tag{1.47}$$

O comprimento de arco para r fixo (por exemplo, na superfície de uma esfera) é dado por $d\vec{h}$, isto é,

$$d\vec{h} = rd\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\text{sen}\,\theta d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

ao passo que, em geral, com r podendo variar, temos

$$d\vec{\ell} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\text{sen}\,\theta d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{1.48}$$

Os módulos quadrados destas grandezas são

$$\begin{aligned} dh^2 &= r^2 d\theta^2 + r^2\,\text{sen}^2\,\theta\,d\phi^2 \\ d\ell^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\,\text{sen}^2\,\theta\,d\phi^2 \end{aligned}$$

O elemento de área para r fixo é o elemento de área na superfície de uma esfera, e ele vale

$$dA = rd\theta\, r\,\text{sen}\,\theta\,d\phi = r^2\,\text{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi \tag{1.49}$$

Quando θ ou ϕ são fixos, os elementos de área valem

$$dA = \begin{cases} r\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\phi, & \theta \text{ fixo} \\ rdr\,d\theta, & \phi \text{ fixo} \end{cases}$$

Existem algumas combinações de derivadas e de integrais que são de interesse especial e que recebem nomes especiais. O operador diferencial nabla (∇) representa um conjunto de diferenciações que, em coordenadas retangulares, tem a seguinte forma:

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.50}$$

Quando esse operador age sobre uma função escalar Φ, obtemos uma função vetorial, que é conhecida como gradiente de Φ, representada por

$$\nabla\Phi = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{1.51}$$

Essa função vetorial tem várias propriedades interessantes. Fazendo o produto escalar entre o gradiente de Φ e o elemento de arco em retangulares, dado pela equação 1.44, temos

$$\nabla\Phi \cdot d\vec{\ell} = \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right] \cdot \left[dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}\right]$$
$$\nabla\Phi \cdot d\vec{\ell} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz$$

e, lembrando que

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz$$

é a diferencial total de Φ, obtemos

$$d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell} \tag{1.52}$$

que vale para qualquer sistema de coordenadas, não somente em retangulares Da expressão acima, percebemos que, se $d\vec{\ell}$ estiver ao longo da superfíci definida por $\Phi = c$, sendo c uma constante, $\nabla\Phi$ deve ser perpendicular a d e à superfície, pois se Φ é constante, $d\Phi = 0$, e, como em geral nem $d\vec{\ell}$ ner $\nabla\Phi$ são nulos, temos

$$d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell} = 0$$

que ocorre se $d\vec{\ell} \perp \nabla\Phi$, pois neste caso temos $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ (θ é o ângul entre eles). Ou seja, $\nabla\Phi$ é normal à superfície definida por $\Phi = c$.

A maior variação de Φ ocorre quando $d\vec{\ell} \parallel \nabla\Phi$, pois neste caso obtemc

$$d\Phi_{\text{max}} = \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell} = |\nabla\Phi|\ d\ell\cos 0 = |\nabla\Phi|\ d\ell$$

que pode ser escrito de outra forma como

$$\left(\frac{d\Phi}{d\ell}\right)_{\text{max}} = |\nabla\Phi|$$

ou seja, o vetor $\nabla\Phi$ especifica a direção da maior taxa de variação da funçã Φ, e seu módulo mede o valor dessa taxa de variação. Para obter o valor d taxa de variação numa certa direção, devemos considerar um vetor unitári $\hat{n}$ nessa direção e fazer o produto escalar

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nabla\Phi \cdot \hat{n}$$

que é conhecido como derivada dirigida ou direcional na direção $\hat{n}$.

Quando a função é vetorial, o operador ∇ pode agir de duas formas: através de um produto escalar ou de um produto vetorial. No caso do produto escalar, considerando que $\vec{A}$ é uma função vetorial, obtemos o *divergente* de $\vec{A}$, que é uma função escalar. Em coordenadas retangulares, considerando $\vec{A} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}$, temos

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}\right]$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.53}$$

Existe uma identidade matemática importante que envolve o divergente de uma função vetorial, chamada *Teorema do Divergente*, ou também, *Teorema de Gauss*. Essa identidade é

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B}\, dV = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA \tag{1.54}$$

ou seja, a integral do divergente de uma função vetorial $\vec{B}$, dentro de um volume V, é igual à integral de superfície da grandeza $\vec{B} \cdot \hat{n}$ feita sobre toda a área S que delimita esse volume, onde $\hat{n}$ é um vetor normal à superfície em cada ponto [8]. Essa integral de superfície também é conhecida como o *fluxo de $\vec{B}$ através da área S* (veja a figura 1.27, para esclarecer os termos).

$\hat{n}\,dA$

$\vec{B}$

volume V

superfície S fechada

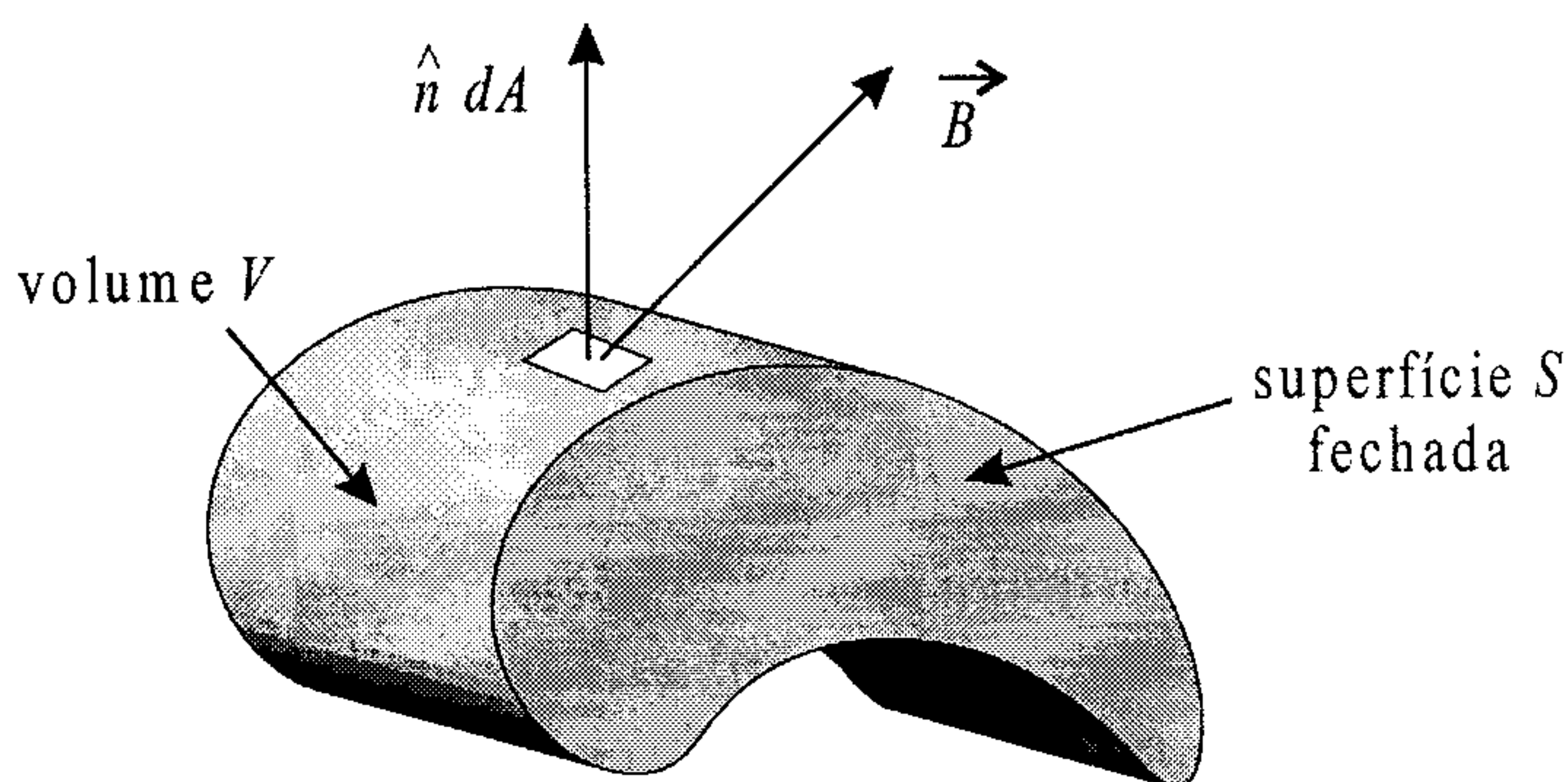



Figura 1.27: Definição dos termos do teorema de Gauss.

[8] $\vec{B} \cdot \hat{n}$ é a componente normal à superfície S do vetor $\vec{B}$.

No caso do produto vetorial, temos o *rotacional* de $\vec{A}$, dado por $\nabla \times \vec{A}$, que, em retangulares, fica

$$\nabla \times \vec{A} = \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}\right]$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{k}} \quad (1.55)$$

Para o rotacional, existe o *Teorema de Stokes*, que relaciona uma integral de superfície com uma integral de linha, e que se escreve

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n}\, dA = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \quad (1.56)$$

onde os termos são apresentados na figura 1.28.

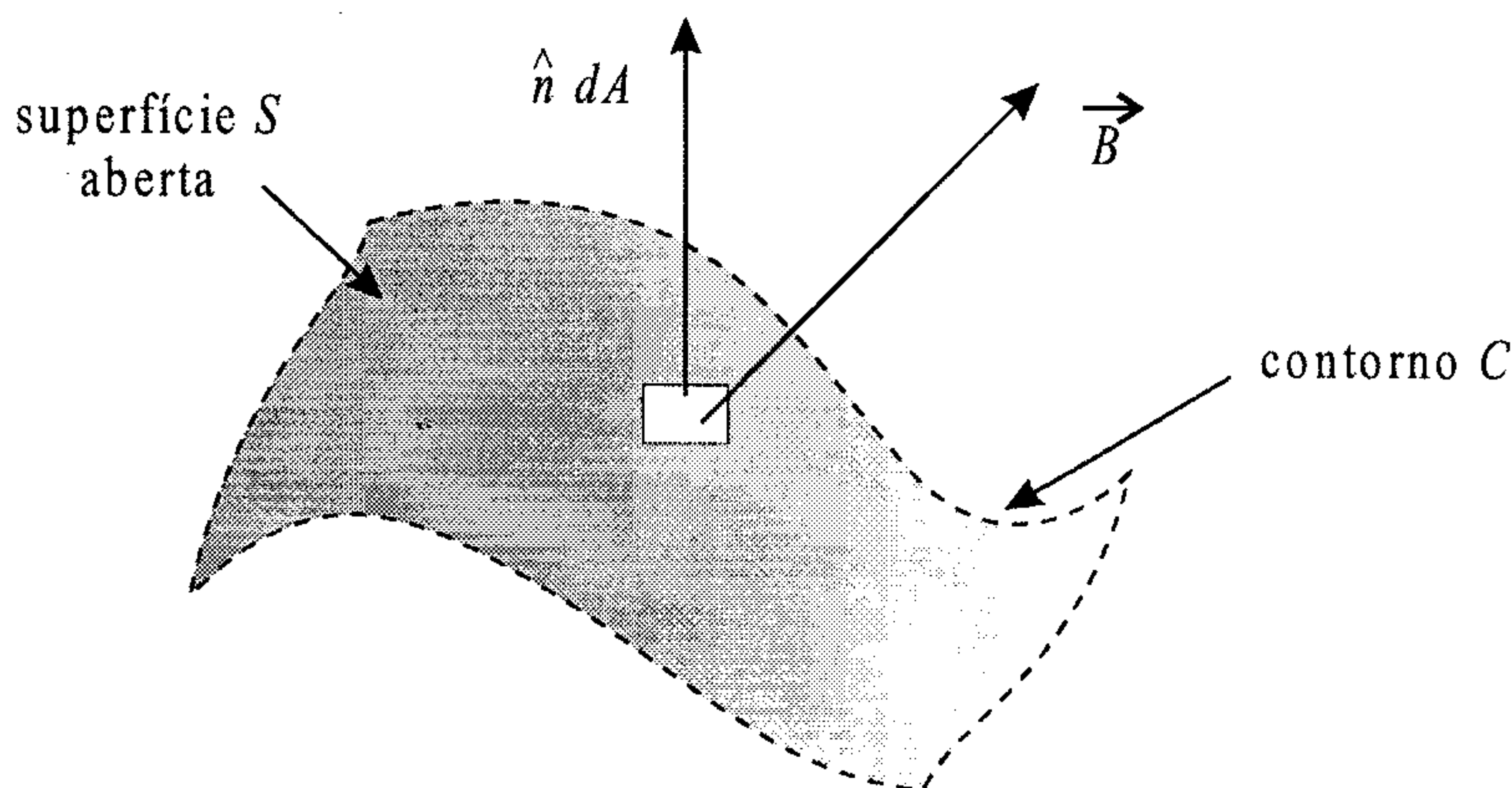



Figura 1.28: Definição dos termos do teorema de Stokes.

O teorema de Stokes estabelece que a integral sobre toda uma superfície S aberta da componente normal a esta superfície do rotacional de uma função vetorial $\vec{B}$ [9] é dada pela integral de linha $\vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ sobre todo o contorno C que delimita a superfície S. Essa integral é chamada de *circuitação de $\vec{B}$ ao longo de C*. Note que no teorema de Gauss a superfície S é fechada e define

[9] Já que $\hat{n}$ é o vetor normal à superfície em cada ponto, $(\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n}$ é a componente normal de $\nabla \times \vec{B}$.

um volume V. Já no teorema de Stokes a superfície S é aberta, para que exista um contorno C. Esses teoremas são muito úteis em Cálculo Vetorial, Mecânica, Eletromagnetismo e outras áreas de Física.

Além do operador ∇, existe um outro de grande importância denominado operador Laplaciano, que é o resultado do produto escalar de ∇ com ele mesmo. Esse operador, que é representado por $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$, vale, em coordenadas retangulares,

$$\nabla \cdot \nabla = \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

ou seja,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.57}$$

que, quando aplicado numa função escalar Φ, resulta em

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Para uma dedução completa das expressões acima que envolvem o operador ∇, o gradiente, o divergente, o rotacional e o Laplaciano ∇^2 nos sistemas de coordenadas retangulares, cilíndricas e esféricas, consulte o apêndice B.

Existem algumas propriedades importantes relativas ao gradiente, divergente, rotacional ou Laplaciano de funções. Algumas delas são

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0 \tag{1.58a}$$

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0 \tag{1.58b}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \tag{1.58c}$$

$$\nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi) \tag{1.58d}$$

$$\nabla \cdot (\Phi\vec{A}) = (\nabla\Phi) \cdot \vec{A} + \Phi(\nabla \cdot \vec{A}) \tag{1.58e}$$

$$\nabla \times (\Phi\vec{A}) = (\nabla\Phi) \times \vec{A} + \Phi(\nabla \times \vec{A}) \tag{1.58f}$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \tag{1.58g}$$

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} - \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) \tag{1.58h}$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} \tag{1.58i}$$

que são válidas para quaisquer funções escalares Φ e Ψ e vetoriais $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Vamos demonstrar algumas. As outras são deixadas como exercício (veja o exercício 1.7). De início, vejamos a equação 1.58a.

Demonstração. A equação 1.58a nos diz que

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$$

Vamos considerar que $\vec{A} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} + A_k\,\hat{\mathbf{k}}$ (em todas as provas, não apenas nesta). Assim, usando a equação 1.55, temos

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

e então,

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{k}}\right]$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x}$$

Agora, podemos trocar a ordem em que as derivadas são feitas, e assim, temos

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} \qquad \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y}$$

e, portanto,

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$$

□

Demonstração. Vamos provar a relação 1.58b, que é

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0$$

O gradiente é dado pela expressão 1.51

$$\nabla\Phi = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

e, portanto,

$$\nabla\times\nabla\Phi = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\nabla\Phi = \hat{\mathbf{i}}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y}\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}\right)$$

Novamente, podemos trocar a ordem das derivadas, e assim,

$$\nabla\times\nabla\Phi = \hat{\mathbf{i}}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)$$

$$\nabla\times\nabla\Phi = 0$$

□

Demonstração. Por último, provamos a relação 1.58h,

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} - \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})$$

Vamos considerar que $\vec{B} = B_x\,\hat{\mathbf{i}} + B_y\,\hat{\mathbf{j}} + B_z\,\hat{\mathbf{k}}$. Assim,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

e

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\left(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\right)$$

ou

$$\begin{aligned}\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = {}& \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}\left(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\right) \\ & + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}\left(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\right) \\ & + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\left(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\right) \qquad (1.59)\end{aligned}$$

Agora, calculamos

$$\vec{A}\cdot\nabla = \left(A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

$$\vec{A}\cdot\nabla = A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z}$$

e assim,

$$(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} = \left[A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z}\right]\left(B_x\,\hat{\mathbf{i}} + B_y\,\hat{\mathbf{j}} + B_z\,\hat{\mathbf{k}}\right)$$

ou

$$\begin{aligned}(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} = A_x\frac{\partial}{\partial x}\left(B_x\,\hat{\mathbf{i}} + B_y\,\hat{\mathbf{j}} + B_z\,\hat{\mathbf{k}}\right)\\ + A_y\frac{\partial}{\partial y}\left(B_x\,\hat{\mathbf{i}} + B_y\,\hat{\mathbf{j}} + B_z\,\hat{\mathbf{k}}\right)\\ + A_z\frac{\partial}{\partial z}\left(B_x\,\hat{\mathbf{i}} + B_y\,\hat{\mathbf{j}} + B_z\,\hat{\mathbf{k}}\right)\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} = \left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}}\\ + \left(A_x\frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}}\\ + \left(A_x\frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{k}}\end{aligned} \quad (1.60)$$

Para a expressão $\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})$, utilizamos a equação 1.55 para $\vec{B}$, ou seja,

$$\nabla\times\vec{B} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

e, portanto,

$$\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) = \begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ A_x & A_y & A_z\\ \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} & \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}\end{vmatrix}$$

ou

$$\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) = \left[A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)-A_z\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\right]\hat{\mathbf{i}}$$
$$+\left[A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)-A_x\left(\frac{\partial B_x}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)\right]\hat{\mathbf{j}}$$
$$+\left[A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)-A_y\left(\frac{\partial B_y}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)\right]\hat{\mathbf{k}}$$

ou ainda,

$$\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) = \left[A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}-A_y\frac{\partial B_y}{\partial x}-A_z\frac{\partial B_z}{\partial x}\right]\hat{\mathbf{i}}$$
$$+\left[A_z\frac{\partial B_y}{\partial z}+A_x\frac{\partial B_y}{\partial x}-A_z\frac{\partial B_z}{\partial y}-A_x\frac{\partial B_x}{\partial y}\right]\hat{\mathbf{j}}$$
$$+\left[A_x\frac{\partial B_z}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_z}{\partial y}-A_x\frac{\partial B_x}{\partial z}-A_y\frac{\partial B_y}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{k}}$$

Vamos subtrair esta expressão da equação 1.60.

$$(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}-\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) =$$
$$\left[A_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}-A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}-A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial x}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial x}\right]\hat{\mathbf{i}}$$
$$+\left[A_x\frac{\partial B_y}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_y}{\partial z}-A_z\frac{\partial B_y}{\partial z}-A_x\frac{\partial B_y}{\partial x}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial y}+A_x\frac{\partial B_x}{\partial y}\right]\hat{\mathbf{j}}$$
$$+\left[A_x\frac{\partial B_z}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_z}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}-A_x\frac{\partial B_z}{\partial x}-A_y\frac{\partial B_z}{\partial y}+A_x\frac{\partial B_x}{\partial z}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{k}}$$

ou

$$(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}-\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) = \left[A_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial x}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial x}\right]\hat{\mathbf{i}}$$
$$+\left[A_x\frac{\partial B_x}{\partial y}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial y}\right]\hat{\mathbf{j}}+\left[A_x\frac{\partial B_x}{\partial z}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial z}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{k}}$$

Para obter a expressão de $(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})$, é suficiente considerar a equação acima e intercambiar $\vec{A}$ por $\vec{B}$, e vice-versa, ou seja,

$$\begin{aligned}(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) = & \left[B_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+B_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+B_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\hat{\mathbf{i}} \\ & +\left[B_x\frac{\partial A_x}{\partial y}+B_y\frac{\partial A_y}{\partial y}+B_z\frac{\partial A_z}{\partial y}\right]\hat{\mathbf{j}} \\ & +\left[B_x\frac{\partial A_x}{\partial z}+B_y\frac{\partial A_y}{\partial z}+B_z\frac{\partial A_z}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

E agora, somando as duas equações, temos

$$\begin{aligned}&(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}-\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) = \\ &\left[A_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial x}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial x}+B_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+B_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+B_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\hat{\mathbf{i}} \\ &+\left[A_x\frac{\partial B_x}{\partial y}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial y}+B_x\frac{\partial A_x}{\partial y}+B_y\frac{\partial A_y}{\partial y}+B_z\frac{\partial A_z}{\partial y}\right]\hat{\mathbf{j}} \\ &+\left[A_x\frac{\partial B_x}{\partial z}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial z}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}+B_x\frac{\partial A_x}{\partial z}+B_y\frac{\partial A_y}{\partial z}+B_z\frac{\partial A_z}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}&(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}-\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) = \\ &\left[A_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+B_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial x}+B_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial x}+B_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\hat{\mathbf{i}} \\ &+\left[A_x\frac{\partial B_x}{\partial y}+B_x\frac{\partial A_x}{\partial y}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial y}+B_y\frac{\partial A_y}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial y}+B_z\frac{\partial A_z}{\partial y}\right]\hat{\mathbf{j}} \\ &+\left[A_x\frac{\partial B_x}{\partial z}+B_x\frac{\partial A_x}{\partial z}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial z}+B_y\frac{\partial A_y}{\partial z}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}+B_z\frac{\partial A_z}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Como

$$\frac{d}{dr}(ab)=a\frac{db}{dr}+b\frac{da}{dr}$$

as derivadas acima podem ser reescritas como

$$
\begin{aligned}
(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} - \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) = \\
\left[\frac{\partial A_x B_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y B_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z B_z}{\partial x}\right]\hat{\mathbf{i}} \\
+\left[\frac{\partial A_x B_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y B_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z B_z}{\partial y}\right]\hat{\mathbf{j}} \\
+\left[\frac{\partial A_x B_x}{\partial z} + \frac{\partial A_y B_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z B_z}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} - \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) = \\
\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}\left(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\right) \\
+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}\left(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\right) \\
+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\left(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\right)
\end{aligned}
$$

e, lembrando a equação 1.59, obtemos, finalmente,

$$
(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} - \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})
$$

□

Além das propriedades diferenciais 1.58, existem relações integrais que podem ser obtidas através dos teoremas de Gauss e de Stokes (equações 1.54 e 1.56), as mais importantes das quais são as *Identidades de Green.* A *primeira identidade de Green* é

$$
\int_V \left(\Psi\nabla^2\Phi + \nabla\Phi\cdot\nabla\Psi\right) dV = \oint_S \Phi\nabla\Psi\cdot\hat{n}\, dA \tag{1.61}
$$

e a *segunda identidade de Green* é

$$
\int_V \left(\Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi\right) dV = \oint_S \left(\Psi\nabla\Phi - \Phi\nabla\Psi\right)\cdot\hat{n}\, dA \tag{1.62}
$$

conhecida também como *Teorema de Green.* As demonstrações são dadas abaixo.

Demonstração. Para provar a primeira identidade de Green, equação 1.61, consideramos o vetor

$$\vec{A} = \Phi\nabla\Psi$$

e calculamos seu divergente, através da expressão 1.58e, que é

$$\nabla \cdot (\Phi\vec{A}) = (\nabla\Phi) \cdot \vec{A} + \Phi(\nabla \cdot \vec{A})$$

Assim, obtemos

$$\nabla \cdot (\Phi\nabla\Psi) = (\nabla\Phi) \cdot \nabla\Psi + \Phi(\nabla \cdot \nabla\Psi)$$

ou

$$\nabla \cdot (\Phi\nabla\Psi) = \nabla\Phi \cdot \nabla\Psi + \Phi\nabla^2\Psi$$

O teorema do divergente 1.54 é

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B}\, dV = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA$$

e assim, obtemos, para o vetor $\vec{A}$ definido acima,

$$\int_V \nabla \cdot (\Phi\nabla\Psi)\, dV = \oint_S (\Phi\nabla\Psi) \cdot \hat{n}\, dA$$

ou

$$\int_V \left(\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi + \Phi\nabla^2\Psi\right) dV = \oint_S \Phi\nabla\Psi \cdot \hat{n}\, dA$$

que é a primeira identidade de Green, equação 1.61.

Para provar o teorema de Green 1.62, consideramos o vetor

$$\vec{B} = \Psi\nabla\Phi - \Phi\nabla\Psi$$

e calculamos o seu divergente, mediante a expressão 1.58e, considerando $\vec{A} = \nabla\Phi$ ou $\vec{A} = \nabla\Psi$, conforme o caso. Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{B} &= \nabla \cdot \left(\Psi\nabla\Phi - \Phi\nabla\Psi\right) \\
&= \nabla\Psi \cdot \nabla\Phi + \Psi\nabla \cdot \nabla\Phi - \nabla\Phi \cdot \nabla\Psi - \Phi\nabla \cdot \nabla\Psi \\
\nabla \cdot \vec{B} &= \Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi \qquad (1.63)
\end{aligned}$$

Agora, utilizamos o teorema do divergente, isto é,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B}\, dV = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA$$

que fica, para a função $\vec{B}$ definida acima,

$$\int_V \nabla \cdot \left(\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi\right) dV = \oint_S \left(\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi\right) \cdot \hat{n}\, dA$$

ou, utilizando a equação 1.63, achamos

$$\int_V \left(\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi\right) dV = \oint_S \left(\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi\right) \cdot \hat{n}\, dA$$

que é o teorema de Green. □

Algumas outras identidades importantes são dadas abaixo.

$$\int_V \nabla \Phi\, dV = \oint_S \Phi\, \hat{n}\, dA \tag{1.64a}$$

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{C} + \vec{C} \cdot \nabla)\vec{B}\, dV = \oint_S \vec{B}(\vec{C} \cdot \hat{n})\, dA \tag{1.64b}$$

$$\int_S \nabla \times \vec{B}\, dV = \oint_S \hat{n} \times \vec{B}\, dA \tag{1.64c}$$

$$\int_S (\hat{n} \times \nabla) \times \vec{B}\, dA = \oint_C d\vec{\ell} \times \vec{B} \tag{1.64d}$$

$$\int_S \hat{n} \times \nabla \Phi\, dA = \oint_C \Phi\, d\vec{\ell} \tag{1.64e}$$

Vamos demonstrar três destas equações. As outras ficam como exercício. Iniciamos com a expressão 1.64a.

Demonstração. Para provar a relação 1.64a, utilizamos o teorema do divergente 1.54,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B}\, dV = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA$$

considerando que $\vec{B} = \vec{C}\Phi$, onde $\vec{C}$ é um vetor constante. Assim, temos

$$\int_V \nabla \cdot \left(\vec{C}\Phi\right) dV = \oint_S \left(\vec{C}\Phi\right) \cdot \hat{n}\, dA$$

A propriedade 1.58e nos diz que

$$\nabla \cdot (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \cdot \vec{A} + \Phi(\nabla \cdot \vec{A})$$

ou, no nosso caso,

$$\nabla \cdot (\Phi \vec{C}) = (\nabla \Phi) \cdot \vec{C} + \Phi(\nabla \cdot \vec{C})$$

Como $\vec{C}$ é constante, sua divergência se anula, pois cada componente de $\vec{C}$ é constante, e assim,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{C} &= \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left(C_x \hat{\mathbf{i}} + C_y \hat{\mathbf{j}} + C_z \hat{\mathbf{k}}\right) \\
&= \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \\
\nabla \cdot \vec{C} &= 0
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\nabla \cdot (\Phi \vec{C}) = (\nabla \Phi) \cdot \vec{C} = \vec{C} \cdot (\nabla \Phi)$$

Além disso, temos $\left(\vec{C}\Phi\right) \cdot \hat{n} = \vec{C} \cdot \left(\Phi \hat{n}\right)$. Desse modo, o teorema do divergente fica

$$\int_V \vec{C} \cdot (\nabla \Phi)\, dV = \oint_S \vec{C} \cdot \left(\Phi \hat{n}\right) dA$$

ou ainda, como $\vec{C}$ é constante,

$$\vec{C} \cdot \int_V \nabla \Phi \, dV = \vec{C} \cdot \oint_S \Phi \hat{n}\, dA$$

Como $\vec{C}$ é qualquer vetor constante, devemos ter

$$\int_V \nabla \Phi \, dV = \oint_S \Phi \hat{n}\, dA$$

que é a expressão 1.64a.

□

Demonstração. A expressão 1.64c

$$\int_V \nabla \times \vec{B}\, dV = \oint_S \hat{n} \times \vec{B}\, dA$$

também parte do teorema do divergente, só que agora consideramos (neste teorema) $\vec{B} = \vec{C} \times \vec{D}$, onde $\vec{D}$ é um vetor constante. Obtemos, portanto,

$$\int_V \nabla \cdot \left(\vec{C} \times \vec{D}\right) dV = \oint_S \left(\vec{C} \times \vec{D}\right) \cdot \hat{n}\, dA$$

O termo $\nabla \cdot \left(\vec{C} \times \vec{D}\right)$ na primeira integral é um produto misto e, mediante a propriedade 1.17 dos produtos mistos, temos

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$$

ou, no nosso caso,

$$\nabla \cdot \left(\vec{C} \times \vec{D}\right) = \vec{D} \cdot \left(\nabla \times \vec{C}\right)$$

Utilizando esta mesma propriedade, obtemos, para o produto misto na segunda integral,

$$\left(\vec{C} \times \vec{D}\right) \cdot \hat{n} = \left(\hat{n} \times \vec{C}\right) \cdot \vec{D} = \vec{D} \cdot \left(\hat{n} \times \vec{C}\right)$$

Obtidas estas duas expressões, voltamos ao teorema do divergente, isto é,

$$\int_V \vec{D} \cdot \left(\nabla \times \vec{C}\right) dV = \oint_S \vec{D} \cdot \left(\hat{n} \times \vec{C}\right) dA$$

Como $\vec{D}$ é um vetor constante,

$$\vec{D} \cdot \int_V \nabla \times \vec{C}\, dV = \vec{D} \cdot \oint_S \hat{n} \times \vec{C}\, dA$$

Finalmente, como $\vec{D}$ é qualquer,

$$\int_V \nabla \times \vec{C}\, dV = \oint_S \hat{n} \times \vec{C}\, dA$$

que é a expressão desejada.

□

Demonstração. Por último, vamos mostrar a relação 1.64d,

$$\int_S (\hat{n} \times \nabla) \times \vec{B}\, dA = \oint_C d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Esta demonstração se baseia no teorema de Stokes 1.56,

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n}\, dA = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

Façamos, no teorema de Stokes, $\vec{B} = \vec{C} \times \vec{D}$, onde $\vec{D}$ é um vetor constante. Obtemos, assim,

$$\int_S \left[\nabla \times (\vec{C} \times \vec{D})\right] \cdot \hat{n}\, dA = \oint_C (\vec{C} \times \vec{D}) \cdot d\vec{\ell}$$

Utilizando a propriedade 1.17 dos produtos mistos, achamos, para o produto misto na segunda integral,

$$(\vec{C} \times \vec{D}) \cdot d\vec{\ell} = (d\vec{\ell} \times \vec{C}) \cdot \vec{D} = \vec{D} \cdot (d\vec{\ell} \times \vec{C})$$

Para o duplo produto vetorial na primeira integral, usamos a propriedade 1.58i, que é

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$$

e então,

$$\nabla \times (\vec{C} \times \vec{D}) = (\nabla \cdot \vec{D})\vec{C} - (\nabla \cdot \vec{C})\vec{D} + (\vec{D} \cdot \nabla)\vec{C} - (\vec{C} \cdot \nabla)\vec{D} \qquad (1.65)$$

Como $\vec{D}$ é um vetor constante, $\nabla \cdot \vec{D} = 0$. Além disso, o termo $(\vec{C} \cdot \nabla)\vec{D}$ vale

$$(\vec{C} \cdot \nabla)\vec{D} = (C_x\,\hat{\mathbf{i}} + C_y\,\hat{\mathbf{j}} + C_z\,\hat{\mathbf{k}}) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{\mathbf{k}}\right](D_x\,\hat{\mathbf{i}} + D_y\,\hat{\mathbf{j}} + D_z\,\hat{\mathbf{k}})$$

$$(\vec{C} \cdot \nabla)\vec{D} = \left[C_x\frac{\partial}{\partial x} + C_y\frac{\partial}{\partial y} + C_z\frac{\partial}{\partial z}\right](D_x\,\hat{\mathbf{i}} + D_y\,\hat{\mathbf{j}} + D_z\,\hat{\mathbf{k}})$$

Como $\vec{D}$ é constante, D_x, D_y e D_z também o são, e as derivadas acima são todas nulas. Portanto,

$$(\vec{C} \cdot \nabla)\vec{D} = 0$$

e a equação 1.65 fica

$$\nabla \times (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{D} \cdot \nabla)\vec{C} - (\nabla \cdot \vec{C})\vec{D}$$

O teorema de Stokes fica

$$\int_S \left[(\vec{D} \cdot \nabla)\vec{C} - (\nabla \cdot \vec{C})\vec{D}\right] \cdot \hat{n}\, dA = \oint_C \vec{D} \cdot \left(d\vec{\ell} \times \vec{C}\right)$$

ou então,

$$\int_S \left\{\vec{D} \cdot [\nabla(\vec{C} \cdot \hat{n})] - \vec{D} \cdot [\hat{n}(\nabla \cdot \vec{C})]\right\} dA = \oint_C \vec{D} \cdot \left(d\vec{\ell} \times \vec{C}\right)$$

ou ainda,

$$\int_S \vec{D} \cdot [\nabla(\vec{C} \cdot \hat{n}) - \hat{n}(\nabla \cdot \vec{C})]\, dA = \oint_C \vec{D} \cdot \left(d\vec{\ell} \times \vec{C}\right)$$

A propriedade 1.19b do duplo produto vetorial estabelece que

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

A partir desta propriedade, o termo entre colchetes na integral de superfície da penúltima equação acima pode ser reescrito, se considerarmos que, na propriedade 1.19b, $\vec{a} = \hat{n}$, $\vec{b} = \nabla$ e $\vec{c} = \vec{C}$. Assim, obtemos

$$(\hat{n} \times \nabla) \times \vec{C} = \nabla(\hat{n} \cdot \vec{C}) - \hat{n}(\nabla \cdot \vec{C})$$

que é exatamente o termo entre colchetes. Portanto,

$$\int_S \vec{D} \cdot \left[(\hat{n} \times \nabla) \times \vec{C}\right] dA = \oint_C \vec{D} \cdot \left(d\vec{\ell} \times \vec{C}\right)$$

ou, como $\vec{D}$ é constante,

$$\vec{D} \cdot \int_S (\hat{n} \times \nabla) \times \vec{C}\, dA = \vec{D} \cdot \oint_C d\vec{\ell} \times \vec{C}$$

Como $\vec{D}$ é qualquer, obtemos, finalmente,

$$\int_S (\hat{n} \times \nabla) \times \vec{C}\, dA = \oint_C d\vec{\ell} \times \vec{C}$$

que é a equação procurada.

□

Uma outra propriedade importante decorre da equação 1.52,

$$d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell}$$

A integral desta expressão, considerando um ponto inicial $\vec{r}_0$ e um ponto final $\vec{r}$, é dada por

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\Phi = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell}$$

ou seja,

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell} = \Phi(\vec{r}) - \Phi(\vec{r}_0) \tag{1.66}$$

e a integral acima independe do caminho considerado, já que ela é função apenas dos pontos inicial e final escolhidos. Assim, se uma função vetorial $\vec{B}$ for tal que existe uma função escalar Φ de modo que estas duas funções estão relacionadas por $\vec{B} = \nabla\Phi$, a integral de linha desta função vetorial $\vec{B}$ será independente do caminho. Desta propriedade decorre que, se a integral for num caminho fechado, $\vec{r} = \vec{r}_0$, e obtemos

$$\oint_C \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell} = \Phi(\vec{r}_0) - \Phi(\vec{r}_0) = 0$$

para qualquer caminho de integração considerado. Pelo teorema de Stokes, equação 1.56, temos

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n}\, dA = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

e assim, para o nosso caso especial, lembrando que $\vec{B} = \nabla\Phi$,

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n}\, dA = 0$$

Como a superfície S de integração é qualquer, o integrando deve ser nulo, o que implica

$$\nabla \times \vec{B} = 0$$

e a função vetorial $\vec{B}$ é irrotacional. Em Física, isto é muito importante, pois todas as forças conservativas, como a força gravitacional e a força elétrica,

por exemplo, possuem uma energia potencial associada, e a relação entre elas é dada por $\vec{F} = -\nabla U$, sendo $\vec{F}$ a força e U a energia potencial. Assim, as forças conservativas têm rotacional nulo, e sua integral de linha num percurso fechado (que é o trabalho realizado nesse percurso) também é nula. De uma forma geral, qualquer campo vetorial que tenha as características acima é chamado de conservativo.

Este capítulo foi dedicado a uma revisão dos conceitos de vetores, sistemas de coordenadas, e grandezas escalares e vetoriais, que serão utilizados ao longo de todo o texto. No próximo, veremos três séries extremamente relevantes e algumas de suas propriedades. Os dois capítulos são muito importantes, até mesmo essenciais, para o entendimento das formulações matemáticas que serão desenvolvidas durante o estudo do Eletromagnetismo propriamente dito, que é o objetivo principal deste livro. Em seguida, apresentamos alguns exemplos resolvidos envolvendo os conceitos vistos neste capítulo.

1.6 Exemplos Resolvidos

Exemplo 1.1. *Demonstre que o ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ pode ser obtido através do produto escalar entre eles.*

A demonstração, bastante simples, parte da expressão 1.4, que define o produto escalar entre dois vetores, isto é,

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \\ \cos\theta &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}\right) \end{aligned} \tag{1.67}$$

Exemplo 1.2. *Mostre que o produto escalar entre os vetores $\vec{a}$ e $\hat{b}$ fornece a componente do vetor $\vec{a}$ na direção definida pelo versor $\hat{b}$.*

Vamos chamar de $a_{\hat{b}}$ a componente do vetor $\vec{a}$ na direção de $\hat{b}$. Ela pode ser vista na figura 1.29.

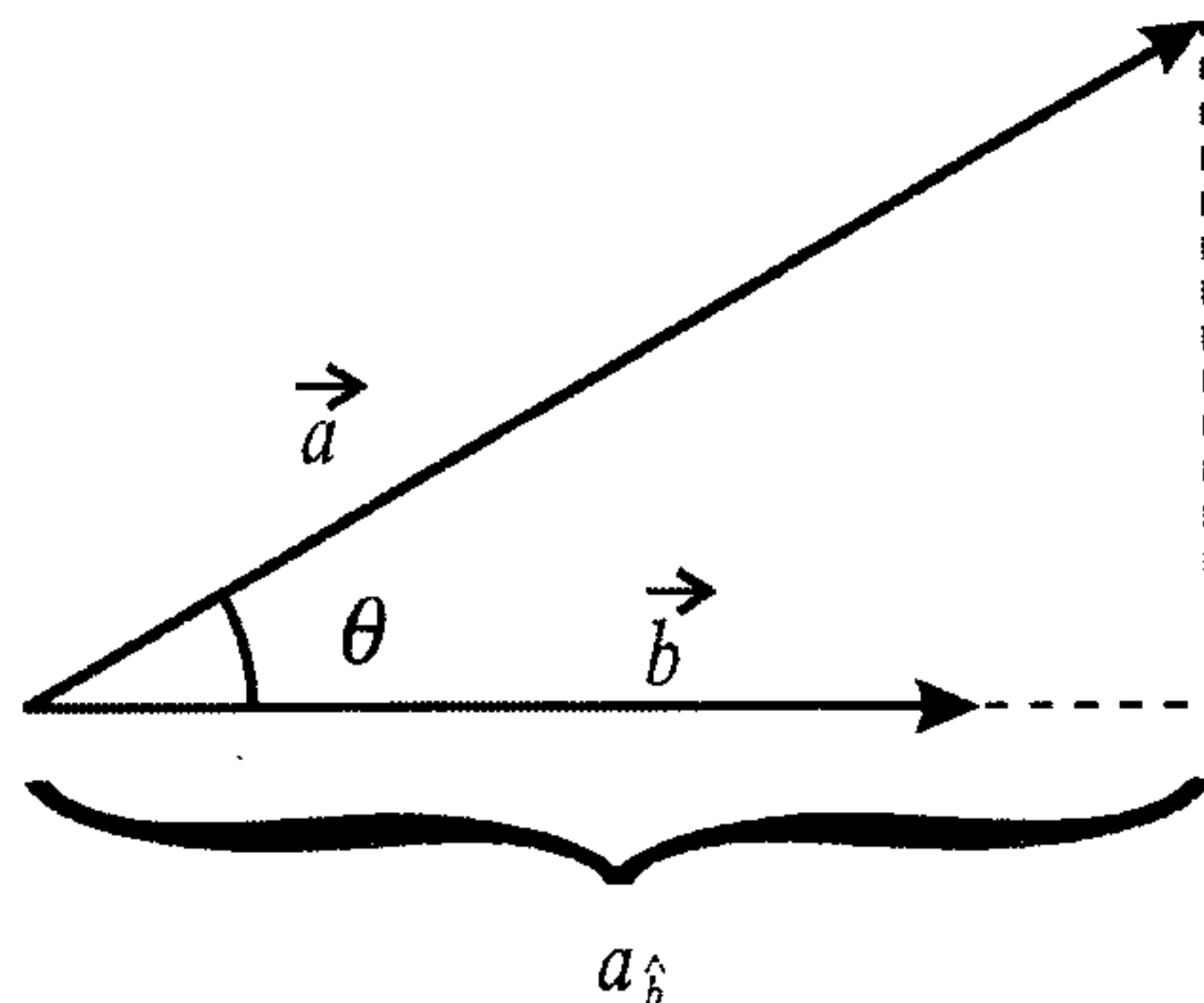



Figura 1.29: Dois vetores para o cálculo da componente de um vetor na direção de outro.

Da figura, percebemos que $a_{\hat{b}}$ é o cateto adjacente ao ângulo θ entre os vetores e que a hipotenusa é a. Assim, temos

$$\cos\theta = \frac{a_{\hat{b}}}{a}$$

ou

$$a_{\hat{b}} = a\cos\theta \tag{1.68}$$

No exemplo anterior, vimos que o ângulo entre dois vetores é dado pela equação 1.67, ou seja,

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}\right)$$

ou

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}$$

Portanto, substituindo esta equação na expressão 1.68, obtemos

$$a_{\hat{b}} = a\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}$$

ou

$$a_{\hat{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b}$$

Lembrando que

$$\hat{b} = \frac{\vec{b}}{b}$$

encontramos

$$a_{\hat{b}} = \vec{a} \cdot \hat{b} \tag{1.69}$$

Se quisermos o vetor-componente na direção de $\vec{b}$, devemos multiplicar a expressão acima por $\hat{b}$, ou seja,

$$\vec{a}_{\hat{b}} = (\vec{a} \cdot \hat{b})\hat{b} \tag{1.70}$$

Exemplo 1.3. *Mostre que o produto vetorial de $\vec{A}$ por $\vec{B}$ é numericamente igual à área do paralelogramo definido por esses dois vetores.*

Antes de iniciarmos a demonstração, vamos observar a figura 1.30.

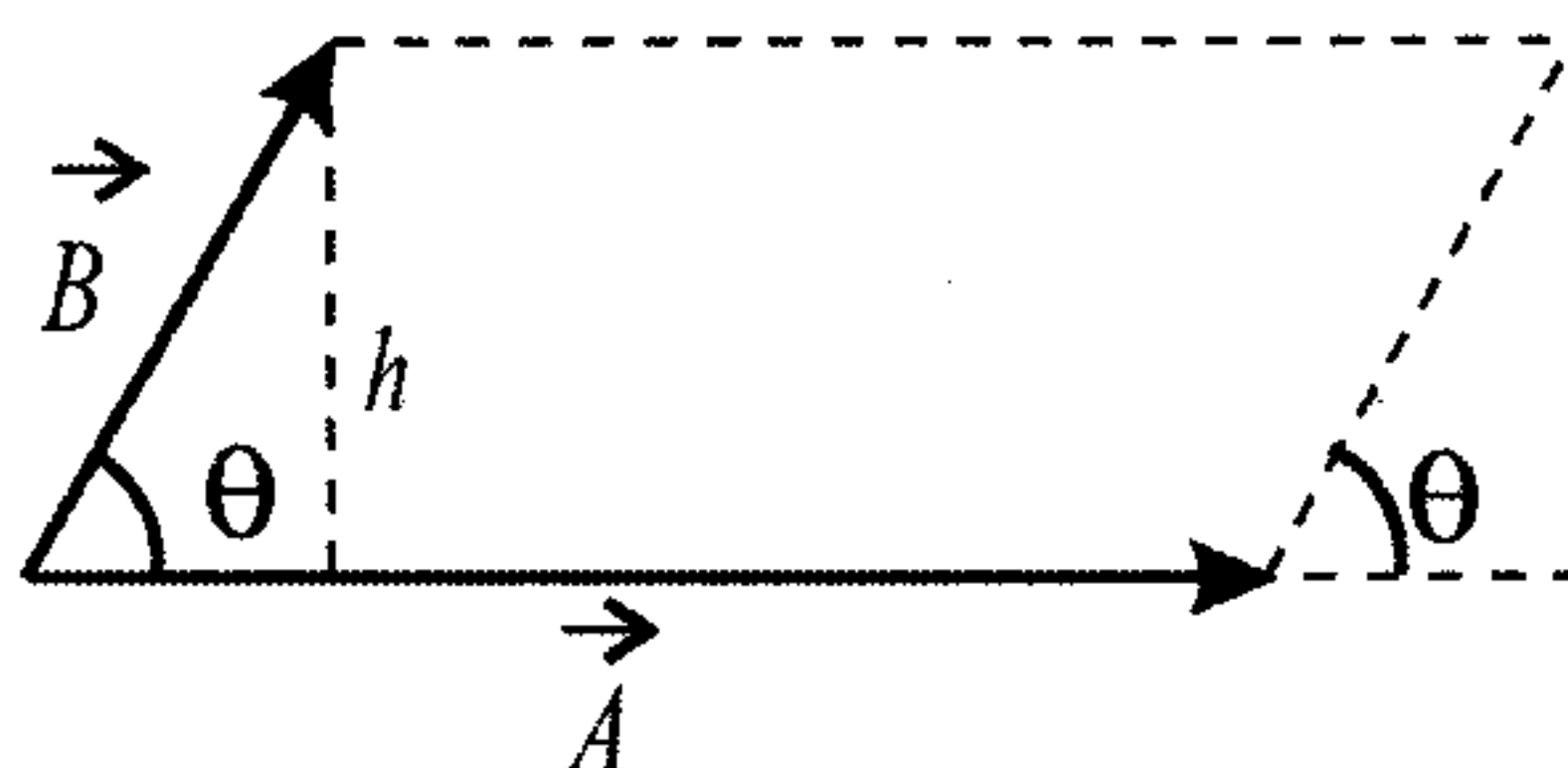



Figura 1.30: Área definida pelos vetores do produto vetorial.

Desta figura, percebemos que a área definida pelos dois vetores corresponde à area do paralelogramo, a qual, por sua vez, é a área do triângulo somada com a do trapézio. A área do triângulo é dada por

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \times h}{2}$$

onde b é a base e h, a altura do triângulo. No nosso caso, a altura pode ser obtida através de

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{B}$$

ou seja,

$$h = B \operatorname{sen}\theta$$

enquanto a base do triângulo é dada por

$$\cos\theta = \frac{b}{B}$$

isto é,

$$b = B\cos\theta$$

e a área do triângulo é

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{B^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{2}$$

A área do trapézio é obtida mediante

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(b_M + b_m) \times h}{2}$$

onde b_M é a base maior, b_m, a base menor, e h é a altura, que vale

$$h = B \operatorname{sen}\theta$$

conforme já encontramos anteriormente. A base maior tem tamanho A, enquanto a base menor, obtida em termos da base b do triângulo, vale

$$b_m = A - b$$
$$b_m = A - B\cos\theta$$

Portanto, a área do trapézio é

$$\begin{aligned}
A_{\text{trapézio}} &= \frac{(b_M + b_m) \times h}{2} \\
&= \frac{b_M \times h}{2} + \frac{b_m \times h}{2} \\
&= \frac{AB \operatorname{sen}\theta}{2} + \frac{(A - B\cos\theta)B \operatorname{sen}\theta}{2} \\
A_{\text{trapézio}} &= AB \operatorname{sen}\theta - \frac{B^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{2}
\end{aligned}$$

A área total é a soma das áreas do triângulo e do trapézio, e o resultado é

$$\begin{aligned} A_{\text{total}} &= A_{\text{triângulo}} + A_{\text{trapézio}} \\ &= \frac{B^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{2} + AB \operatorname{sen}\theta - \frac{B^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{2} \\ A_{\text{total}} &= AB \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Lembrando que o módulo do produto vetorial de $\vec{A}$ com $\vec{B}$ é

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \operatorname{sen}\theta$$

temos

$$A_{\text{total}} = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

como queríamos demonstrar.

Exemplo 1.4. *Uma esfera de raio R tem uma densidade volumétrica de massa ϱ. Calcule a sua massa nos seguintes casos:*

a) $\varrho = \varrho_0$ (constante)

A densidade ϱ é a massa dm dividida pelo volume dV, ou seja,

$$\varrho = \frac{dm}{dV}$$

Assim, temos $dm = \varrho\, dV$. Portanto, devemos integrar dm em todo o volume da esfera para encontrar a massa total, isto é,

$$\begin{aligned} \int_V dm &= \int_V \varrho\, dV \\ m &= \int_V \varrho_0 r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi \end{aligned}$$

onde usamos o elemento de volume em esféricas dado pela equação 1.47. A integral fica

$$m = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varrho_0 r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$
\begin{aligned}
m &= \varrho_0 \int_0^R \int_0^\pi r^2 \operatorname{sen}\theta \; dr \, d\theta \, (\phi)_0^{2\pi} \\
&= 2\pi \varrho_0 \int_0^R r^2 dr \, (-\cos\theta)_0^\pi \\
&= 2\pi \varrho_0 (1+1) \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \\
m &= \frac{4\pi R^3 \varrho_0}{3}
\end{aligned}
$$

b) $\varrho = a_0 r$

Neste caso, temos

$$
\begin{aligned}
\int_V dm &= \int_V \varrho \, dV \\
m &= \int_V a_0 r^3 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\
&= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a_0 r^3 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\
&= a_0 \int_0^R \int_0^\pi r^3 \operatorname{sen}\theta \; dr \, d\theta \, (\phi)_0^{2\pi} \\
&= 2\pi a_0 \int_0^R r^3 dr \, (-\cos\theta)_0^\pi \\
&= 2\pi a_0 (1+1) \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \\
m &= a_0 \pi R^4
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.5. *Seja a função escalar*

$$\Phi(x, y, z) = 2x - 3y^2 + 4xyz$$

a) Encontre $\nabla\Phi$.

O gradiente de Φ é dado pela expressão 1.51, isto é,

$$\nabla\Phi = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

ou

$$\nabla\Phi = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}\left[2x - 3y^2 + 4xyz\right] + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}\left[2x - 3y^2 + 4xyz\right] + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\left[2x - 3y^2 + 4xyz\right]$$

ou ainda,

$$\nabla\Phi = \left[2 + 4yz\right]\hat{\mathbf{i}} + \left[-6y + 4xz\right]\hat{\mathbf{j}} + 4xy\,\hat{\mathbf{k}}$$

b) Ache $\nabla\Phi$ no ponto P(1,1,3).

No ponto P, o gradiente vale

$$\nabla\Phi_P = \left[2 + 4.1.3\right]\hat{\mathbf{i}} + \left[-6.1 + 4.1.3\right]\hat{\mathbf{j}} + 4.1.1\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\nabla\Phi_P = 14\,\hat{\mathbf{i}} + 6\,\hat{\mathbf{j}} + 4\,\hat{\mathbf{k}}$$

c) Calcule o módulo de $\nabla\Phi$.

O módulo do gradiente é dado por

$$|\nabla\Phi| = \sqrt{\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi}$$
$$= \sqrt{\left[2 + 4yz\right]^2 + \left[-6y + 4xz\right]^2 + \left[4xy\right]^2}$$
$$= \sqrt{4 + 16yz + 16y^2z^2 + 36y^2 - 48xyz + 16x^2z^2 + 16x^2y^2}$$
$$|\nabla\Phi| = 2\sqrt{1 + 4yz + 9y^2 - 12xyz + 4\left(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2\right)}$$

d) Encontre o módulo do gradiente no ponto P definido acima.

O módulo em P é

$$|\nabla\Phi|_P = 2\sqrt{1 + 4.1.3 + 9.1 - 12.1.1.3 + 4\left(1.1 + 1.9 + 1.9\right)}$$
$$|\nabla\Phi|_P = 2\sqrt{62}$$

e) Ache a direção, ou direções, no ponto P, em que Φ é constante.

Neste caso, queremos achar um vetor perpendicular ao vetor $\nabla\Phi$ no ponto P, pois assim, pela equação 1.52

$$d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell}$$

teremos $d\Phi = 0$, já que Φ é constante. Vamos chamar esse vetor de

$$\vec{v} = X\,\hat{\mathbf{i}} + Y\,\hat{\mathbf{j}} + Z\,\hat{\mathbf{k}}$$

O produto escalar desse vetor com $\nabla\Phi_P = 14\,\hat{\mathbf{i}} + 6\,\hat{\mathbf{j}} + 4\,\hat{\mathbf{k}}$ deve ser nulo, pois eles são ortogonais. Assim,

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \nabla\Phi_P &= 0 \\ \left[X\,\hat{\mathbf{i}} + Y\,\hat{\mathbf{j}} + Z\,\hat{\mathbf{k}}\right] \cdot \left[14\,\hat{\mathbf{i}} + 6\,\hat{\mathbf{j}} + 4\,\hat{\mathbf{k}}\right] &= 0 \\ 14X + 6Y + 4Z &= 0 \end{aligned}$$

e então,

$$Z = -\frac{14X + 6Y}{4}$$

e os vetores são dados por

$$\vec{v} = X\,\hat{\mathbf{i}} + Y\,\hat{\mathbf{j}} - \frac{14X + 6Y}{4}\,\hat{\mathbf{k}}$$

e para cada valor de X e Y uma dada direção é definida. Neste caso, infinitas direções são possíveis, e todas pertencem a um plano perpendicular a $\nabla\Phi$.

f) Qual é a integral de linha de $\nabla\Phi$ dos pontos (0, 0, 0) até (1, 0, 0), se for utilizada uma reta como caminho entre esses dois pontos?

Queremos calcular a integral

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell}$$

Existem dois modos de calcular essa integral. O primeiro é o método direto, considerando $d\vec{\ell} = dx\,\hat{\mathbf{i}}$, e $y = z = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}\int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell} &= \int_0^1 \left\{[2+4.0.0]\,\hat{\mathbf{i}} + [-6.0+4x.0]\,\hat{\mathbf{j}} + 4x.0\,\hat{\mathbf{k}}\right\} \cdot dx\,\hat{\mathbf{i}} \\ &= \int_0^1 2\,dx \\ &= (2x)_0^1 \\ \int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell} &= 2\end{aligned}$$

O outro método se vale do fato de que a integral de linha de $\nabla\Phi$ independe do caminho, como mostra a equação 1.66,

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell} = \Phi(\vec{r}) - \Phi(\vec{r}_0)$$

Sendo assim, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell} &= \Phi(1,0,0) - \Phi(0,0,0) \\ &= \left(2.1 - 3.0^2 + 4.1.0.0\right) - \left(2.0 - 3.0^2 + 4.0.0.0\right) \\ \int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell} &= 2\end{aligned}$$

que concorda com o resultado anterior.

g) $\nabla\Phi$ é conservativo?

Pelo resultado anterior, percebemos que, se o caminho de integração for fechado, a integral se anula, e isto caracteriza um campo conservativo. Além disso, calculando o rotacional de $\nabla\Phi$, obtemos, utilizando a propriedade 1.58b,

$$\nabla \times \nabla\Phi = 0$$

o que confirma o fato de que o campo é conservativo.

Exemplo 1.6. *Sendo $\vec{r}$ o vetor posição, prove que*

a) $\nabla \cdot \vec{r} = 3$

O vetor posição em coordenadas retangulares é dado por

$$\vec{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$$

e assim,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{r} &= \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot\left(x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}\right)\\ &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\\ \nabla\cdot\vec{r} &= 3\end{aligned}$$

b) $\nabla\times\vec{r} = 0$

Neste caso, temos [10]

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{r} &= \begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}\\ &= \hat{\mathbf{i}}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\\ \nabla\times\vec{r} &= 0\end{aligned} \tag{1.71}$$

c) Como $\vec{r}$ é irrotacional, deve existir uma função escalar Φ tal que $\nabla\Phi = \vec{r}$. Encontre essa função.

Da equação 1.66, temos

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \nabla\Phi\cdot d\vec{\ell} = \Phi(\vec{r}) - \Phi(\vec{r}_0)$$

Dessa forma, para o nosso caso temos

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{r}\cdot d\vec{\ell}$$

Em coordenadas retangulares, o elemento de arco é dado pela equação 1.44

$$d\vec{\ell} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}$$

[10] Lembrando que as coordenadas x, y e z são todas independentes entre si.

e assim,

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= \Phi(\vec{r}_0) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}(x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}})\cdot(dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}})\\ &= \Phi(\vec{r}_0) + \int_{x_0}^{x} x\,dx + \int_{y_0}^{y} y\,dy + \int_{z_0}^{z} z\,dz\\ &= \Phi(\vec{r}_0) + \left(\frac{x^2}{2}\right)_{x_0}^{x} + \left(\frac{y^2}{2}\right)_{y_0}^{y} + \left(\frac{z^2}{2}\right)_{z_0}^{z}\\ \Phi(\vec{r}) &= \Phi(\vec{r}_0) + \frac{x^2+y^2+z^2}{2} - \frac{x_0^2+y_0^2+z_0^2}{2}\end{aligned}$$

ou

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{r^2}{2} + \phi_0$$

sendo que combinamos as duas constantes em ϕ_0.

1.7 Exercícios

1.1 Sendo dados os vetores $\vec{A} = 2\,\hat{\mathbf{i}} - 4\,\hat{\mathbf{j}} - 3\,\hat{\mathbf{k}}$, $\vec{B} = 4\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} + 8\,\hat{\mathbf{k}}$, $\vec{C} = -2\,\hat{\mathbf{i}} - 8\,\hat{\mathbf{j}} + 2\,\hat{\mathbf{k}}$ e $\vec{D} = 9\,\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 6\,\hat{\mathbf{k}}$, calcule o seguinte.

a) Os módulos dos vetores.

b) Todas as possíveis somas em que são utilizados dois dos vetores, e os respectivos módulos.

c) Todas as possíveis somas em que são utilizados três dos vetores, e os respectivos módulos.

d) A soma dos quatro vetores, e o módulo.

e) As possíveis subtrações em que são utilizados dois dos vetores, e os módulos.

f) As possíveis subtrações mediante o uso de três dos vetores, e os módulos.

g) As possíveis subtrações envolvendo os quatro vetores, e os módulos.

1.2 Considerando os vetores dados no exercício anterior, calcule o seguinte.

a) Os possíveis produtos escalares dos vetores.

b) Os possíveis produtos vetoriais empregando dois dos vetores, e os módulos dos vetores resultantes.

c) Os possíveis produtos vetoriais considerando três dos vetores, e os módulos dos vetores resultantes.

d) Todos os produtos mistos possíveis.

1.3 Utilizando os vetores dados no exercício 1.1, responda ao seguinte.

a) Ache, para cada par de vetores, um vetor que seja ortogonal a ambos e que tenha módulo unitário.

b) Considerando as possíveis somas dois-a-dois dos vetores, encontre um vetor ortogonal unitário para cada par de vetores-soma.

c) Encontre os produtos escalares e vetoriais dos versores obtidos acima.

1.4 Sendo dados os vetores de módulo unitário

$$\hat{a} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{j}}$$
$$\hat{b} = \cos\delta\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\delta\,\hat{\mathbf{j}}$$

mostre, utilizando produtos escalares, que $\cos(\theta - \delta) = \cos\theta\cos\delta + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\delta$.

1.5 Considerando a função escalar $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, responda ao seguinte.

a) Que figura geométrica é obtida quando Φ é constante?

b) Qual é o gradiente de Φ?

c) Ache um versor normal à superfície $\Phi = k$, sendo k uma constante.

d) Calcule o Laplaciano de Φ.

1.6 Utilizando os versores definidos no exercício 1.4, prove, através de um produto vetorial, que $\operatorname{sen}(\theta - \delta) = \operatorname{sen}\theta\cos\delta - \cos\theta\operatorname{sen}\delta$.

1.7 Prove as relações 1.58 que não foram demonstradas no texto.

1.8 Encontre as equações de transformação das coordenadas cilíndricas para esféricas, e vice-versa. Ache também as relações entre os versores nos dois sistemas de coordenadas.

1.9 Considerando um cubo de lado a e uma função vetorial $\vec{B} = 2xy\,\hat{\mathbf{i}} + xz^2\,\hat{\mathbf{j}} - 4x^2yz\,\hat{\mathbf{k}}$, responda ao seguinte.

a) Calcule $\nabla \cdot \vec{B}$.

b) Ache $\nabla \times \vec{B}$. $\vec{B}$ é conservativo? Se for, encontre uma função Φ tal que $\nabla\Phi = \vec{B}$.

c) Calcule a integral

$$\int_V \vec{B}\,dV$$

d) Calcule a integral

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B}\,dV$$

tanto diretamente quanto através do teorema do divergente.

e) Para cada uma das seis faces, calcule

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n}\,dA$$

diretamente e através do teorema de Stokes.

1.10 Sendo $\vec{A}$ um vetor constante, mostre que

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{r}) = \vec{A}$$

1.11 Considere um cilindro de raio a e altura h, e uma função vetorial dada por $\vec{B} = 2\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + 3z\,\hat{\mathbf{k}}$ em coordenadas cilíndricas. Utilizando o apêndice B, se necessário, responda ao seguinte.

a) Calcule $\nabla \cdot \vec{B}$, em coordenadas cilíndricas e retangulares.

b) Ache $\nabla \times \vec{B}$, em coordenadas cilíndricas e retangulares. $\vec{B}$ é conservativo? Se for, encontre um Φ tal que $\nabla\Phi = \vec{B}$.

c) Resolva a integral

$$\int_V \vec{B}\, dV$$

d) Resolva a integral

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B}\, dV$$

tanto diretamente quanto através do teorema do divergente.

e) Para as áreas das bases e lateral, calcule

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n}\; dA$$

diretamente e através do teorema de Stokes.

1.12 A força gravitacional entre duas massas m (na origem) e M é dada por

$$\vec{F}_g = -GmM\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Verifique, por qualquer método, se esta força é conservativa e, em caso positivo, ache a energia potencial gravitacional associada, através de $\nabla U_g = -\vec{F}_g$. Pode ser necessário o apêndice B.

1.13 Calcule o trabalho para levar um corpo da posição A(-1, 0, 0) até B(1, 0, 0), realizado pelas forças nos caminhos abaixo.

a) Reta de A a B, força $\vec{F} = 2x^2\,\hat{\mathbf{i}}$.

b) Arco de circunferência de raio 1 no plano xy, centrado na origem, força $\vec{F} = 2xy^3\,\hat{\mathbf{i}} - 4xy\,\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$.

c) O mesmo caminho que antes, força $\vec{F} = \rho^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

d) Retas de A até (0,1,0), e deste ponto até B, força $\vec{F} = 2xy\,\hat{\mathbf{i}} - 4y\,\hat{\mathbf{k}}$.

e) Quais das forças acima são conservativas? Calcule também o trabalho realizado nos processos com sentido inverso aos dados acima e confira a resposta anterior. O trabalho realizado pela força $\vec{F}$ é dado por

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

1.14 Prove que o produto misto de três vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ é numericamente igual ao volume do paralelepípedo definido pelos três vetores.

Capítulo 2

Algumas Séries Úteis em Física

Em Física, algumas séries são utilizadas em vários campos diferentes, como Mecânica, Eletromagnetismo, Acústica, Termodinâmica, etc., e elas são de extrema importância. Aqui veremos algumas que são utilizadas ao longo do texto e que são também as que aparecem com mais freqüência em Física. Vamos começar com a série de Taylor.

2.1 Série de Taylor

Em Física, muitas vezes precisamos conhecer o comportamento de uma dada função numa região pequena em torno de um certo ponto. Nesses casos, é comum expandir essa função utilizando uma *série de Taylor* em torno do ponto de interesse. Se a função é de apenas uma variável, como $f(x)$, a série de Taylor em torno do ponto de interesse x_0 é dada através da expressão

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x_0} (x - x_0)^n =$$

$$f(x_0) + (x - x_0) \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x_0} + \cdots \quad (2.1)$$

onde

$$\left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x_0}$$

representa a derivada n-ésima de $f(x)$ aplicada no ponto x_0, e $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ é o fatorial de n. Vejamos agora as séries de Taylor de algumas funções importantes.

1. Função exponencial

$$f(x) = e^x$$

Queremos achar a série de Taylor de e^x em torno de um ponto x_0, ou seja,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^x)\bigg|_{x_0} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

que é a série de Taylor de $f(x) = e^x$. O primeiro termo corresponde a $n = 0$, isto é,

$$a_0 = \frac{1}{0!}(x - x_0)^0 e^{x_0} = e^{x_0}$$

O segundo, que tem $n = 1$, é

$$a_1 = \frac{1}{1!}(x - x_0)^1 \left[\frac{d}{dx}(e^x)\right]_{x_0} = (x - x_0)\left(e^x\right)_{x_0} = (x - x_0)e^{x_0}$$

O terceiro, que tem $n = 2$, fica

$$a_2 = \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 \left[\frac{d^2}{dx^2}(e^x)\right]_{x_0} = \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left(e^x\right)_{x_0} = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 e^{x_0}$$

e assim sucessivamente. O n-ésimo termo é

$$a_n = \frac{1}{n!}(x - x_0)^n \left[\frac{d^n}{dx^n}(e^x)\right]_{x_0} = \frac{1}{n!}(x - x_0)^n\left(e^x\right)_{x_0} = \frac{1}{n!}(x - x_0)^n e^{x_0}$$

e a série de Taylor torna-se

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x - x_0)^n e^{x_0}$$

ou

$$e^x = e^{x_0}\left[1 + (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n + \cdots\right]$$

e, quando $x_0 = 0$, a série de Taylor fica

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{2.2}$$

Assim, a função e^x pode ser aproximada por sua série de Taylor, dada acima. Se quisermos uma aproximação até segunda ordem em torno de zero, fazemos

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

que é bastante razoável se $x \ll 1$. Quando x é razoavelmente grande, é preciso considerar mais termos da série para conseguir uma aproximação melhor.

Como exemplo, vamos calcular $e^{0,1}$, usando esta aproximação até segunda ordem. Temos

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{1}{2}(0,1)^2 = 1,1 + 0,005 = 1,105$$

O valor numérico de $e^{0,1}$ é

$$e^{0,1} = 1,105170918...$$

e o erro percentual, que vale $E_{\%} = 0,0155\%$, é bem pequeno. Portanto, esta aproximação é bastante boa.

2. Função cosseno

$$f(x) = \cos x$$

Vamos calcular a sua série de Taylor em torno do ponto $x_0 = 0$, isto é, queremos encontrar

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(\cos x)\bigg|_0 (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Para $n = 0$, temos

$$a_0 = \frac{1}{0!}x^0 \cos 0 = 1$$

Quando $n = 1$, obtemos

$$a_1 = \frac{1}{1!}x^1 \left[\frac{d}{dx}(\cos x)\right]_0 = -x(\operatorname{sen} x)_0 = 0$$

O terceiro termo, que tem $n = 2$, fica

$$a_2 = \frac{1}{2!}x^2 \left[\frac{d^2}{dx^2}(\cos x)\right]_0 = \frac{1}{2}x^2(-\cos x)_0 = -\frac{x^2}{2}$$

Quando $n = 3$, achamos

$$a_3 = \frac{1}{3!}x^3 \left[\frac{d^3}{dx^3}(\cos x)\right]_0 = \frac{1}{3!}x^3(\operatorname{sen} x)_0 = 0$$

Se $n = 4$, encontramos

$$a_4 = \frac{1}{4!}x^4 \left[\frac{d^4}{dx^4}(\cos x)\right]_0 = \frac{1}{4!}x^4(\cos x)_0 = \frac{x^4}{4!}$$

e assim sucessivamente. Os termos com n ímpar são nulos, e os pares são alternados, de forma que

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

e a série de Taylor de $f(x) = \cos x$ fica

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots \quad (2.3)$$

Quando $x \ll 1$, podemos aproximar $\cos x$ por

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

e, se x for maior, precisamos de mais termos da série.

Note que x deve ser medido em radianos. Vamos calcular $\cos 0,1$ para verificar a precisão da aproximação. O valor aproximado é

$$\cos 0,1 \approx 1 - \frac{(0,1)^2}{2} = 1 - 0,005 = 0,995$$

enquanto o valor correto é

$$\cos 0,1 = 0,995004165...$$

e o erro percentual é de $E_{\%} = 0,000419\%$, bastante pequeno, o que significa que a aproximação é muito boa.

3. Função seno

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

A série de Taylor da função seno em torno de $x_0 = 0$ é

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (\operatorname{sen} x)\bigg|_0 (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Para $n = 0$, temos

$$a_0 = \frac{1}{0!} x^0 \operatorname{sen} 0 = 0$$

Quando $n = 1$, obtemos

$$a_1 = \frac{1}{1!} x^1 \left[\frac{d}{dx} (\operatorname{sen} x) \right]_0 = x(\cos x)_0 = x$$

Se $n = 2$,

$$a_2 = \frac{1}{2!} x^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} (\operatorname{sen} x) \right]_0 = \frac{1}{2} x^2 (-\operatorname{sen} x)_0 = 0$$

Quando $n = 3$, achamos

$$a_3 = \frac{1}{3!} x^3 \left[\frac{d^3}{dx^3} (\operatorname{sen} x) \right]_0 = \frac{1}{3!} x^3 (-\cos x)_0 = -\frac{x^3}{3!}$$

Para $n = 4$, temos

$$a_4 = \frac{1}{4!}x^4 \left[\frac{d^4}{dx^4}(\operatorname{sen} x) \right]_0 = \frac{1}{4!}x^4 (\operatorname{sen} x)_0 = 0$$

Por fim, se $n = 5$, o resultado é

$$a_5 = \frac{1}{5!}x^5 \left[\frac{d^5}{dx^5}(\operatorname{sen} x) \right]_0 = \frac{1}{5!}x^5 (\cos x)_0 = \frac{x^5}{5!}$$

Os termos do seno são alternados, assim como os do cosseno, só que agora os pares são nulos e os ímpares são dados por

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

e a série do seno é

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} + \cdots \quad (2.4)$$

e quando $x \ll 1$, podemos aproximar o seno por

$$\operatorname{sen} x \approx x$$

Vamos calcular a precisão desta aproximação, para o caso $x = 0,1$, isto é,

$$\operatorname{sen} 0,1 \approx 0,1$$

O valor exato do seno de 0,1 é

$$\operatorname{sen} 0,1 = 0,099833417...$$

e o erro percentual é de $E_{\%} = 0,167\%$, que, embora um pouco mais elevado do que nos outros casos é ainda aceitável.

4. Função logarítmica

$$f(x) = \ln x$$

A função logarítmica não pode ser expandida em torno de $x_0 = 0$, pois $\ln 0 \to -\infty$. Assim, costuma-se reescrever a função logarítmica como

$$f(x) = \ln(1+x)$$

e agora sim, podemos calcular sua série de Taylor em torno de $x_0 = 0$. Neste caso, queremos encontrar

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [\ln(1+x)] \bigg|_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Para $n = 0$, temos

$$a_0 = \frac{1}{0!} x^0 \ln(1+0) = 0$$

Quando $n = 1$, obtemos

$$a_1 = \frac{1}{1!} x^1 \left[\frac{d}{dx} [\ln(1+x)] \right]_0 = x \left[\frac{1}{1+x} \right]_0 = x$$

O próximo termo, que tem $n = 2$, fica

$$a_2 = \frac{1}{2!} x^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} [\ln(1+x)] \right]_0 = \frac{1}{2} x^2 \left[\frac{-1}{(1+x)^2} \right]_0 = -\frac{x^2}{2}$$

Se $n = 3$, achamos

$$a_3 = \frac{1}{3!} x^3 \left[\frac{d^3}{dx^3} [\ln(1+x)] \right]_0 = \frac{1}{3!} x^3 \left[\frac{2}{(1+x)^3} \right]_0 = \frac{x^3}{3}$$

Para $n = 4$, encontramos

$$a_4 = \frac{1}{4!} x^4 \left[\frac{d^4}{dx^4} [\ln(1+x)] \right]_0 = \frac{1}{4!} x^4 \left[\frac{-6}{(1+x)^4} \right]_0 = -\frac{x^4}{4}$$

Os termos são alternados e não existe o termo com $n = 0$. Eles são dados por

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

e a série fica

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad (2.5)$$

Vamos calcular $\ln 1,1$, para verificar esta aproximação. O logaritmo, considerando termos até a segunda ordem, fica

$$\ln(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2}$$

e, para $\ln 1,1$, temos $x = 0,1$, e assim,

$$\ln 1,1 = 0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} = 0,1 - 0,005 = 0,095$$

O valor exato de $\ln 1,1$ é

$$\ln 1,1 = 0,09531018...$$

e o erro percentual vale $E_{\%} = 0,32\%$, que é o maior até agora, mas ele ainda é muito pequeno e plenamente aceitável.

5. Função binomial

$$f(x) = (1+x)^k$$

onde k é qualquer. A série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ é

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^k\bigg|_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

O primeiro termo, com $n = 0$, vale

$$a_0 = \frac{1}{0!}x^0(1+0)^k = 1$$

Quando $n = 1$, temos

$$a_1 = \frac{1}{1!}x^1\left[\frac{d}{dx}(1+x)^k\right]_0 = x\left[k(1+x)^{k-1}\right]_0 = kx$$

O próximo termo, que tem $n = 2$, fica

$$a_2 = \frac{1}{2!}x^2\left[\frac{d^2}{dx^2}(1+x)^k\right]_0 = \frac{1}{2}x^2\left[k(k-1)(1+x)^{k-2}\right]_0 = k(k-1)\frac{x^2}{2}$$

Se $n = 3$, obtemos

$$a_3 = \frac{1}{3!}x^3\left[\frac{d^3}{dx^3}(1+x)^k\right]_0 = \frac{1}{3!}x^3\left[k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3}\right]_0$$

$$a_3 = k(k-1)(k-2)\frac{x^3}{3!}$$

e assim sucessivamente. O termo geral é

$$a_n = \frac{k!}{(k-n)!}\frac{x^n}{n!}$$

e a série de Taylor é

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\frac{x^n}{n!}$$

ou

$$(1+x)^k = 1 + kx + k(k-1)\frac{x^2}{2} + k(k-1)(k-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{k!}{(k-n)!}\frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (2.6)$$

Quando existem duas variáveis, as derivadas tornam-se parciais, e a série de Taylor de $f(x,y)$ em torno de (x_0, y_0) fica

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!m!}\left.\frac{\partial^{(n+m)}f(x,y)}{\partial x^n \partial y^m}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)^n(y-y_0)^m \quad (2.7)$$

ou

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^3}(x-x_0)^3 \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^2 \partial y}(x-x_0)^2(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y^2}(x-x_0)(y-y_0)^2 \\
&+ \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial y^3}(y-y_0)^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

que é a série de Taylor de uma função de duas variáveis. Se forem três variáveis, a série de Taylor de $f(x,y,z)$ em torno do ponto (x_0,y_0,z_0) fica

$$
f(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!j!}\frac{\partial^{(n+m+j)} f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x^n \partial y^m \partial z^j}(x-x_0)^n(y-y_0)^m(z-z_0)^j \tag{2.8}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) &+ \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}(x-x_0) \\
&+ \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}(z-z_0) + \cdots
\end{aligned}
$$

que pode ser escrita também como

$$
f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) + (\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot \nabla f(\vec{r}_0) + \cdots \tag{2.9}
$$

em que aparecem os operadores diferenciais vetoriais. Vejamos agora outra série de grande importância.

2.2 Série de Fourier

Considere uma função $f(x)$ definida num intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$. Nesse intervalo, essa função pode ser expandida numa série, chamada série de Fourier, dada pela expressão

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right] \tag{2.10}$$

Para encontrar os coeficientes a_n e b_n, efetuamos o produto da equação acima respectivamente com $\cos mx$ e $\operatorname{sen} mx$, sendo m um número natural, e o integramos no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$. Assim, para os a_n, temos, supondo $m \neq 0$,

$$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \cos mx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos mx\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \cos mx\, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nx \cos mx\, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = \frac{a_0}{2} \left[\frac{\operatorname{sen} mx}{m}\right]_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx\, dx \tag{2.11}$$

Na expressão acima, o termo que multiplica a_0 é nulo, porque ele é o seno de um múltiplo inteiro de π. As outras integrais, para serem efetuadas, precisam de algumas manipulações, baseadas nas seguintes propriedades de senos e cossenos:

$$\cos\theta \cos\alpha = \frac{1}{2} \cos(\theta + \alpha) + \frac{1}{2} \cos(\theta - \alpha) \tag{2.12a}$$

$$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} \cos(\theta - \alpha) - \frac{1}{2} \cos(\theta + \alpha) \tag{2.12b}$$

$$\operatorname{sen}\theta \cos\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\theta + \alpha) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\theta - \alpha) \tag{2.12c}$$

A primeira integral é modificada mediante a utilização da expressão 2.12a, e ela fica

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2}\cos(n+m)x + \frac{1}{2}\cos(n-m)x\right] dx$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x \, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x \, dx$$

Para qualquer valor de n, temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x \, dx = \left[\frac{\text{sen}(n+m)x}{n+m}\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x \, dx = 0$$

Se $n \neq m$, obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x \, dx = \left[\frac{\text{sen}(n-m)x}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x \, dx = 0$$

e quando $n = m$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\overbrace{n-m}^{0})x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx$$
$$= [x]_{-\pi}^{\pi}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x \, dx = 2\pi$$

E assim, apenas quando $n = m$ temos um termo não-nulo. Para indicar isso, podemos utilizar o símbolo chamado *delta de Kronecker*, definido por

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{2.13}$$

Com o uso do delta de Kronecker, a integral inicial fica

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x \, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x \, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}2\pi\delta_{n,m}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \pi\delta_{n,m} \tag{2.14}$$

A segunda integral em 2.11 é reexpressa através da utilização da equação 2.12c, ou seja,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(n+m)x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(n-m)x\right] dx$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n+m)x\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n-m)x\, dx$$

Para a primeira integral, qualquer que seja o valor de n, o resultado é

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n+m)x\, dx &= \left[\frac{-\cos(n+m)x}{n+m}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{n+m}[\cos(n+m)\pi - \cos(n+m)(-\pi)] \\ &= -\frac{1}{n+m}[\cos(n+m)\pi - \cos(n+m)\pi]\end{aligned}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n+m)x\, dx = 0$$

Na segunda integral, se $n = m$, temos o resultado imediato de que a integral é nula, pois o integrando se anula. Quando $n \neq m$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n-m)x\, dx &= \left[\frac{-\cos(n-m)x}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{n-m}[\cos(n-m)\pi - \cos(n-m)(-\pi)] \\ &= -\frac{1}{n-m}[\cos(n-m)\pi - \cos(n-m)\pi]\end{aligned}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n-m)x\, dx = 0$$

e assim,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n+m)x\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n-m)x\, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx = 0, \qquad \forall n, m \tag{2.15}$$

Voltando à equação 2.11, encontramos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi \delta_{n,m} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \pi \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{n,m}}^{a_m}$$

ou

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \pi a_m$$
$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx, \qquad m > 0$$

Para encontrar a_0, basta integrar a série 2.10 no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\ dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right]\ dx \\
&= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\ dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nx\ dx \\
&= \frac{a_0}{2} [x]_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{a_0}{2} 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} [\cos n\pi - \cos n(-\pi)] \\
&= a_0 \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.0
\end{aligned}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = a_0 \pi$$

isto é,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

e portanto,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx, \qquad m \geq 0 \tag{2.16}$$

Para encontrar os coeficientes b_n, fazemos o produto da expressão 2.10 com $\operatorname{sen} mx$, e o integramos no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, ou seja,

$$f(x) \operatorname{sen} mx = \frac{a_0}{2} \operatorname{sen} mx + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx] \operatorname{sen} mx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \operatorname{sen} mx\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx] \operatorname{sen} mx\, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \operatorname{sen} mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\, dx = \frac{a_0}{2} \left[\frac{-\cos mx}{m} \right]_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, dx \tag{2.17}$$

Na expressão acima, o termo que envolve a_0 é nulo, e da mesma forma, a primeira integral, como mostra a equação 2.15. Para a segunda integral, utilizamos a expressão 2.12b, o que faz com que ela fique sendo

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} \cos(n-m) - \frac{1}{2} \cos(n+m) \right] dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)\, dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)\, dx$$

A segunda integral acima vale, para qualquer n,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)\,dx = \left[\frac{-\operatorname{sen}(n+m)}{n+m}\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)\,dx = 0$$

A primeira integral, quando $n \neq m$, é

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)\,dx = \left[\frac{-\operatorname{sen}(n-m)}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)\,dx = 0$$

e quando $n = m$, temos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} dx \\ &= [x]_{-\pi}^{\pi} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)\,dx &= 2\pi\end{aligned}$$

e assim, utilizando a função delta de Kronecker, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)\,dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)\,dx \\ &= \frac{1}{2}2\pi\delta_{n,m} - \frac{1}{2}.0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\,dx &= \pi\delta_{n,m}\end{aligned} \tag{2.18}$$

e a expressão 2.17 fica

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\,dx = \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \pi \delta_{n,m}}^{\pi b_m}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\,dx = \pi b_m$$

ou

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx \, dx \qquad m > 0 \tag{2.19}$$

Quando o intervalo em que se precisa da série de Fourier de uma função é diferente de $-\pi \leq x \leq \pi$, é possível adaptar as expressões 2.10, 2.16 e 2.19 através de uma mudança apropriada de variáveis. Vejamos um exemplo de cálculo de série de Fourier. Vamos encontrar a série de Fourier da função $f(x) = x$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{+\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\pi^2 - \pi^2 \right) \\ a_0 &= 0 \end{aligned}$$

Os outros a_n são

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x \cos nx \, dx \end{aligned}$$

Esta integral é resolvida por partes, através de

$$\begin{aligned} u = x \quad &\Rightarrow \quad du = dx \\ dv = \cos nx \, dx \quad &\Rightarrow \quad v = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \end{aligned}$$

e temos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x \cos nx \, dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \left\{ \overbrace{\left[x \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \right]_{-\pi}^{+\pi}}^{0} - \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \, dx \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{+\pi} \\
&= \frac{1}{n^2\pi}\left[\cos n\pi - \cos(-n\pi)\right] \\
&= \frac{1}{n^2\pi}\left(\cos n\pi - \cos n\pi\right) \\
a_n &= 0
\end{aligned}$$

e todos os a_n são nulos. Vamos calcular os b_n.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx
\end{aligned}$$

Esta integral também é resolvida por partes, substituindo

$$\begin{aligned}
u = x \quad &\Rightarrow \quad du = dx \\
dv = \operatorname{sen} nx \, dx \quad &\Rightarrow \quad v = -\frac{\cos nx}{n}
\end{aligned}$$

A integral fica

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{-\left[x\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{+\pi} + \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos nx}{n} \, dx\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi\cos n\pi - (-\pi)\cos(-n\pi)}{n} + \overbrace{\left[\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{+\pi}}^{0}\right\} \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left(\pi\cos n\pi + \pi\cos n\pi\right) \\
&= -\frac{2\cos n\pi}{n} \\
&= -\frac{2(-1)^n}{n} \\
b_n &= (-1)^{n+1}\frac{2}{n}
\end{aligned}$$

e assim, $f(x) = x$ possui a seguinte série de Fourier:

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \tag{2.20}$$

Além da série de Fourier normal, dada na equação 2.10, também são definidas a *série de Fourier em cossenos* e a *série de Fourier em senos.* A série de Fourier em cossenos de uma função $f(x)$ é

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{2.21}$$

onde

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \tag{2.22}$$

A série de Fourier em senos de uma função $f(x)$ é a série dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \tag{2.23}$$

sendo que

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \tag{2.24}$$

Note que ambas as séries acima são definidas nos intervalos $0 \leq x \leq \pi$. Assim, essas séries podem ser bastante relevantes em problemas que têm condições de contorno assimétricas. Com condições de contorno simétricas, é mais indicado utilizar a série de Fourier normal, por causa de seu intervalo simétrico $-\pi \leq x \leq \pi$. A demonstração das expressões 2.22 e 2.24 é deixada como exercício (veja os exercícios 2.4 e 2.6). Além disso, caso tenhamos uma função $f(x, y)$ de duas variáveis, ela pode ser expandida em uma *série dupla de Fourier*, dada por

$$f(x, y) = \frac{a_0}{4} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny \right] \tag{2.25}$$

sendo que os coeficientes $a_{m,n}$ e $b_{m,n}$ podem ser obtidos através das equações

$$a_{m,n} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\cos mx \cos ny\, dxdy, \qquad m,n \geq 0 \tag{2.26}$$

e

$$b_{m,n} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\,\text{sen}\, mx\, \text{sen}\, ny\, dxdy \qquad m,n > 0 \tag{2.27}$$

cujas demonstrações, que seguem os passos feitos para a série de Fourier de uma variável, são deixadas como exercício (veja o exercício 2.8). Em certas situações, pode ser mais interessante utilizar a *série dupla de Fourier em cossenos* ou a *série dupla de Fourier em senos*, dadas, respectivamente, por

$$f(x,y) = \frac{a_{0,0}}{4} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}\cos mx \cos ny \tag{2.28}$$

onde

$$a_{m,n} = \frac{4}{\pi^2}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x,y)\cos mx \cos ny\, dxdy \tag{2.29}$$

e

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,n}\,\text{sen}\, mx\, \text{sen}\, ny \tag{2.30}$$

sendo que

$$b_{m,n} = \frac{4}{\pi^2}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x,y)\,\text{sen}\, mx\, \text{sen}\, ny\, dxdy \tag{2.31}$$

As demonstrações das equações acima também são deixadas como exercício (veja os exercícios 2.9 e 2.12). A extensão destas expressões para funções de qualquer número de variáveis é imediata. Vejamos agora outra série relevante.

2.3 Série Geométrica

A série geométrica é formada pelos termos de uma progressão geométrica (PG), que é uma seqüência de números em que se verifica que $a_{n+1} = ra_n$. Por exemplo, a série

$$\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32\}$$

é uma progressão geométrica com $r = 2$ e $a_0 = 1$. Numa progressão geométrica, temos, iniciando com a_0,

$$\begin{aligned} a_1 &= ra_0 \\ a_2 &= ra_1 = r^2 a_0 \\ a_3 &= ra_2 = r^3 a_0 \\ \vdots &= \quad \vdots \\ a_n &= ra_{n-1} = r^n a_0 \end{aligned}$$

e o termo geral de uma PG de razão r que tem a_0 como primeiro termo é

$$a_n = a_0 r^n$$

A soma da série geométrica é a soma dos termos de uma PG, isto é,

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \tag{2.32}$$

que é a soma dos n primeiros termos da PG. Multiplicando esta equação por r, temos

$$rS_n = ra_0 + ra_1 + ra_2 + \cdots + ra_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{2.33}$$

Agora, subtraímos a equação 2.32 da 2.33, ou seja,

$$\begin{aligned} rS_n - S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n - a_0 - a_1 - a_2 - \cdots - a_{n-1} \\ (r-1)S_n &= a_n - a_0 \\ S_n &= \frac{r^n a_0 - a_0}{r-1} \\ S_n &= a_0 \frac{r^n - 1}{r-1} \\ S_n &= \frac{a_0(1-r^n)}{1-r} \end{aligned} \tag{2.34}$$

que dá a soma dos n primeiros termos da PG finita. Quando $n \to \infty$, a soma torna-se infinita, e temos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0(1-r^n)}{1-r}$$

Quando $|r| \geq 1$, esse limite diverge, e a soma diverge. Quando $|r| < 1$, o limite fica

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0(1-r^n)}{1-r}$$
$$S_\infty = \frac{a_0}{1-r} \tag{2.35}$$

que é a soma infinita de uma série geométrica, desde que a razão seja menor do que 1.

2.4 Exercícios

2.1 Ache a série de Taylor em torno de $x = 0$ das seguintes funções:

a) $f(x) = e^{x^2}$

b) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$

c) $f(x) = \ln(2x+1)$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

2.2 Obtenha a série de Taylor das funções acima em torno de $x = 3$.

2.3 Calcule, em torno do ponto $(0,0)$, a série de Taylor para as funções abaixo.

a) $f(x,y) = x^2y + e^y$

b) $f(x,y) = \ln(x+y+1)$

c) $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

d) $f(x,y) = \frac{\cos y}{1+x}$

e) $f(x,y) = \frac{(1+y)^4}{\sqrt{1+x}}$

2.4 Demonstre, seguindo os passos feitos para a série de Fourier normal, que os coeficientes a_n da série de Fourier em cossenos 2.21 são dados pela expressão 2.22.

2.5 Ache alguns termos da série de Fourier das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \operatorname{tg} x$

c) $f(x) = x \operatorname{sen} x$

d) $f(x) = e^{2x}$

e) $f(x) = x^3 + 2x$

2.6 Mostre que os coeficientes b_n da série de Fourier em senos 2.23 são obtidos através da equação 2.24.

2.7 Obtenha alguns termos das séries de Fourier em senos e em cossenos das funções definidas no item 2.5.

2.8 Deduza as expressões 2.26 e 2.27 para os coeficientes da série dupla de Fourier de $f(x, y)$. Sugestão: observe como foi feita a demonstração para a série de Fourier de $f(x)$.

2.9 Mostre que os coeficientes $a_{m,n}$ da série dupla de Fourier em cossenos 2.28 são dados pela expressão 2.29. Observe o exercício 2.4, se necessário.

2.10 Calcule alguns termos da série dupla de Fourier das funções abaixo.

a) $f(x, y) = y \operatorname{sen} x$

b) $f(x, y) = 2x + y^2$

c) $f(x, y) = x \operatorname{tg} 2y$

d) $f(x, y) = \sec xy$

e) $f(x, y) = e^{x+y}$

2.11 Ache as séries de Fourier em senos e cossenos das funções do exercício anterior.

2.12 Demonstre, seguindo os passos do exercício 2.6, que os coeficientes $b_{m,n}$ da série dupla de Fourier em senos 2.30 são dados pela equação 2.31.

2.13 Obtenha expressões para as séries triplas de Fourier normal, em senos e em cossenos.

2.14 Qual é a soma da série geométrica infinita definida por

$$\{1,\, x,\, x^2,\, x^3,\, \ldots\}$$

quando $x < 1$?

2.15 Considere um tabuleiro de xadrez. Neste tabuleiro, você coloca um grão de feijão na primeira casa, dois grãos na segunda casa, quatro na terceira casa, e assim sucessivamente, sempre dobrando o número de grãos de uma casa para a seguinte. Qual o número total de grãos de feijão que será utilizado? Considere que cada pé de feijão forneça cerca de 20 grãos por safra, e que ocupe uma área em torno de 0,01 m^2. Qual a área que deve ser plantada com feijão para produzir a quantidade de grãos necessária? Dê a resposta em números absolutos e em termos da área da Terra ($R_T \simeq 6367$ km).

Parte II

ELETROSTÁTICA

Capítulo 3

Carga e Força Elétrica

Neste capítulo iniciamos o estudo da Eletrostática, que é a parte do Eletromagnetismo dedicada aos fenômenos elétricos estacionários, em que as cargas não se movem.

3.1 Carga Elétrica

Os fenômenos relacionados à eletricidade (e também ao magnetismo) são conhecidos desde a Antigüidade. Na Grécia já se tinha conhecimento de que, ao se atritar *âmbar*, que é uma resina vegetal fóssil, amarelada e translúcida, é possível atrair pequenos corpos, como palha, sementes, etc. Isso era obtido também com outros materiais, com graus variados de intensidade. O âmbar era um material apropriado para a produção desse efeito, e a atração foi chamada elétrica, do grego *elektron*, que significa âmbar. No entanto, inicialmente supunha-se que esta força podia ser apenas atrativa.

Coube a Charles Du Fay, pesquisador francês, demonstrar que a interação pode ser tanto atrativa quanto repulsiva. Para tanto, podemos utilizar, por exemplo, bastões de vidro atritados em seda. Os bastões atraem outros corpos, como papel, mas entre eles há repulsão. Isto levou à convenção de sinais para as cargas, estabelecida em torno de 1750 por Benjamin Franklin. Também nessa época, já se percebia que existem dois tipos principais de materiais, os *isolantes* ou *dielétricos*, como o vidro e plásticos, e os *condutores*, como os metais em geral. Nos isolantes, as cargas elétricas não se movem facilmente, ao contrário do que ocorre nos condutores, em que elas têm uma

grande mobilidade. Por causa disso, é muito fácil transferir cargas para corpos isolantes através de um processo de atrito, chamado de *eletrização por atrito* ou *triboeletrização*, mas é difícil transferir cargas se o corpo for condutor, pois a carga transferida é muito móvel e acaba por retornar ao corpo de onde saiu [1]. As verificações acima levaram ao aparecimento da Eletricidade, parte da Física que estuda os fenômenos relacionados às cargas elétricas. Mas, o que são as cargas elétricas?

A carga elétrica é uma propriedade da matéria, da mesma forma que a massa. Estas duas propriedades geram dois dos quatro tipos de forças fundamentais na Física: a força gravitacional, associada a qualquer massa, e a força elétrica (ou, mais precisamente, eletromagnética), associada à carga elétrica. As cargas elétricas elementares são constituídas, no nível atômico, pelos elétrons e pelos prótons que formam os átomos. Os elétrons e os prótons contêm cargas de sinais opostos e de mesmo módulo, sendo a carga do elétron negativa e a do próton, positiva. O nêutron, como o próprio nome sugere, não possui carga elétrica. É importante notar que, no nível atômico e nos níveis cujas dimensões são maiores do que ele, a carga elétrica só existe em valores múltiplos inteiros da carga do elétron ou do próton, não sendo possíveis valores fracionários. Por causa disso, dizemos que a carga elétrica é discretizada, e *quantizada*. A carga elementar do próton vale $1,6021892 \times 10^{-19}$ C, e ela é simbolizada por e, enquanto a carga do elétron tem exatamente o mesmo valor numérico, apenas com sinal negativo: $-1,6021892 \times 10^{-19}$ C, ou $-e$. A unidade utilizada para medir cargas elétricas é o coulomb, símbolo C [2], em homenagem a Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), que foi o primeiro a obter de forma experimental a lei de força que leva seu nome.

A Física de Partículas Elementares mostrou que as partículas atômicas que conhecemos, como o próton e o nêutron, são formadas por partículas ainda menores, os *quarks*, que têm cargas fracionárias bem definidas em $\pm\frac{1}{3}$ e e $\pm\frac{2}{3}$ e. No entanto, entre essas partículas age a *força nuclear forte*, terceiro tipo de força fundamental da natureza, que não permite que elas sejam encontradas livres, fora do próton, nêutron, etc. Assim, nas escalas de tamanho atômicas ou maiores, observam-se

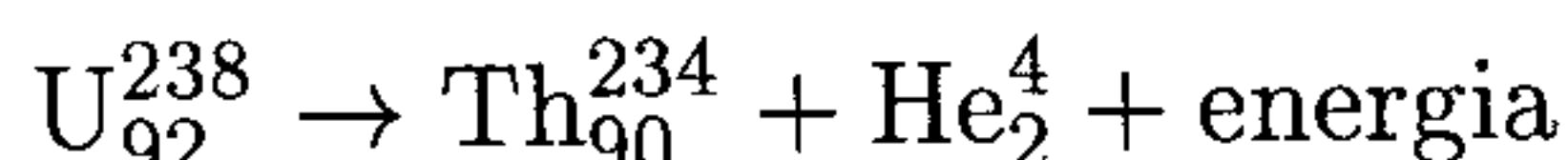
---

[1] Com os avanços nas áreas de Física de Estado Sólido e Eletrônica, outro tipo de material apareceu. Tais materiais são chamados *semicondutores*, como, por exemplo, o silício e o germânio, e eles têm propriedades intermediárias entre as dos condutores e os isolantes.

[2] Note que o coulomb não é uma unidade fundamental do SI. Na verdade, ele é definido a partir do ampère, símbolo A, através de 1 C = 1 A.s.

prótons, nêutrons e outras partículas, que possuem cargas elétricas que são múltiplos inteiros da carga do elétron. O elétron, ao que se sabe até o momento, não é formado por nenhuma subpartícula.

Em qualquer processo envolvendo as cargas, a carga total sempre deve ser conservada, pois não pode haver criação ou destruição das cargas elétricas. Isso é verificado mesmo em processos nucleares, como o decaimento radioativo do urânio,

$$\mathrm{U}_{92}^{238} \rightarrow \mathrm{Th}_{90}^{234} + \mathrm{He}_2^4 + \text{energia}$$

ou em uma produção de pares, que é a reação

$$\gamma + \gamma \leftrightarrows e^- + e^+$$

onde γ são fótons de radiação gama, com uma dada energia, e^- é um elétron, de carga negativa, e e^+ é uma partícula idêntica ao elétron, com a característica de que sua carga é positiva, e não negativa, como no caso do elétron. Esta partícula, chamada *pósitron*, é a antipartícula do elétron. Cada partícula possui uma antipartícula [3], e a estas antipartículas dá-se o nome de *antimatéria*. A carga antes da reação é nula, e depois, temos um elétron, de carga negativa, e um pósitron, de carga positiva, e a carga total continua sendo nula.

Um corpo em estado normal é eletricamente neutro, pois é formado, em última análise, por átomos, que são eletricamente neutros, já que eles têm um número de elétrons igual ao de prótons. Assim, quando eletrizamos um corpo, ocorrem apenas transferências de cargas envolvendo esse corpo e os outros que participam do processo de eletrização. Assim, supondo dois corpos, numa eletrização, um deles fica carregado negativamente enquanto o outro adquire uma carga positiva de igual magnitude. Como os prótons estão fixos nos núcleos dos átomos, os elétrons, que têm uma mobilidade muito maior, são transferidos de um corpo para outro. Portanto, se um corpo fica negativo, é porque ganhou elétrons, que vieram de outro corpo que os perdeu e que, conseqüentemente, ficou com excesso de cargas positivas, ou falta de cargas negativas, tendo ganho uma carga total positiva. Essas transferências de carga podem se dar através dos processos de eletrização. Alguns processos de eletrização ocorrem mais facilmente entre condutores, e outros são mais comuns entre isolantes.

---

[3] A antipartícula do próton p^+ é o *antipróton*, p^-, e a do nêutron n^0 é o *antinêutron*, $\overline{n}^0$.

A explicação detalhada sobre o que faz um material ser condutor, semicondutor ou isolante pode ser encontrada em livros de Física do Estado Sólido, como aqueles citados nas referências bibliográficas. Podemos nos valer de uma analogia para entender qualitativamente o processo. Considere um grande reservatório contendo água (uma represa, por exemplo) e um reservatório menor (um tanque) na sua casa. Para transferir água da represa para o tanque você dispõe apenas de um balde. Se você mora perto da represa, será fácil encher o tanque da sua casa. Entretanto, se você mora longe dela, o processo de encher o tanque torna-se cansativo e difícil. Se você mora nem muito perto, nem muito longe, a dificuldade será intermediária.

Passando agora para o caso elétrico, a água corresponde aos elétrons, e os reservatórios são chamados *bandas*. A represa, que tem a maior quantidade de água, ou de elétrons, é a *banda de valência*, enquanto o tanque é a *banda de condução*, como ilustra a figura 3.1.

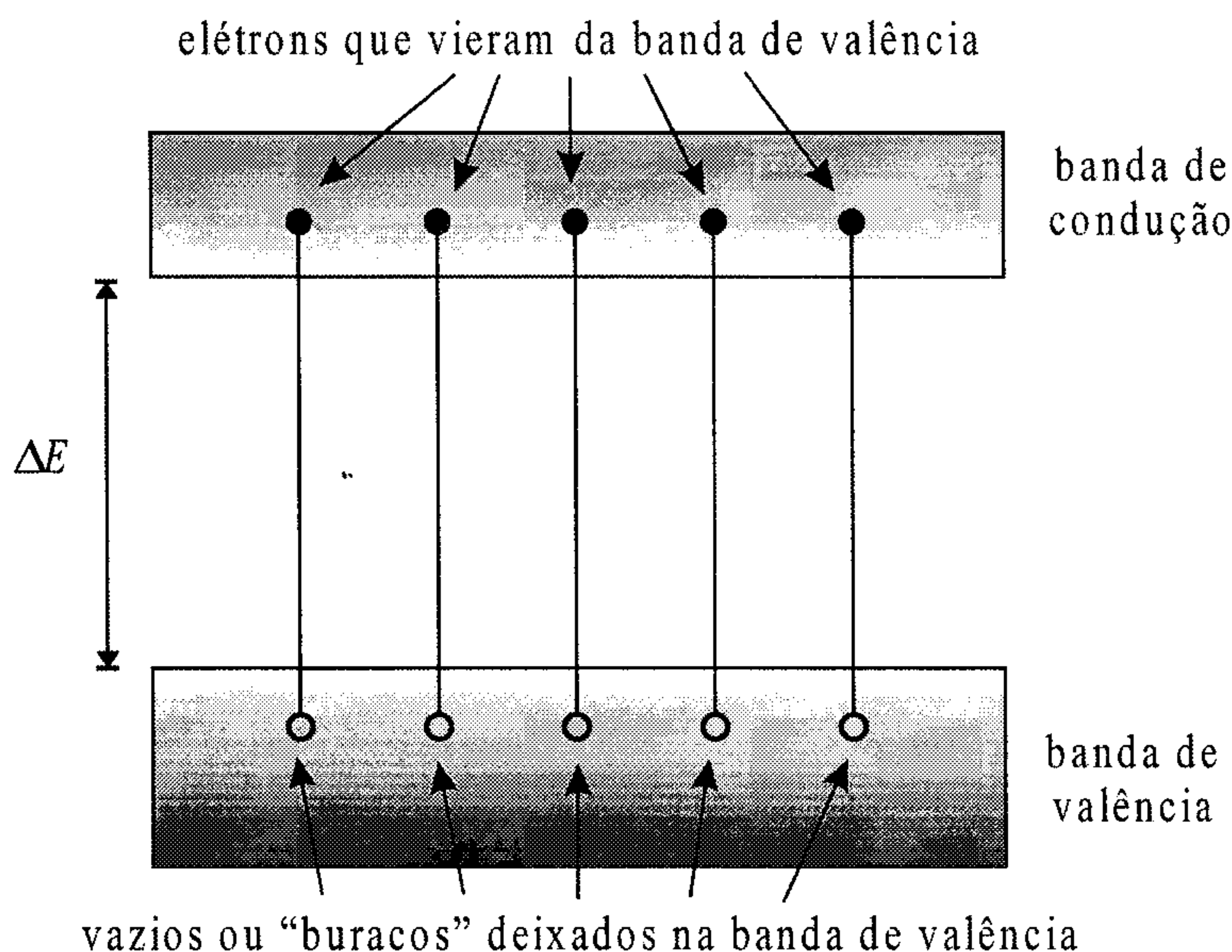



Figura 3.1: Bandas de valência e de condução para um material qualquer.

A distância espacial entre os reservatórios de água é substituída pela diferença de energia ΔE entre a base da banda de condução e o topo da banda de valência. Quando essa diferença de energia é bem pequena ou mesmo nula, o material é um condutor, pois os elétrons que estão na banda de valência podem passar facilmente para a banda de condução, através de uma excitação térmica, por exemplo. O material tem muitos elétrons na banda de condução e ele é um condutor.

Quando a diferença de energia é grande, os elétrons, para passar da banda de valência para a banda de condução, precisam receber uma quantidade apreciável de energia, que, em geral, não está

disponível, e portanto, este é um evento que ocorre com uma freqüência estatística baixa. Assim, esse material possui muito poucos elétrons na banda de condução, e ele é um isolante ou dielétrico. Por fim, quando o intervalo de energia é da ordem de $3,2 \times 10^{-19}$ J ou um pouco menor, a energia proveniente da excitação térmica pode fazer com que um certo número de elétrons, nem muito grande, nem muito pequeno, passe da banda de valência para a banda de condução, caracterizando dessa forma um material semicondutor intrínseco. Novamente indicamos os livros de Física de Estado Sólido listados nas referências bibliográficas para um aprofundamento desta questão.

3.2 Processos de Eletrização

A eletrização de um corpo pode ocorrer basicamente através de três processos, apresentados a seguir.

3.2.1 Eletrização por Atrito ou Triboeletrização

O processo de eletrização por atrito, também chamado de triboeletrização, é o mais antigo, mais comum e mais conhecido processo de eletrização. Nesse processo, dois corpos inicialmente neutros são atritados um no outro, como mostra a figura 3.2, e com isso, alguns elétrons de um dos corpos são arrancados e transferidos para o outro corpo.

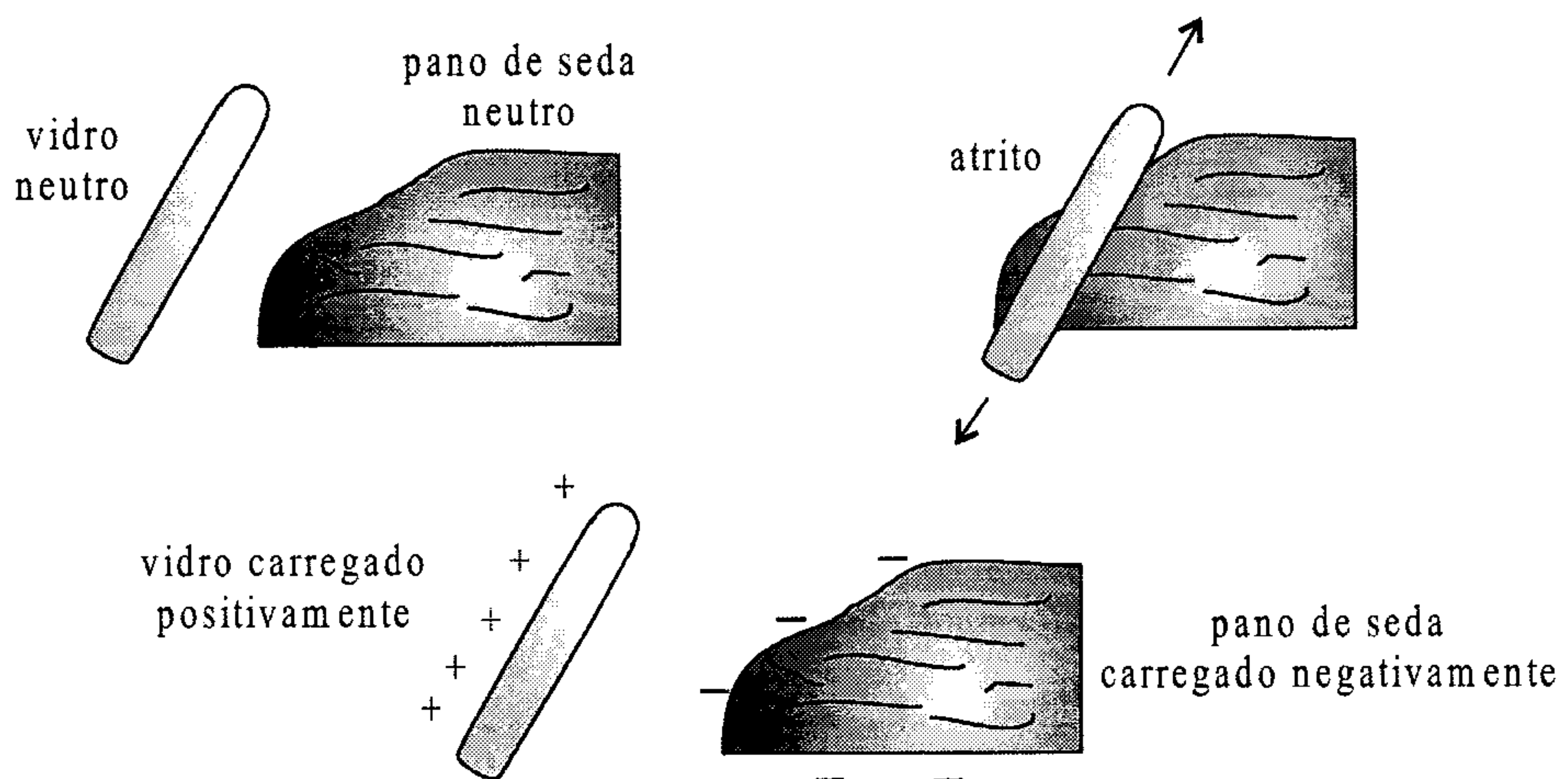



Figura 3.2: Processo de eletrização por atrito.

A triboeletrização só ocorre entre corpos feitos de materiais diferentes, e um mesmo material pode tanto perder elétrons, ficando positivamente carregado, quanto ganhar elétrons, ficando negativamente carregado. Isso depende do outro material com que se dá o atrito. Como exemplo, quando algodão é atritado com vidro, o vidro perde elétrons para o algodão e torna-se positivo, enquanto o algodão fica negativo. Já no caso do atrito entre âmbar e algodão, o que ocorre é que o algodão perde elétrons para o âmbar, tornando-se positivo, ao passo que o âmbar fica negativo. Através de várias experimentações, construiu-se uma série triboelétrica dos materiais, que mostra que, se um dado material for atritado com algum outro material que se situa abaixo dele nessa série, ele se tornará positivo, e que, se ele for atritado com algum material que se situa acima dele nessa série, ele se tornará negativo. Uma parte da série triboelétrica é apresentada na tabela 3.1.

	Materiais	⊕
↓	Pele de coelho	↑
↓	Vidro	↑
↓	Mica	↑
↓	Lã	↑
↓	Pele de gato	↑
↓	Seda	↑
↓	Algodão	↑
↓	Madeira	↑
↓	Âmbar	↑
↓	Resinas	↑
↓	Metais em geral (cobre, níquel, prata)	↑
↓	Enxofre	↑
↓	Celulóide	↑
⊖		

Tabela 3.1: Série triboelétrica para alguns materiais.

É preciso ressaltar que na eletrização por atrito os dois corpos adquirem a mesma quantidade de carga em módulo, ainda que os sinais das cargas sejam opostos.

A eletrização por atrito pode provocar alguns efeitos indesejáveis. Por exemplo, o atrito com o ar faz com que um caminhão que transporta com-

bustível fique carregado eletricamente, e uma pessoa que o tocar — servindo de condutor de corrente elétrica —, pode sofrer um choque de intensidade considerável. Além disso, podem ocorrer pequenas fagulhas, com o risco da explosão do combustível. Para evitar isso, caminhões para transporte de combustível normalmente arrastam uma corrente de metal pelo chão, para que a carga adquirida por atrito seja descarregada na Terra. Outro fenômeno comum são os estralos que ocorrem quando alguém tira uma blusa de lã que ficou carregada por atrito com o ar durante o dia, e, nessa mesma linha, observa-se que pentes, em dias secos, após terem sido usados para pentear os cabelos, atraem pedacinhos de papel. Em todos esses casos, ocorre eletrização por atrito, que produz a *eletricidade estática.*

3.2.2 Eletrização por Contato

O processo de eletrização por contato é muito comum em materiais condutores, porque neles ocorre grande mobilidade dos elétrons, e é mais difícil de ocorrer em materiais isolantes. Nesse processo, um material já eletrizado com uma certa quantidade de carga, seja positiva ou negativa, é posto em contato com outro corpo inicialmente neutro. Se o corpo carregado for negativo, ocorre um fluxo de elétrons desse corpo, que tem elétrons demais, para o corpo neutro, e os dois adquirem uma certa carga negativa, de tal forma que a soma das cargas é igual à carga inicial do corpo carregado. Se o corpo for positivo, então lhe faltam elétrons, e alguns elétrons do material neutro passam para ele. O resultado é que os dois ficam positivos, com cargas tais que sua soma é igual à carga positiva original, confirmando a conservação de cargas. A figura 3.3 mostra um esquema da eletrização por contato. Nesse processo, os dois corpos adquirem cargas de mesmo sinal, e a quantidade de cargas em cada corpo depende do tipo de material e do seu tamanho. No caso de dois condutores idênticos, a carga de cada um depois do contato será exatamente a metade da carga inicial. Assim, considerando dois corpos idênticos que antes de entrarem em contato tinham cargas q_1 e q_2, após o contato cada um terá uma carga de

$$Q_1 = Q_2 = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

o que está de acordo com a lei de conservação das cargas, pois

$$Q_1 + Q_2 = \frac{q_1 + q_2}{2} + \frac{q_1 + q_2}{2}$$

corpo positivo
corpo neutro
contato
ambos positivos
corpo negativo
corpo neutro
contato
ambos negativos

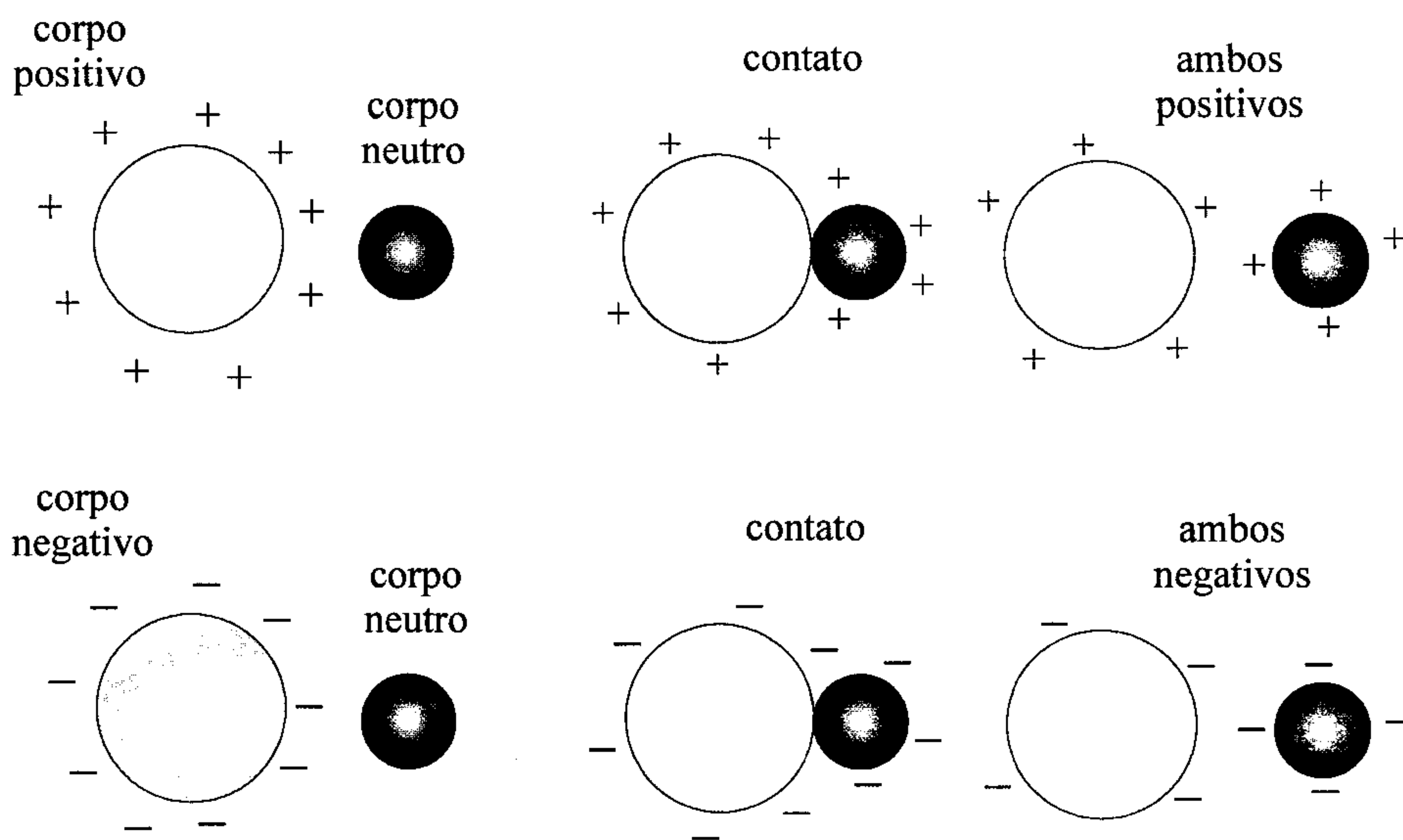



Figura 3.3: Processo de eletrização por contato.

ou

$$Q_1 + Q_2 = q_1 + q_2$$

3.2.3 Eletrização por Indução

Na eletrização por indução, temos um corpo carregado, chamado *indutor*, e um outro corpo, neutro, chamado *induzido*. Quando o indutor é aproximado do induzido, sem tocá-lo, na região do induzido mais próxima ao indutor aparecem cargas de sinal oposto ao da carga do indutor. Se o indutor é positivo, ele atrai os elétrons do induzido e, na região próxima ao indutor, o induzido fica negativo. Esses elétrons vieram das regiões mais afastadas, e assim, nessas regiões, o induzido apresenta uma carga positiva, de igual valor. Se o indutor é negativo, seus elétrons repelem os elétrons da região mais próxima do induzido, o qual fica positivo neste local, enquanto os elétrons que foram repelidos vão para a região do induzido mais afastada do indutor, ocorrendo, então, um excesso de carga negativa neste local. Ressalte-se que o induzido, como um todo, é eletricamente neutro. Este processo, que é

conhecido como indução eletrostática, dura enquanto o indutor for mantido próximo ao induzido. A figura 3.4 serve como ilustração.

indutor

corpo neutro

indutor

induzido

indutor

induzido ligado à Terra

elétrons que sobem para o induzido

fio-terra

indutor

induzido com uma carga líquida negativa

indutor

induzido com uma carga líquida negativa

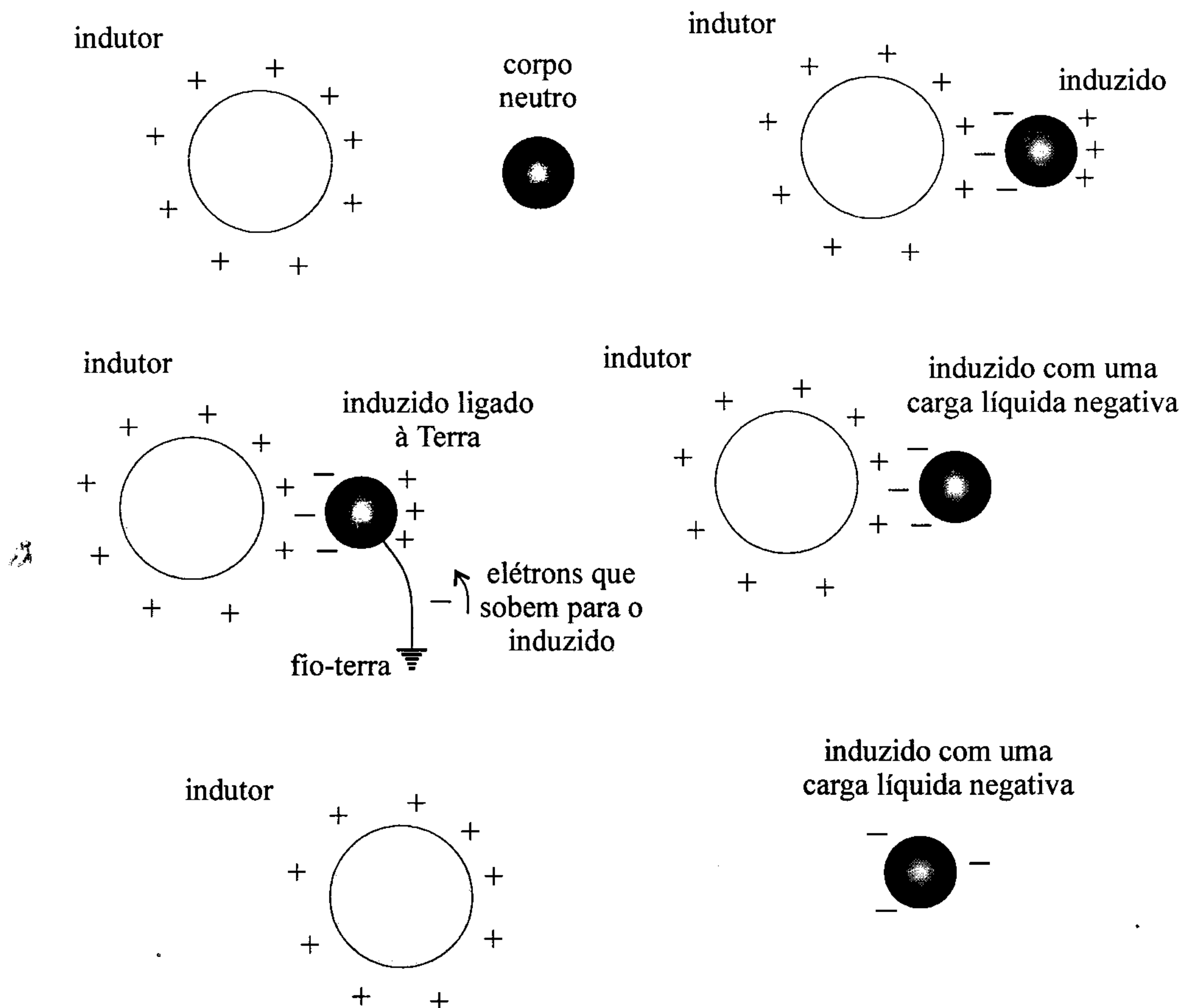



Figura 3.4: Processo de eletrização por indução.

Após o aparecimento das duas regiões com cargas diferentes no induzido, este é ligado por um fio à Terra, de forma que o excesso de cargas negativas possa ir para a Terra, no caso do indutor ser negativo, ou então, que cargas negativas passem da Terra para o induzido, quando o indutor é positivo. Assim, na região do induzido mais afastada do indutor, a neutralidade elétrica é alcançada, mas o induzido como um todo agora possui uma carga elétrica não-nula. Depois, desliga-se o fio-terra, mantendo-se o indutor próximo ao induzido, e por fim, o indutor é afastado do induzido, que agora está eletrizado

e possui uma carga elétrica de sinal oposto ao sinal da carga do indutor. Note que neste processo os dois corpos não se tocam. A ligação à Terra é chamada de aterramento. É o que acontece no caso do caminhão-tanque que arrasta uma corrente metálica pelo chão.

Por que as cargas elétricas se movem, e por que uma barra de âmbar eletrizada por atrito atrai pedacinhos de papel? Para responder a estas perguntas precisamos estudar a força elétrica.

3.3 Força Elétrica

Como comentamos no início deste capítulo, toda carga elétrica gera e pode sofrer a acão de um tipo fundamental de força, a força elétrica. Uma explicação completa de como a força elétrica age entre duas cargas elétricas precisa da *Eletrodinâmica Quântica*, a teoria física mais precisa atualmente, mas isto está além do escopo deste livro. No entanto, podemos fazer uma analogia, para facilitar o entendimento.

Vamos considerar que duas pessoas estão em pé em cima de uma superfície muito lisa, como um lago congelado, e que cada uma tem pequenas bolinhas feitas de um material qualquer. Além disso, em volta desta região existem muros cercando todas as direções, de forma que, se uma das pessoas jogar uma bolinha, esta não se perderá, ficando sempre dentro da região, o que significa que a pessoa que a jogou pode recuperá-la.

Cada pessoa pode jogar as bolinhas para qualquer lado, e o pequeno deslocamento que ocorre quando uma delas as joga numa dada direção (por causa da conservação do momento linear) é contrabalançado, em média, pelos lançamentos nas outras direções. Assim, a pessoa, em média, não sai do lugar. Em comparação com uma carga elétrica, o que ocorre é que, a todo instante, cada carga elétrica emite e recebe de volta várias dessas "bolinhas", que, nesse caso, são chamadas de *fótons*, e que constituem uma "nuvem" ao redor da carga.

Agora, digamos que as duas pessoas queiram se aproximar. Para fazer isso, podem jogar as bolinhas de tal modo que elas batam no muro e que a outra pessoa possa pegá-las na "volta". Assim, aos poucos, as pessoas vão se aproximando, como se entre elas existisse uma força atrativa. É isso que ocorre quando duas cargas de sinais opostos estão uma na presença da outra. Elas interagem por meio dos fótons, de tal forma que se atraem.

Especula-se que a atração gravitacional ocorre da mesma forma, sendo que, neste caso, as partículas que são trocadas são chamadas de ***grávitons***. Entretanto, diferentemente do caso elétrico, no caso gravitacional ainda não foi possível verificar experimentalmente esta suposição.

Quando as pessoas querem se afastar, uma joga as bolinhas em direção à outra, que as agarra na "ida", e então, elas vão se separando, como se ocorresse uma força repulsiva entre elas. Este é o caso de duas cargas de mesmo sinal, em que a troca de fótons ocorre de tal modo que as cargas se repelem.

É preciso dizer que a interação entre duas cargas quaisquer não necessita de meio material para ocorrer; ela pode se manifestar no vácuo. Além disso, a *Relatividade Restrita* diz que a velocidade máxima permitida na natureza é dada pela velocidade da luz no vácuo, e assim, a força exercida por uma carga sobre outra (ação) e a resposta que esta carga exerce sobre a primeira (reação) não ocorrem ao mesmo tempo, o que viola a terceira lei de Newton, segundo a qual, a cada ação corresponde uma reação de mesmo módulo, mesma direção, e sentido contrário, ao mesmo tempo. Isso tem graves conseqüências sobre a conservação do momento linear nesse sistema. No entanto, esta aparente violação fica descaracterizada se imaginarmos que a interação se dá em duas etapas. Primeiro, a carga interage com a "nuvem" de fótons ao redor dela, e esta, por sua vez, responde, ao mesmo tempo, através de um par de ação e reação. A força é então transportada pela "nuvem" de fótons até a posição da outra carga, e aí se estabelece um novo par de ação e reação, entre os fótons e a carga que está sofrendo a força gerada pela primeira carga. Agora, em todos os processos, a terceira lei de Newton é satisfeita, assim como a da conservação do momento linear. Conclui-se, então, que a "nuvem" dos fótons pode transportar momento linear [4].

Da analogia acima, vemos que a explicação para os processos de indução reside no fato de que cargas de mesmo sinal se repelem, enquanto cargas de sinal oposto se atraem. Portanto, a aproximação do indutor carregado do induzido neutro (o âmbar do papel) faz com que os elétrons do induzido sejam atraídos ou repelidos, conforme seja o sinal da carga do indutor, originando regiões com excesso de elétrons à custa dos elétrons de outras regiões, em que passam a faltar elétrons. A ligação do induzido à Terra permite que elétrons

[4] O mesmo problema aparece para a força gravitacional, e a explicação também se baseia no transporte de momento linear pelos grávitons.

da Terra sejam atraídos para o induzido, ou que elétrons do induzido sejam repelidos para a Terra, por causa dessas regiões de desbalanço de cargas, o que desequilibra as cargas no induzido. Quando o fio é retirado, aparece uma carga líquida no induzido, o que resulta num corpo carregado com sinal oposto ao do indutor. Quando o bastão de âmbar eletrizado se aproxima do papel, este fica com cargas induzidas, que são atraídas pelo bastão, e o papel gruda nele. Ocorre, então, eletrização por contato, e o papel adquire uma carga de mesmo sinal que o âmbar, sendo repelido pelo bastão. Além disso, a repulsão elétrica entre as cargas de mesmo sinal explica o fato de que no interior de um condutor em equilíbrio não há cargas livres, pois se houvesse, elas se repeliriam até que todas estivessem tão afastadas quanto possível, o que só ocorre quando elas estão na superfície do condutor. Num isolante, como as cargas não possuem muita mobilidade, isso não ocorre. Assim, mesmo dentro de um isolante é possível encontrar cargas livres.

A força elétrica é extremamente relevante na nossa vida. É ela que, em última análise, une os átomos para formar as moléculas, e estas para formar todas as estruturas vivas. A interação elástica da mola é produto das forças elétricas entre seus constituintes, e o atrito decorre das forças elétricas entre os átomos e moléculas dos materiais que são postos em contato. Sendo assim, é muito importante obter expressões quantitativas para a força elétrica.

A lei de gravitação de Newton estabelece que a força gravitacional é dada (em módulo) por

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

onde m_1 e m_2 são duas massas, separadas por uma distância r, e G é uma constante de proporcionalidade. Esta equação foi, e ainda é, extremamente eficaz na descrição quantitativa de fenômenos associados à Gravitação. Parece, então, razoável supor que a força elétrica entre duas cargas seja dada por uma expressão semelhante, do tipo

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

sendo q_1 e q_2 os valores das cargas, e r, a distância entre elas. O primeiro a sugerir uma expressão como essa foi Daniel Bernoulli, em 1760, mas ele baseava-se puramente em analogias. Era necessário realizar uma verificação experimental, e foi o que Coulomb fez, utilizando uma *balança de torção*, que foi posteriormente adaptada por Cavendish para determinar a constante G da

lei de gravitação de Newton, como mostra a figura 3.5. Com o auxílio desse equipamento, Coulomb pôde comprovar a forma da força elétrica dada pela expressão acima.

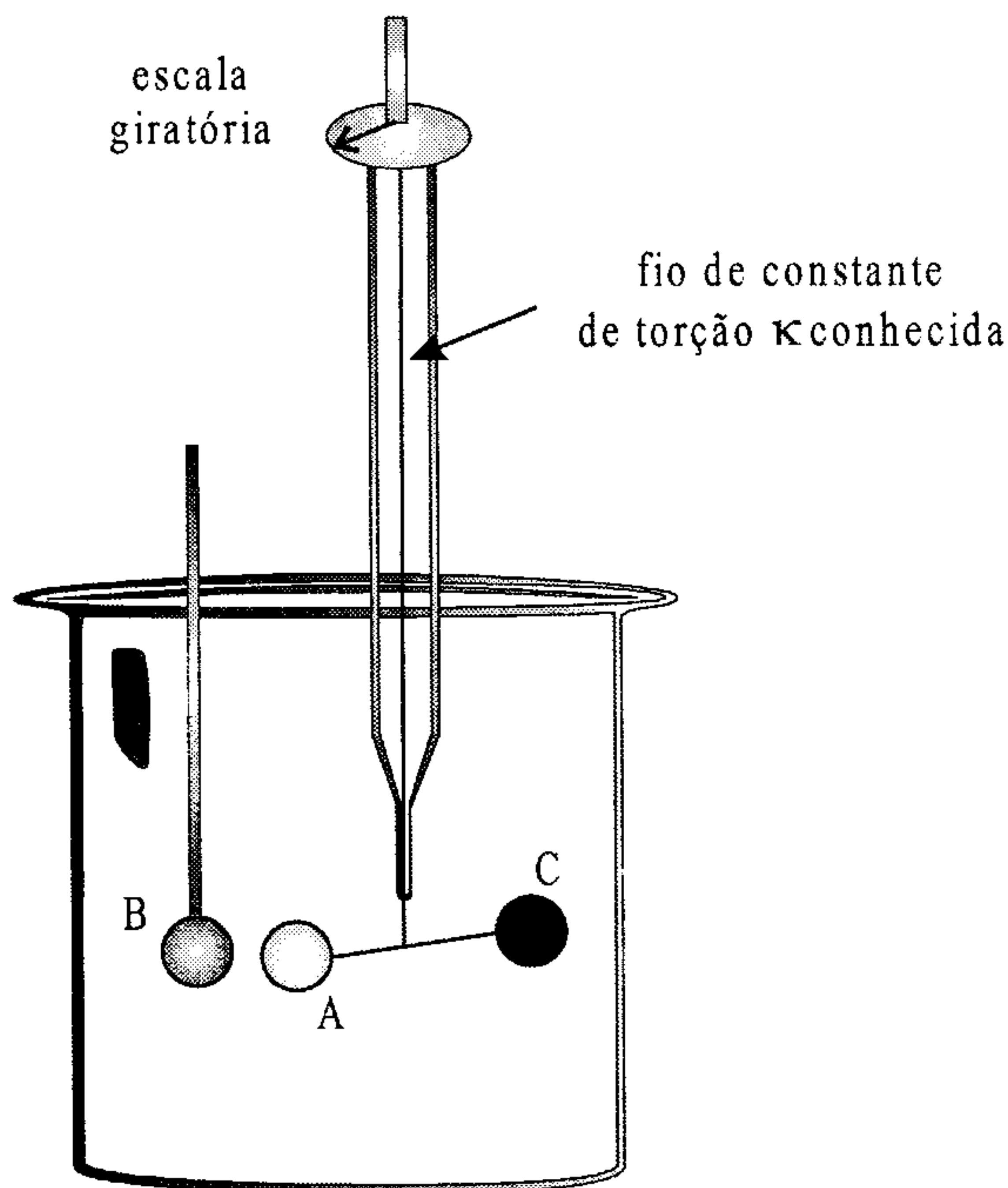



Figura 3.5: Diagrama da balança de torção de Coulomb.

Na balança de torção, existe um travessão AC horizontal que possui, numa ponta, uma esfera A com uma superfície metálica, e, na outra, um contrapeso C. Esse travessão é suspenso por um fio de constante de torção κ conhecida, preso, na parte superior, a uma escala rotatória, que pode ser girada, provocando uma torção no fio. Próximo à esfera A, a uma distância d, existe outra esfera, B, também de superfície metálica, só que fixa. A posição do travessão quando não há nenhuma carga elétrica nas esferas é a marca zero, como mostra a figura 3.6.a.

Na primeira parte da experiência, Coulomb eletrizou as duas esferas A e B com cargas de mesmo sinal [5], de forma que entre elas surgiu uma força

[5] Ele eletrizou a esfera B e, por um processo de indução, como o descrito na seção 3.2.3, a esfera A foi atraída para a esfera B, tocou-a, e metade da carga de B passou para A.

elétrica que produziu um torque sobre a esfera A, fazendo o travessão girar na horizontal e torcendo o fio, até o torque da força elétrica ser contrabalançado pelo torque gerado pela torção do fio (veja a figura 3.6.b). Coulomb então girou a escala rotatória de um certo ângulo θ, até trazer de volta o travessão à posição zero, e mediu o ângulo nessa escala, como mostra a figura 3.6.c.

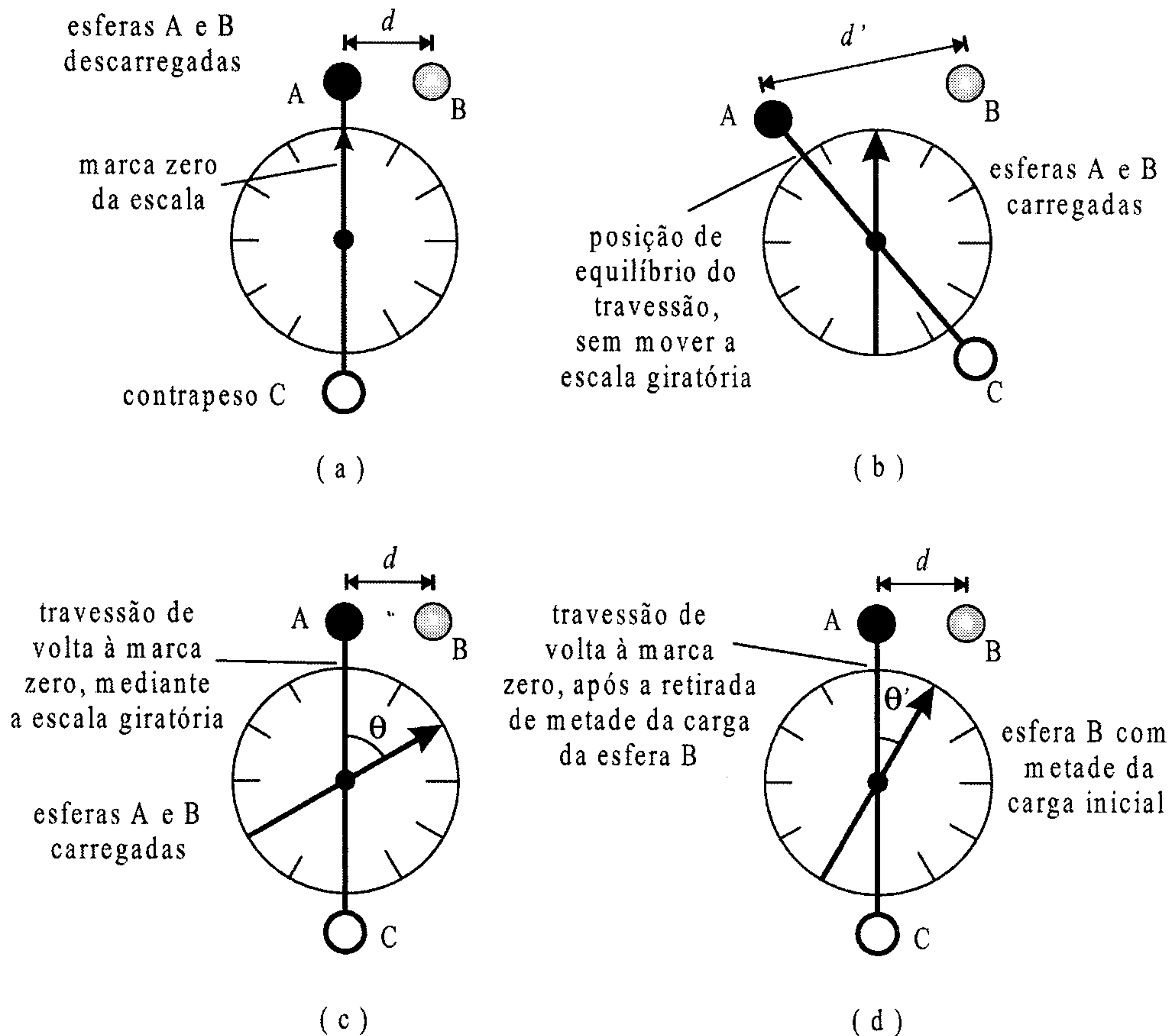



Figura 3.6: Primeira parte da experiência de Coulomb. Em (a), as esferas estão descarregadas. Em (b), o travessão afasta-se da marca zero por causa do torque gerado pela força elétrica de repulsão entre as duas esferas, agora carregadas. Em (c), a escala é girada de um ângulo θ para trazer de volta o travessão à posição original. Em (d), a carga de B é reduzida à metade, e um novo ângulo θ' é obtido.

Depois, utilizando uma esfera D idêntica à esfera B, só que descarregada, Coulomb tocou a esfera B com a D, e como elas eram idênticas, metade da carga foi transferida de B para D. Com isso, a força elétrica entre A e B diminuiu, e da mesma forma o torque, medido através do ângulo θ' de que o travessão precisava girar para voltar à posição zero (veja a figura 3.6.d). Isso foi necessário porque Coulomb queria medir, nesta parte da experiência, a influência da carga na força elétrica. Trazendo o travessão à posição zero, a distância d entre as esferas A e B se manteve igual, o que fez com que a variação na força se devesse apenas à variação das cargas. O resultado desta parte da experiência foi que, tendo sido reduzida a carga à metade, o torque também o foi, assim como a força elétrica. Portanto, a força elétrica que agia sobre A era proporcional à carga em B. Por questões de simetria relacionadas à terceira lei de Newton ou à conservação do momento linear, a força elétrica sobre B era proporcional à carga em A. Assim, como essas duas forças eram iguais em módulo por causa da terceira lei de Newton, a força elétrica sobre A também tinha que ser proporcional à carga em A. Dessa forma, a força elétrica era proporcional a ambas as cargas, e, conseqüentemente, ao produto delas.

Para verificar a relação entre a força elétrica e a distância, primeiro a experiência foi feita com a esfera B a uma distância d_1 da esfera A, quando ambas estavam neutras (veja a figura 3.7.a). Depois, cargas foram transferidas para ambas, e a força entre elas produziu uma torção no fio até que se atingiu a situação de equilíbrio, como mostra a figura 3.7.b. Então, a escala rotatória foi utilizada para trazer de volta o travessão para a posição zero, e a torção do fio foi obtida pelo ângulo θ_1 medido na escala (veja a figura 3.7.c).

Feitas estas medidas, a esfera B foi colocada a uma nova distância d_2 da esfera A. Com a variação na distância, a força elétrica também variou, e um novo torque foi gerado por essa força. Novamente, a escala foi girada para trazer de volta o travessão à posição zero, e um novo ângulo θ_2 foi medido (veja a figura 3.7.d). Como as cargas em A e B não eram alteradas, esta parte da experiência verificou a influência da distância na força elétrica. Os resultados experimentais mostraram que, com a aproximação das esferas, o ângulo medido aumenta de forma proporcional ao quadrado do inverso da distância, e isto, por sua vez, implica que a força elétrica também é proporcional ao quadrado do inverso da distância. Reunindo as duas partes da experiência, o resultado obtido pode ser sintetizado na equação

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

que já havia sido apresentada anteriormente, chamada *Lei de Coulomb.* Essas experiências não eram muito precisas, mas, mesmo assim, Coulomb conseguiu obter a forma correta da lei de força elétrica.

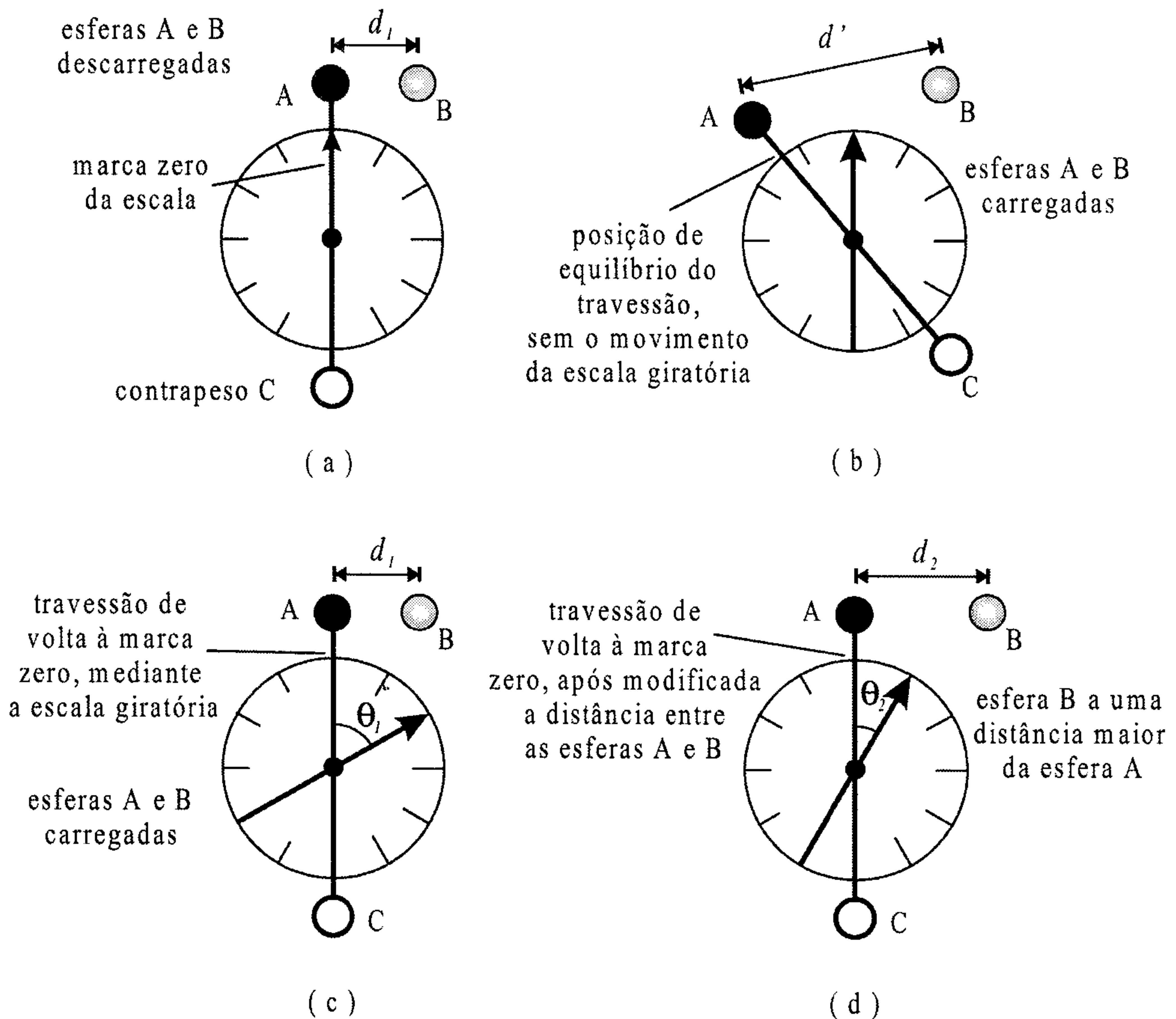



Figura 3.7: Segunda parte da experiência de Coulomb. Em (a), as esferas estão descarregadas. Em (b), o travessão afasta-se da marca zero por causa do torque gerado pela força elétrica de repulsão entre as duas esferas, agora carregadas. Em (c), a escala é girada de um ângulo θ_1 para trazer de volta o travessão à posição original, a uma distância d_1 da esfera B. Em (d), a distância entre A e B é modificada para d_2, e um novo ângulo θ_2 é obtido.

A equação acima é válida para o módulo da força e precisamos representar o seu caráter vetorial, assim como o fato da força ser atrativa ou repulsiva, dependendo das cargas. Neste caso, definindo os termos como mostra a figura 3.8

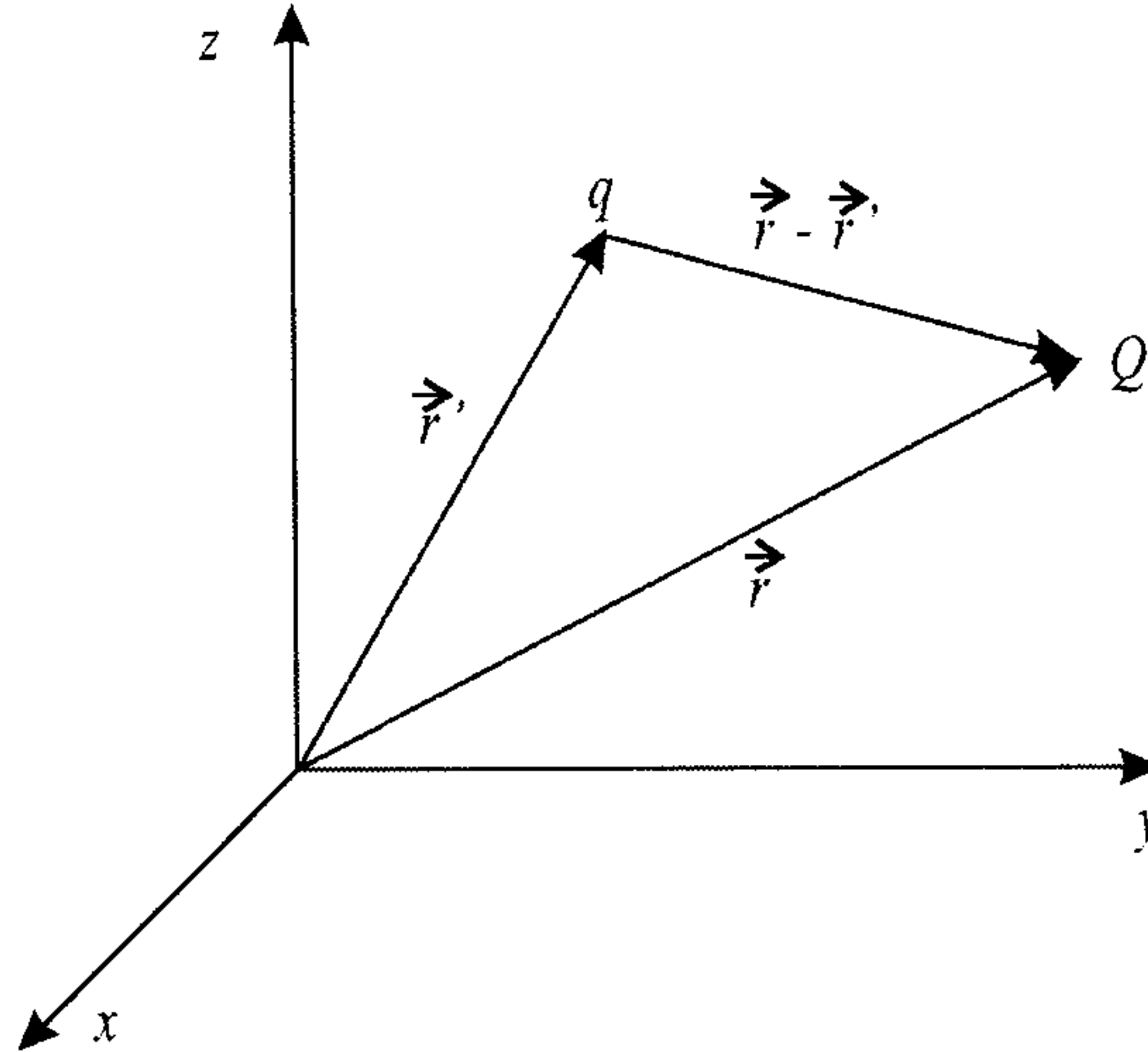



Figura 3.8: Definição dos termos para a forma vetorial da lei de Coulomb.

onde Q e q são as cargas, situadas (no vácuo) nas posições $\vec{r}$ e $\vec{r}'$, respectivamente, e $\vec{r} - \vec{r}'$ é o vetor que aponta de q para Q, a força elétrica exercida pela carga q sobre a carga Q é dada vetorialmente pela lei de Coulomb

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{3.1}$$

sendo $|\vec{r} - \vec{r}'|$ o módulo da distância entre as cargas q e Q. Note que, se as cargas têm o mesmo sinal, então a força sobre Q tem o sentido de $\vec{r} - \vec{r}'$, que aponta para fora, e ela é repulsiva, como deve ser. Já no caso das cargas terem sinais opostos, a força é orientada no sentido de $-(\vec{r} - \vec{r}')$, que aponta em direção à outra carga, e ela é atrativa, também como deve ser. A constante ϵ_0 (ϵ é a letra grega *epsilon*) está associada ao meio no qual estão as cargas, no caso, o vácuo, e ela é chamada de *permissividade elétrica* do meio. Seu valor, no SI, é dado por

$$\epsilon_0 = 8,854187818 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N.m}^2$$

ao passo que

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,987551790 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2 \cong 9,0 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2$$

Se mais de uma carga estiver agindo sobre uma dada carga Q, então a força resultante será dada pela soma vetorial de todas as forças, ou seja,

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Qq_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + \frac{Qq_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} + \cdots + \frac{Qq_n}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_n)}{|\vec{r}-\vec{r}_n|^3}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

e se, ao invés de cargas pontuais bem localizadas, tivermos uma distribuição contínua de cargas, num certo volume V, com uma densidade volumétrica de cargas $\rho(\vec{r}')$, então a soma se transforma numa integral, e a expressão torna-se

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}')\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, dV \tag{3.2}$$

onde a integral é feita sobre todo o volume V ocupado pelas cargas geradoras de força. Note que $\vec{r}$ é sempre a posição onde queremos calcular a força e que $\vec{r}'$ é sempre a posição das cargas que produzem forças na posição $\vec{r}$. Quando as cargas se distribuem sobre uma superfície S, temos uma densidade superficial de cargas $\sigma(\vec{r}')$, ao passo que, quando as cargas estão distribuídas em linhas de carga, a densidade é uma densidade linear $\lambda(\vec{r}')$. Vejamos agora alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 3.1. *Um bastão de vidro é atritado numa flanela de lã, e depois, ele é posto em contato com uma esfera metálica suspensa por um fio. A esfera metálica é utilizada como indutor para uma outra esfera metálica, e após o processo de indução, a segunda esfera metálica é posta em contato com uma terceira esfera, também metálica. Quais são as cargas em cada um dos corpos e quais são os tipos de interação entre eles?*

Da série triboelétrica dada na tabela 3.1, vemos que, ao se atritar vidro com lã, o vidro perde elétrons para a lã, e que, assim, o bastão de vidro fica positivo, enquanto a flanela fica negativa. Tocando-se a primeira esfera metálica, o bastão recebe alguns elétrons dela, sua carga positiva diminui, e a esfera torna-se positiva também. Quando esta esfera é utilizada num processo de indução, a segunda esfera adquire uma carga induzida de sinal oposto e fica

negativa. Por último, a terceira esfera, ao ser posta em contato com a segunda, torna-se negativa como esta. As forças entre os materiais acima podem ser vistas na tabela 3.2 abaixo.

	b. de vidro $\oplus$	flan. de lã $\ominus$	esf. 1 $\oplus$	esf. 2 $\ominus$	esf. 3 $\ominus$
b. de vidro $\oplus$	—	atrativa	repulsiva	atrativa	atrativa
flan. de lã $\ominus$	atrativa	—	atrativa	repulsiva	repulsiva
esfera 1 $\oplus$	repulsiva	atrativa	—	atrativa	atrativa
esfera 2 $\ominus$	atrativa	repulsiva	atrativa	—	repulsiva
esfera 3 $\ominus$	atrativa	repulsiva	atrativa	repulsiva	—

Tabela 3.2: Cargas e forças elétricas para o exemplo 3.1.

Exemplo 3.2. *Suponha cinco esferas metálicas idênticas, A, B, C, D e E. A esfera A é a única carregada, com uma carga Q. Ela é posta em contato com as esferas B, C, D e E, sucessivamente. Quais são as cargas das esferas após todo o processo e qual é o valor da força entre elas quando colocadas a uma distância d?*

Quando a esfera A toca a esfera B, metade da carga de A é transferida, pois os condutores são idênticos. Assim, neste primeiro passo, as cargas são

$$q_A = \frac{Q}{2}$$
$$Q_B = \frac{Q}{2}$$

Quando a esfera A toca a esfera C, novamente metade da carga de A é transferida, e assim,

$$q'_A = \frac{q_A}{2} = \frac{Q}{4}$$
$$Q_C = q'_A = \frac{Q}{4}$$

No processo seguinte, metade da carga de A passa para D, e então,

$$q''_A = \frac{q'_A}{2} = \frac{Q}{8}$$
$$Q_D = q''_A = \frac{Q}{8}$$

e por fim, quando A toca E, as cargas ficam

$$Q_A = \frac{q''_A}{2} = \frac{Q}{16}$$
$$Q_E = Q_A = \frac{Q}{16}$$

e no final, os valores das cargas são

$$Q_A = \frac{Q}{16} \qquad Q_B = \frac{Q}{2}$$
$$Q_C = \frac{Q}{4} \qquad Q_D = \frac{Q}{8}$$
$$Q_E = \frac{Q}{16}$$

e há conservação das cargas, porque

$$\begin{aligned} Q_A + Q_B + Q_C + Q_D + Q_E &= \frac{Q}{16} + \frac{Q}{2} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{8} + \frac{Q}{16} \\ &= \frac{Q}{2} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{8} + \frac{Q}{8} \\ &= \frac{Q}{2} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{4} \\ &= \frac{Q}{2} + \frac{Q}{2} \\ Q_A + Q_B + Q_C + Q_D + Q_E &= Q \end{aligned}$$

Todas as forças entre as esferas são repulsivas, pois elas possuem cargas de mesmo sinal. Em módulo, temos

$$F_{\mathrm{A,B}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_AQ_B}{d^2} \qquad F_{\mathrm{A,C}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_AQ_C}{d^2} \qquad F_{\mathrm{A,D}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_AQ_D}{d^2}$$
$$F_{\mathrm{A,B}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{32d^2} \qquad F_{\mathrm{A,C}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{64d^2} \qquad F_{\mathrm{A,D}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{128d^2}$$

$$F_{\mathrm{A,E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_AQ_E}{d^2} \qquad F_{\mathrm{B,C}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_BQ_C}{d^2} \qquad F_{\mathrm{B,D}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_BQ_D}{d^2}$$
$$F_{\mathrm{A,E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{256d^2} \qquad F_{\mathrm{B,C}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{8d^2} \qquad F_{\mathrm{B,D}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{16d^2}$$

$$F_{\mathrm{B,E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_BQ_E}{d^2} \qquad F_{\mathrm{C,D}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_CQ_D}{d^2} \qquad F_{\mathrm{C,E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_CQ_E}{d^2}$$
$$F_{\mathrm{B,E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{32d^2} \qquad F_{\mathrm{C,D}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{32d^2} \qquad F_{\mathrm{C,E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{64d^2}$$

$$F_{\mathrm{D,E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_D Q_E}{d^2}$$
$$F_{\mathrm{D,E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{128d^2}$$

Exemplo 3.3. *Calcule a força elétrica entre duas cargas pontuais de valores* $Q_1 = 5 \times 10^{-6}$ *C e* $Q_2 = -3 \times 10^{-7}$ *C, quando separadas por 10 cm.*

A força entre as cargas é atrativa, já que os sinais das cargas são opostos. Em módulo, temos

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \\ &= 9,0 \times 10^9 \times \frac{5 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-7}}{[10^{-1}]^2} \\ F &= 1,35 \text{ N} \end{aligned}$$

Exemplo 3.4. *Suponha que duas esferas idênticas tenham cargas* Q *e* $2Q$ *e que elas estejam separadas por uma distância* d*. Qual é a força entre elas? Se as esferas forem postas em contato, qual será a nova carga de cada uma, e qual será o novo valor da força entre elas se forem separadas novamente pela distância* d*?*

A força entre as cargas é repulsiva, e ela é dada em módulo por

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q \cdot 2Q}{d^2} \\ F &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{d^2} \end{aligned}$$

Após o contato, as esferas adquirem cargas iguais, de valor

$$q_1 = q_2 = \frac{Q + 2Q}{2} = \frac{3Q}{2}$$

e agora a força vale

$$\begin{aligned} F' &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\frac{3Q}{2}\cdot\frac{3Q}{2}}{d^2} \\ F' &= \frac{9}{16\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{d^2} \end{aligned}$$

e a relação entre as forças é

$$\frac{F'}{F} = \frac{\frac{9}{16\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{d^2}}{\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{d^2}} = \frac{9}{8}$$

Exemplo 3.5. *Compare a lei de Coulomb com a lei da gravitação universal de Newton.*

A lei de gravitação universal de Newton, na forma vetorial, e para uma densidade de massa $\rho_m(\vec{r})$, é

$$\vec{F}_g(\vec{r}) = -GM\int_V \rho_m(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV \tag{3.3}$$

enquanto a lei de Coulomb é dada pela expressão 3.2,

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV$$

Destas expressões, percebemos que é possível fazer as seguintes associações:

$$\begin{aligned} Q &\leftrightarrow M \\ \rho &\leftrightarrow \rho_m \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &\leftrightarrow -G \end{aligned}$$

As duas leis são de fato muito semelhantes, e a principal diferença entre elas é que a força gravitacional é sempre atrativa, ao passo que a força elétrica pode ser tanto atrativa como repulsiva.

Exemplo 3.6. *Considere duas cargas Q fixas no eixo x, situadas a uma distância $2d$ uma da outra, e uma terceira carga $-Q$.*

a) Qual é a posição de equilíbrio da carga $-Q$?

Por simetria, o ponto de equilíbrio deve estar entre as duas cargas, e como os valores das cargas são iguais, o ponto deve estar a uma distância d das cargas Q. Isso pode ser verificado se calcularmos a força resultante que as cargas Q exercem sobre a carga $-Q$ e acharmos o ponto em que ela é nula, isto é,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Considere que uma carga Q esteja na origem e que a outra esteja em $x = 2d$. A carga $-Q$ estará em alguma posição X entre esses valores. Assim, a distância entre a carga $-Q$ e a origem é X, ao passo que, entre esta carga e a carga em $2d$, ela é $2d - X$. A resultante das forças fica, tomando cuidado com os sinais por causa do caráter vetorial das forças,

$$\begin{aligned}
F_1 - F_2 &= 0 \\
-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{X^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{(2d-X)^2} &= 0 \\
\frac{1}{(2d-X)^2} - \frac{1}{X^2} &= 0 \\
\frac{X^2 - (2d-X)^2}{X^2(2d-X)^2} &= 0 \\
X^2 - 4d^2 + 4dX - X^2 &= 0 \\
4d(X-d) &= 0 \\
X - d &= 0 \\
X &= d
\end{aligned}$$

b) Este ponto, na direção x, é um ponto de equilíbrio estável?

Para verificar a estabilidade do ponto, precisamos deslocar a carga na direção x de uma pequena distância ℓ, medida a partir do ponto de equilíbrio em $x = X$, para ver se a carga volta à posição inicial. Se o equilíbrio for estável, ela retorna à posição inicial. Se o equilíbrio for indiferente, ela fica no mesmo lugar, e se o equilíbrio for instável, ela continua a se mover para longe da posição de equilíbrio. Lembrando que as forças entre as cargas dos

extremos e a carga $-Q$ são atrativas, qualitativamente percebemos que, se deslocarmos a carga $-Q$ em direção à carga Q na origem, a força atrativa exercida por esta carga aumenta, ao passo que a força exercida pela outra carga, em $x = 2d$, diminui, sendo a resultante uma força orientada com sentido para a origem. Quando a carga $-Q$ é deslocada em direção à carga em $x = 2d$, o processo é inverso, e ela se dirige para esta posição. Assim, o equilíbrio é instável. Podemos verificar isto também quantitativamente, encontrando a força resultante que age sobre a carga $-Q$ quando esta é deslocada de um valor ℓ da posição de equilíbrio, que consideraremos positivo, em direção à carga $2d$. Desse modo, a distância entre a origem e $-Q$ é $d + \ell$, enquanto a distância entre a outra carga Q e $-Q$ é $d - \ell$. A força resultante é

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

e, para facilitar, vamos definir

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

e assim, temos

$$\begin{aligned}
\vec{R} &= -k\frac{Q^2}{(d+\ell)^2}\,\hat{\mathbf{i}} + k\frac{Q^2}{(d-\ell)^2}\,\hat{\mathbf{i}} \\
&= kQ^2\left[\frac{1}{(d-\ell)^2} - \frac{1}{(d+\ell)^2}\right]\hat{\mathbf{i}} \\
&= kQ^2\left[\frac{1}{d^2\left(1-\frac{\ell}{d}\right)^2} - \frac{1}{d^2\left(1+\frac{\ell}{d}\right)^2}\right]\hat{\mathbf{i}} \\
\vec{R} &= \frac{kQ^2}{d^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\ell}{d}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{\ell}{d}\right)^2}\right]\hat{\mathbf{i}}
\end{aligned}$$

A fração $\frac{\ell}{d}$ é muito pequena, já que ℓ é muito pequeno, e a expressão entre colchetes pode ser expandida numa série de Taylor [6]; ela fica, considerando termos até a primeira ordem,

$$\frac{1}{\left(1-\frac{\ell}{d}\right)^2} = 1 + 2\frac{\ell}{d}$$

[6] Para maiores informações sobre a série de Taylor, veja a seção 2.1.

$$\frac{1}{\left(1+\frac{\ell}{d}\right)^2} = 1 - 2\frac{\ell}{d}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\vec{R} &= \frac{kQ^2}{d^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\ell}{d}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{\ell}{d}\right)^2}\right]\hat{\mathbf{i}} \\
&= \frac{kQ^2}{d^2}\left[1 + 2\frac{\ell}{d} - \left(1 - 2\frac{\ell}{d}\right)\right]\hat{\mathbf{i}} \\
\vec{R} &= 4\frac{kQ^2}{d^2}\frac{\ell}{d}\hat{\mathbf{i}}
\end{aligned}$$

Note que, se ℓ é positivo, ou seja, se a carga é deslocada em direção a $x = 2d$, a força é positiva, e ela afasta a carga do equilíbrio. Se ℓ é negativo, a força também é, e ela leva a carga para a origem. O equilíbrio é instável.

c) Considere que a carga $-Q$ seja deslocada de uma distância Y na direção y, no ponto de equilíbrio. Nessa direção, o equilíbrio também é instável?

A situação acima é ilustrada na figura 3.9.

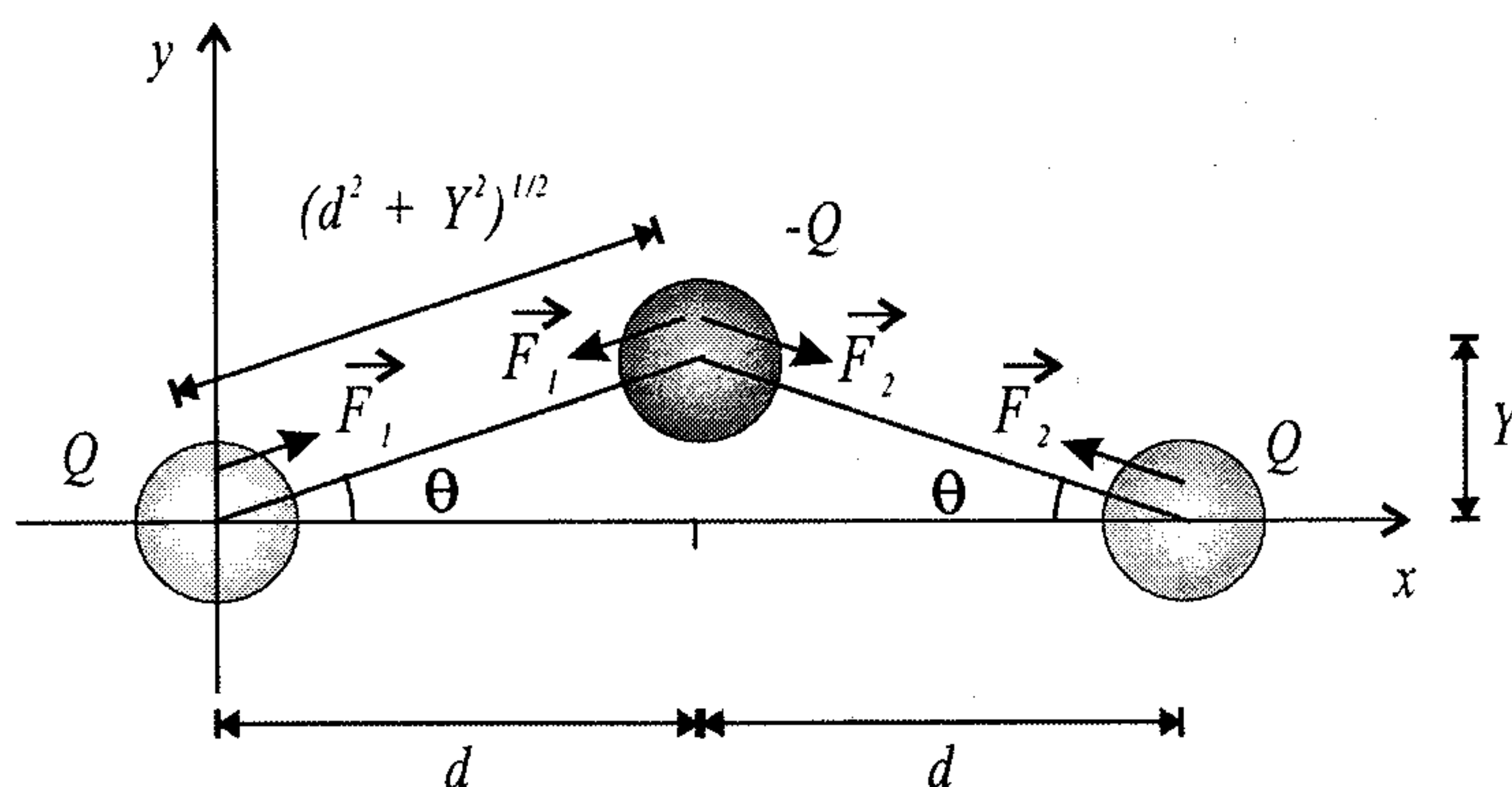



Figura 3.9: Esquema para o exemplo 3.6.

Da figura, percebemos que a distância entre as cargas Q e $-Q$ é dada por $\sqrt{d^2+Y^2}$. Qualitativamente, as forças elétricas têm uma componente na direção y que aponta para a posição de equilíbrio, e assim, o equilíbrio nessa direção deve ser estável. A resultante, na direção y, é

$$\vec{R}_y = \vec{F}_y^1 + \vec{F}_y^2$$

A componente da força na direção y é dada, em módulo, por

$$F_y = F \operatorname{sen} \theta$$

e então, temos

$$\vec{R}_y = -F_y^1 \operatorname{sen} \theta \,\hat{\mathbf{j}} - F_y^2 \operatorname{sen} \theta \,\hat{\mathbf{j}}$$

O seno do ângulo é dado por

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{Y}{\sqrt{d^2 + Y^2}}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\vec{R}_y &= -k \frac{Q^2}{(\sqrt{d^2+Y^2})^2} \frac{Y}{\sqrt{d^2+Y^2}} \hat{\mathbf{j}} - k \frac{Q^2}{(\sqrt{d^2+Y^2})^2} \frac{Y}{\sqrt{d^2+Y^2}} \hat{\mathbf{j}} \\
&= -2kQ^2 \frac{Y}{(d^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{j}} \\
&= -2kQ^2 \frac{Y}{d^3 \left(1+\frac{Y}{d}\right)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{j}} \\
\vec{R}_y &= -\frac{2kQ^2 Y}{d^3} \frac{1}{\left(1+\frac{Y}{d}\right)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{j}}
\end{aligned}$$

Novamente podemos expandir a fração que contém o termo $\frac{Y}{d}$, pois Y é muito pequeno. A série de Taylor neste caso é

$$\frac{1}{\left(1+\frac{Y}{d}\right)^{\frac{3}{2}}} = 1 - \frac{3}{2} \frac{Y}{d}$$

e o resultado é

$$\begin{aligned}
\vec{R}_y &= -\frac{2kQ^2 Y}{d^3} \frac{1}{\left(1+\frac{Y}{d}\right)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{j}} \\
&= -\frac{2kQ^2 Y}{d^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{Y}{d}\right) \hat{\mathbf{j}} \\
\vec{R}_y &= -\frac{2kQ^2}{d^2} \frac{Y}{d} \hat{\mathbf{j}} + \frac{3kQ^2}{d^2} \left(\frac{Y}{d}\right)^2 \hat{\mathbf{j}}
\end{aligned}$$

Como Y é muito pequeno, na expressão acima podemos desprezar o segundo termo, e o resultado é

$$\vec{R}_y = -\frac{2kQ^2}{d^2}\frac{Y}{d}\hat{\mathbf{j}}$$

que sempre aponta para o ponto de equilíbrio, e na direção y o equilíbrio é estável.

Exemplo 3.7. *Considere uma barra de comprimento ℓ e massa desprezível, presa pelo centro a um suporte, como mostra a figura 3.10*

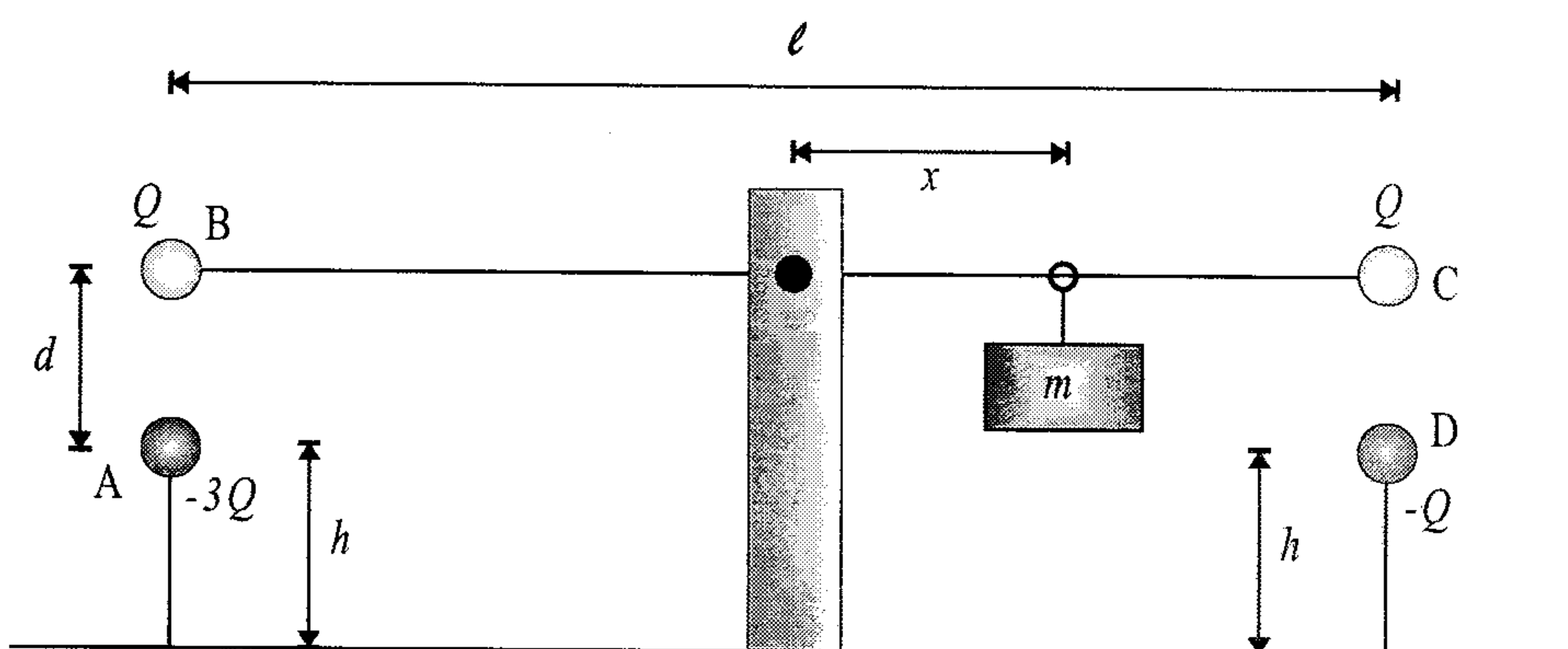



Figura 3.10: Esquema para o exemplo 3.7.

a) Qual é o valor de x para que a barra permaneça horizontal? A aceleração da gravidade vale g, e a força entre as cargas nas extremidades opostas da barra pode ser desprezada.

Para a barra permanecer na horizontal, é preciso que os torques gerados pelas forças se anulem, de forma que o torque total seja zero. As forças elétricas entre as cargas são atrativas e valem, em módulo,

$$F_{\mathrm{A,B}} = k\frac{Q \cdot 3Q}{d^2} = 3k\frac{Q^2}{d^2}$$
$$F_{\mathrm{C,D}} = k\frac{Q \cdot Q}{d^2} = k\frac{Q^2}{d^2}$$

O torque $\vec{\mathbb{T}}$ gerado por uma força $\vec{F}$ na posição $\vec{r}$ é dado por

$$\vec{\mathbb{T}} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{3.4}$$

Colocando a origem no ponto de apoio, vemos que os vetores $\vec{r}$ e $\vec{F}$ são perpendiculares, e os módulos dos torques são dados por

$$\mathbb{T}_{\text{A,B}} = \frac{\ell}{2} F_{\text{A,B}} = \frac{3k\ell}{2}\frac{Q^2}{d^2}$$
$$\mathbb{T}_{\text{C,D}} = \frac{\ell}{2} F_{\text{C,D}} = \frac{k\ell}{2}\frac{Q^2}{d^2}$$

O torque na esfera B está orientado perpendicularmente para fora da página, enquanto, na esfera C, ele é perpendicular, mas entra na página, assim como o torque do peso do corpo, que, em módulo, vale

$$\mathbb{T}_P = mgx$$

e na situação de equilíbrio, temos

$$\vec{\mathbb{T}}_{\text{A,B}} + \vec{\mathbb{T}}_{\text{C,D}} + \vec{\mathbb{T}}_P = 0$$

Na forma escalar, obtemos

$$\frac{3k\ell}{2}\frac{Q^2}{d^2} - \frac{k\ell}{2}\frac{Q^2}{d^2} - mgx = 0$$
$$\frac{2k\ell}{2}\frac{Q^2}{d^2} = mgx$$

e assim,

$$x = \frac{k\ell}{mg}\frac{Q^2}{d^2}$$

b) Qual é o valor da reação no ponto de apoio?

A reação no ponto de apoio deve ser igual à soma das forças elétricas e do peso que agem na barra, pois o sistema está em equilíbrio. Assim,

$$\vec{N} = -\vec{F}_{\text{A,B}} - \vec{F}_{\text{C,D}} - \vec{P}$$

ou, em módulo,

$$N = 3k\frac{Q^2}{d^2} + k\frac{Q^2}{d^2} + mg$$
$$N = 4k\frac{Q^2}{d^2} + mg$$

c) Se a reação no ponto de apoio vale $N = 2mg$, qual o valor da distância d?

Se a reação tem o valor dado acima, então, do resultado do item anterior, temos

$$N = 4k\frac{Q^2}{d^2} + mg$$
$$2mg = 4k\frac{Q^2}{d^2} + mg$$
$$4k\frac{Q^2}{d^2} = 2mg - mg$$
$$\frac{Q^2}{d^2} = \frac{mg}{4k}$$
$$d = 2Q\sqrt{\frac{k}{mg}}$$

Exemplo 3.8. *Considere um fio finito, de tamanho ℓ, com uma carga Q distribuída de forma homogênea ao longo do seu comprimento, como mostra a figura 3.11. Qual é a força elétrica que age sobre a carga q da figura?*

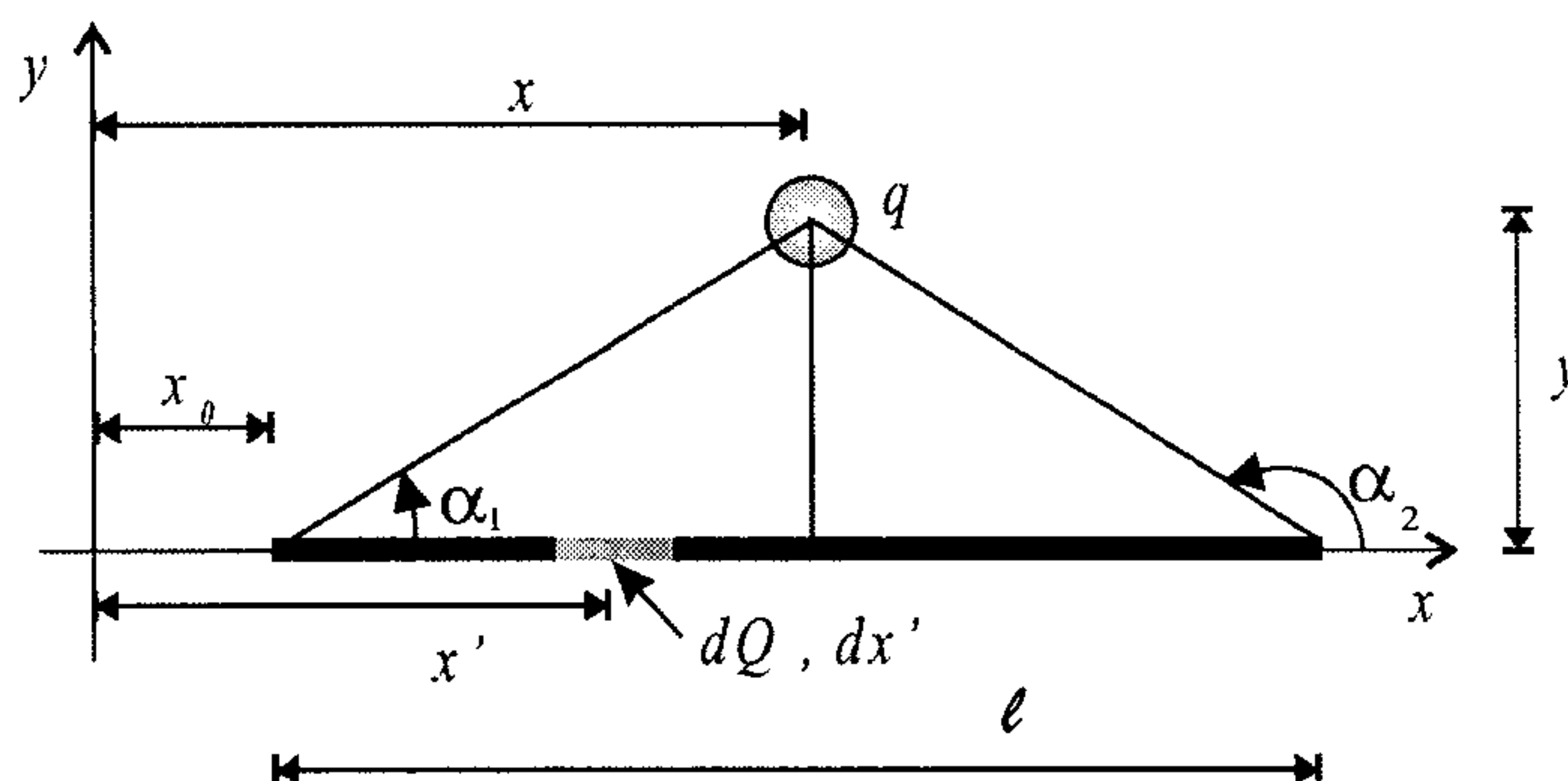



Figura 3.11: Diagrama do exemplo 3.8.

Neste problema, temos uma distribuição contínua de cargas numa linha e precisamos adaptar a equação 3.2 para o nosso caso. Assim, ficamos com

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_C \lambda(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,d\ell$$

É importante estabelecer todas as grandezas antes de iniciar o problema. A densidade linear de carga é constante, dada por

$$\lambda = \frac{Q}{\ell} = \frac{dQ}{dx'}$$

e então, num comprimento dx', temos uma carga dQ. Portanto, para fazer a integração, consideramos $d\ell = dx'$. A posição da carga q é dada por

$$\vec{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}$$

enquanto a posição da carga dQ é definida por

$$\vec{r}\,' = x'\,\hat{\mathbf{i}}$$

Portanto,

$$\vec{r}-\vec{r}\,' = \left(x-x'\right)\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{\left(x-x'\right)^2 + y^2}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3 = \left[\left(x-x'\right)^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

Substituindo tudo isso na integral, temos

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{x_0}^{x_0+\ell} \lambda\frac{\left(x-x'\right)\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}}{\left[\left(x-x'\right)^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,dx'$$

ou

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\lambda q\,\hat{\mathbf{i}}}{4\pi\epsilon_0}\int_{x_0}^{x_0+\ell} \frac{\left(x-x'\right)dx'}{\left[\left(x-x'\right)^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\lambda q y\,\hat{\mathbf{j}}}{4\pi\epsilon_0}\int_{x_0}^{x_0+\ell} \frac{dx'}{\left[\left(x-x'\right)^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Vamos resolver primeiro a segunda integral, através de uma mudança de variáveis seguida de uma transformação trigonométrica. Por enquanto, deixaremos a integral indefinida, e depois de o resultado ser encontrado, aplicaremos os limites. A primeira substituição é

$$X = x' - x$$

$$dX = dx'$$

e a integral fica

$$\int \frac{dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dX}{\left[(-X)^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dX}{\left[X^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Agora, usamos a segunda substituição, que é

$$X = y \operatorname{tg} \theta$$

$$dX = y \sec^2 \theta \, d\theta$$

e a integral torna-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{dX}{\left[X^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \int \frac{y \sec^2 \theta \, d\theta}{\left[y^2 \operatorname{tg}^2 \theta + y^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= y \int \frac{\sec^2 \theta \, d\theta}{y^3 \left[\operatorname{tg}^2 \theta + 1\right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{y^2} \int \frac{\sec^2 \theta \, d\theta}{\sec^3 \theta}
\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y^2} \int \frac{d\theta}{\sec \theta}$$

$$\int \frac{dx'}{\left[\left(x-x'\right)^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y^2}\int \cos\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{dx'}{\left[\left(x-x'\right)^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y^2}\operatorname{sen}\theta$$

Precisamos encontrar os limites de integração. Da primeira substituição, encontramos

$$x'_1 = x_0 \Rightarrow X_1 = x_0 - x$$

$$x'_2 = x_0 + \ell \Rightarrow X_2 = x_0 + \ell - x$$

Na segunda, temos

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{X}{y}$$

e assim, como a tangente é dada pelo tamanho do cateto oposto dividido pelo tamanho do cateto adjacente, o cateto oposto mede X, enquanto o adjacente vale y, e assim, o seno será

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{X}{\sqrt{X^2+y^2}}$$

e desse modo,

$$X_1 = x_0 - x \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_1 = \frac{x_0 - x}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}}$$

$$X_2 = x_0 + \ell - x \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_2 = \frac{x_0 + \ell - x}{\sqrt{(x_0+\ell-x)^2+y^2}}$$

e a integral fica

$$\int_{x_0}^{x_0+\ell} \frac{dx'}{\left[\left(x-x'\right)^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y^2}\left(\operatorname{sen}\theta\right)_{\theta_1}^{\theta_2}$$

ou

$$\int_{x_0}^{x_0+\ell} \frac{dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y^2}\left[\frac{x_0+\ell-x}{\sqrt{(x_0+\ell-x)^2+y^2}} - \frac{x_0-x}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}}\right]$$

e a componente na direção y da força é

$$\begin{aligned}
\vec{F}_y &= \frac{\lambda q y\,\hat{\mathbf{j}}}{4\pi\epsilon_0}\int_{x_0}^{x_0+\ell} \frac{dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\lambda q y\,\hat{\mathbf{j}}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{y^2}\left[\frac{x_0+\ell-x}{\sqrt{(x_0+\ell-x)^2+y^2}} - \frac{x_0-x}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}}\right] \\
\vec{F}_y &= \frac{q\lambda\hat{\mathbf{j}}}{4\pi\epsilon_0 y}\left[\frac{x_0+\ell-x}{\sqrt{(x_0+\ell-x)^2+y^2}} - \frac{x_0-x}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}}\right] \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Agora precisamos resolver a outra integral. As substituições podem ser as mesmas já utilizadas, e assim, temos

$$\int \frac{(x-x')\,dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-X\,dX}{\left[(-X)^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\int \frac{X\,dX}{\left[X^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

e agora, utilizando $X = y\,\mathrm{tg}\,\theta$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x-x')\,dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} &= -\int \frac{X\,dX}{\left[X^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\int \frac{y\,\mathrm{tg}\,\theta y \sec^2\theta\,d\theta}{\left[y^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{1}{y}\int \frac{\mathrm{tg}\,\theta\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^3\theta}
\end{aligned}$$

$$\int \frac{(x-x')\,dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{y}\int \frac{\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta}{\sec\theta}$$

$$\int \frac{(x-x')\,dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{y}\int \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{(x-x')\,dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y}\cos\theta$$

Nos limites de integração, temos

$$X_1 = x_0 - x \Rightarrow \cos\theta_1 = \frac{y}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}}$$

$$X_2 = x_0 + \ell - X \Rightarrow \cos\theta_2 = \frac{y}{\sqrt{(x_0+\ell-x)^2+y^2}}$$

e assim, a integral fica

$$\int_{x_0}^{x_0+\ell} \frac{(x-x')\,dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y}\left(\cos\theta\right)_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$= \frac{1}{y}\left[\frac{y}{\sqrt{(x_0+l-x)^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}}\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_0+\ell} \frac{(x-x')\,dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(x_0+\ell-x)^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}}$$

e a força na direção x fica

$$\vec{F}_x = \frac{\lambda q\,\hat{\mathbf{i}}}{4\pi\epsilon_0}\int_{x_0}^{x_0+\ell} \frac{(x-x')\,dx'}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{F}_x = \frac{q\lambda\,\hat{\mathbf{i}}}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x_0+\ell-x)^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}}\right] \tag{3.6}$$

As expressões 3.5 e 3.6 são bastante gerais e possuem vários casos particulares interessantes. Por exemplo, se a carga tiver uma coordenada $x = x_0 + \frac{\ell}{2}$, por

simetria, a força na direção x deve se anular. Vejamos se a equação 3.6 está de acordo com isso.

$$\vec{F}_x = \frac{q\lambda\hat{\mathbf{i}}}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{\left[x_0+\ell-(x_0+\frac{\ell}{2})\right]^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left[x_0-(x_0+\frac{\ell}{2})\right]^2+y^2}}\right]$$

$$= \frac{q\lambda\hat{\mathbf{i}}}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\ell}{2}\right]^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\ell}{2}\right]^2+y^2}}\right]$$

$$\vec{F}_x = 0$$

Neste caso, a força na direção y é

$$\vec{F}_y = \frac{q\lambda\hat{\mathbf{j}}}{4\pi\epsilon_0 y}\left[\frac{x_0+\ell-(x_0+\frac{\ell}{2})}{\sqrt{\left[x_0+\ell-(x_0+\frac{\ell}{2})\right]^2+y^2}} - \frac{x_0-(x_0+\frac{\ell}{2})}{\sqrt{\left[x_0-(x_0+\frac{\ell}{2})\right]^2+y^2}}\right]$$

$$= \frac{q\lambda\hat{\mathbf{j}}}{4\pi\epsilon_0 y}\left[\frac{\frac{\ell}{2}}{\sqrt{\left[\frac{\ell}{2}\right]^2+y^2}} + \frac{\frac{\ell}{2}}{\sqrt{\left[\frac{\ell}{2}\right]^2+y^2}}\right]$$

$$= \frac{q\lambda\ell\hat{\mathbf{j}}}{4\pi\epsilon_0 y}\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\ell}{2}\right]^2+y^2}}$$

$$\vec{F}_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{y\sqrt{\left[\frac{\ell}{2}\right]^2+y^2}}\hat{\mathbf{j}}$$

Outros casos particulares são vistos nos exercícios (veja os exercícios 3.2 e 3.3).

3.4 Mãos à Obra: Pêndulo Eletrostático e Eletroscópio

A seção *Mãos à Obra* aparecerá várias vezes ao longo do livro. Seu objetivo é verificar, através de experiências simples e, em geral, apenas qualitativas, a teoria vista no texto, como forma de aproximar a parte teórica da parte experimental em Física, visto que essas duas áreas devem sempre andar juntas. A maioria das experiências pode ser feita com material caseiro, para

que seja acessível a todos, e iniciamos com a montagem de dois experimentos bastante simples, o pêndulo eletrostático e o eletroscópio.

3.4.1 Pêndulo Eletrostático

Na montagem do pêndulo eletrostático, você vai precisar do seguinte.

1. Uma haste que sirva de suporte (veja a figura 3.12).
2. Um fio de *nylon*, seda, linha de costura ou qualquer material não-condutor (não pode ser um fio metálico).
3. Uma bolinha de isopor, de cortiça ou qualquer outro material leve.
4. Um pedaço de papel-alumínio.
5. Um bastão de vidro, pente de plástico ou qualquer corpo que possa ser atritado.
6. Um pedaço de seda, lã ou algodão, para atritar o material mencionado acima.

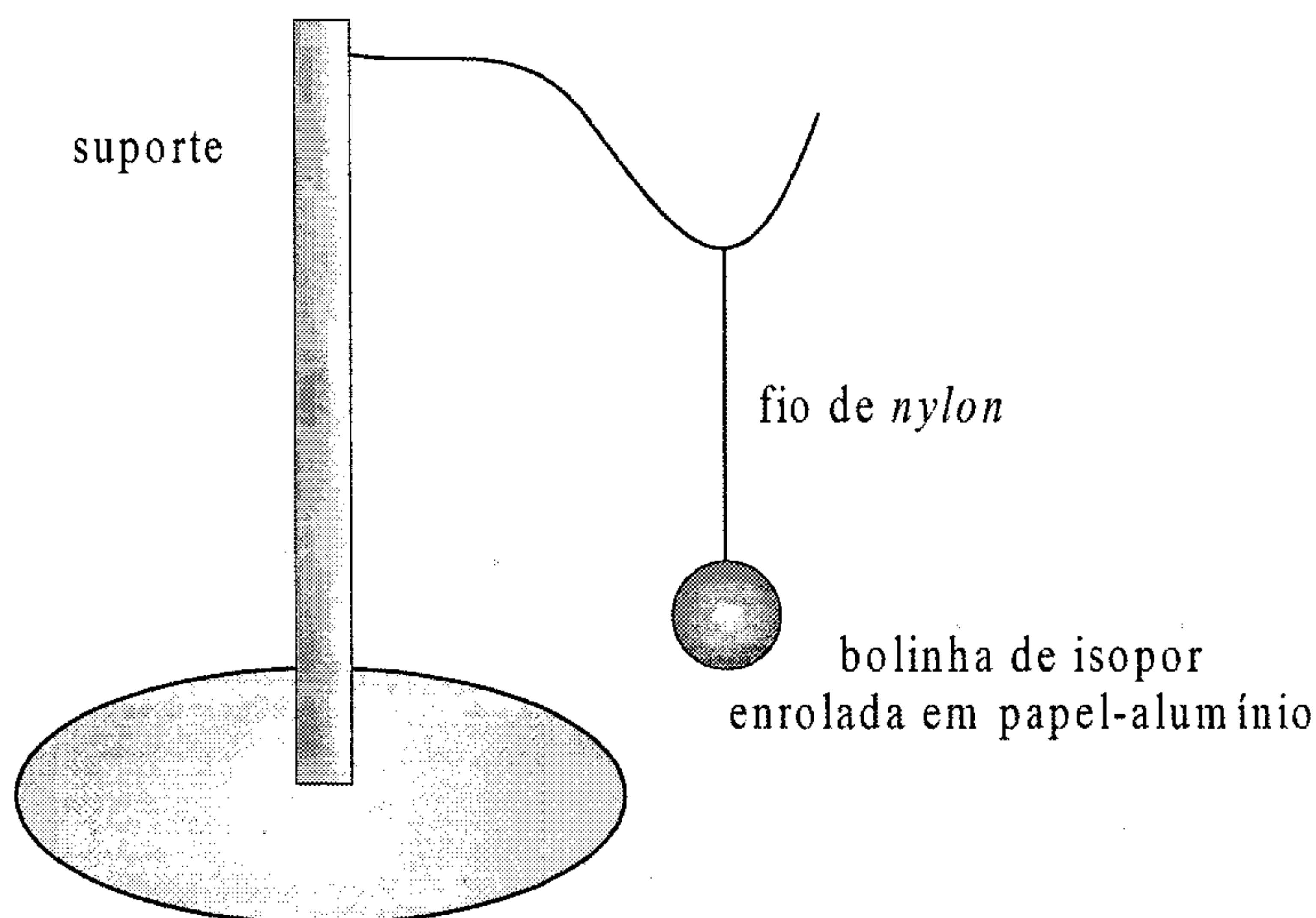



Figura 3.12: Esquema do pêndulo eletrostático.

A montagem do pêndulo eletrostático é feita como mostra a figura 3.12. Note que você pode experimentar os efeitos cobrindo ou não a bolinha de isopor com o papel-alumínio, para verificar a influência de uma escolha ou de outra nas experiências. Depois de montar o pêndulo eletrostático, atrite o bastão de vidro ou o pente no pedaço de lã, seda, etc. e o aproxime da bolinha do pêndulo, sem tocar. Repita o procedimento, colocando o bastão a várias distâncias da bolinha, e se possível, com vários materiais diferentes, anotando o que acontece com ela. Em seguida, retire o papel-alumínio da bolinha e faça as mesmas experiências acima.

Agora, toque a bolinha com o corpo atritado e verifique o que ocorre quando você novamente os aproxima. Repita esse procedimento usando diferentes tipos de materiais, várias distâncias e, para a bolinha, com e sem o papel-alumínio. Após todas as experiências, responda ao seguinte.

- Utilizando a série triboelétrica da tabela 3.1, descubra o sinal da carga adquirida pelos materiais atritados.
- Explique o que ocorre quando o corpo carregado se aproxima da bolinha sem tocá-la.
- Existem diferenças quando corpos diferentes são mantidos à mesma distância da bolinha com papel-alumínio?
- Explique qualitativamente as diferenças que ocorrem, com relação às interações elétricas, entre as situações da bolinha com e sem o papel-alumínio.
- Quando a bolinha está sem o papel-alumínio, materiais diferentes produzem efeitos diferentes?
- O que ocorre quando o material toca a bolinha?
- Explique por que há agora repulsão, e também se existe diferença entre os casos da bolinha com e sem papel-alumínio.
- Verifique se, nos casos da bolinha com e sem papel-alumínio, materiais diferentes produzem efeitos diferentes.
- Quando o sinal da carga do corpo atritado é desconhecido, o pêndulo elétrico pode ser utilizado para verificar o sinal dessa carga? Em caso positivo, descreva o procedimento experimental detalhadamente.

3.4.2 Eletroscópio

Para montar um eletroscópio, você precisa do seguinte.

1. Um frasco de vidro de tamanho médio (veja a figura 3.13).
2. Uma rolha que sirva nesse frasco.
3. Um pedaço de arame metálico maleável.
4. Uma bolinha de isopor ou de cortiça.
5. Um pedaço de papel-alumínio.
6. Pente de plástico, bastão de vidro, etc., para ser atritado.
7. Pano de lã, de seda, de algodão, etc., para atritar os materiais acima.

A montagem experimental do eletroscópio é dada na figura 3.13, abaixo.

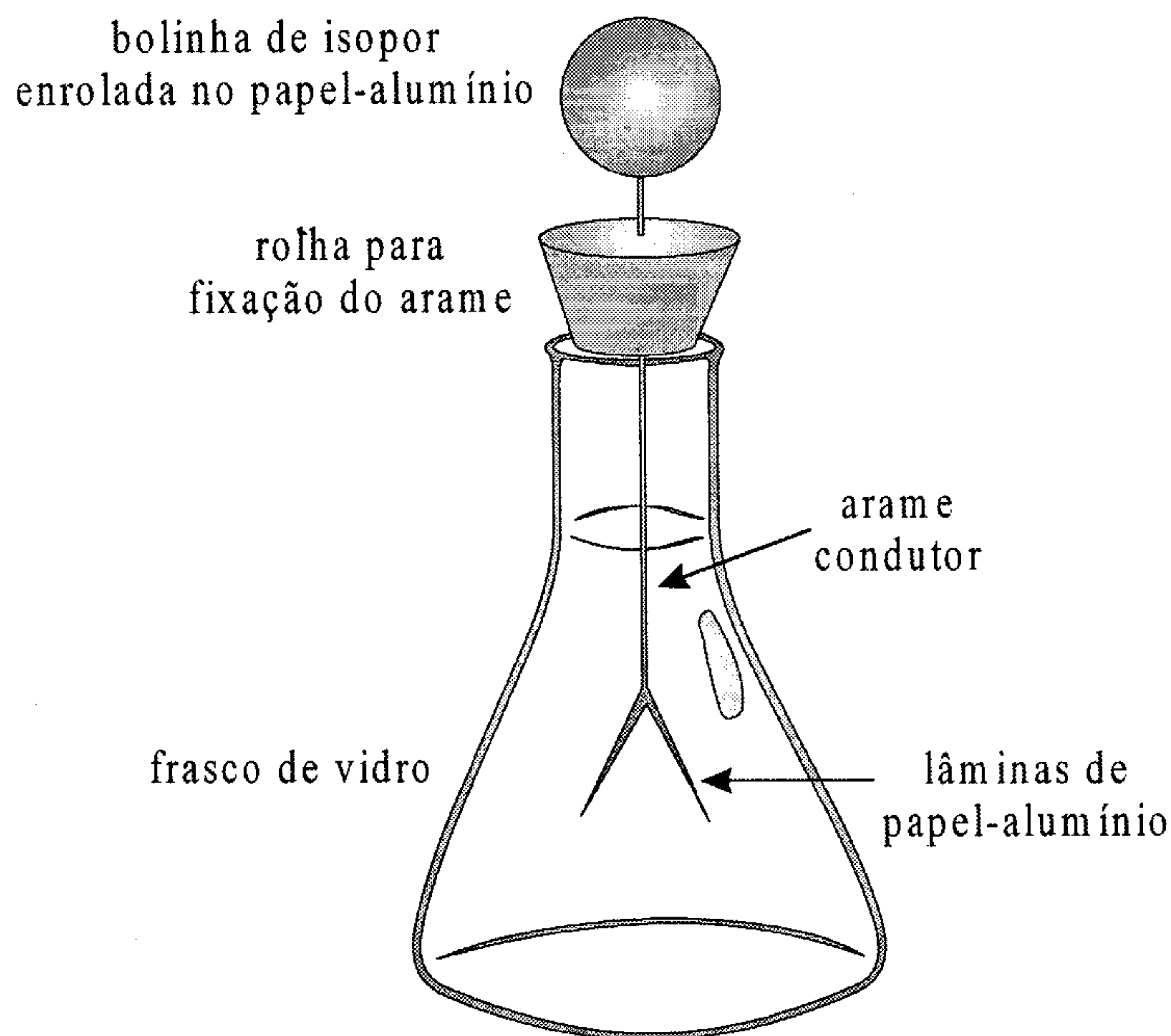



Figura 3.13: Esquema do eletroscópio.

A bolinha de isopor é fixada no arame, e o papel-alumínio deve tocá-lo, para que as cargas possam circular. Na outra ponta do arame, são colocadas

duas lâminas, também de papel-alumínio, ligadas entre si e também com o arame, de forma que elas possam se movimentar livremente (levantar e abaixar). O frasco serve apenas para diminuir os efeitos das correntes de ar e para facilitar o manuseio do aparelho. Após a montagem, atrite os vários materiais e os aproxime da bolinha do eletroscópio, sem, no entanto, tocá-la, e observe o que ocorre com as lâminas. Faça isso para vários materiais diferentes e para distâncias diferentes. Depois, repita a experiência, tocando a bolinha do eletroscópio com um material eletrizado com carga de um dado sinal (utilize a série triboelétrica da tabela 3.1 para verificar os sinais), e depois, aproximando outros corpos eletrizados com o mesmo e com o outro sinal. Faça isso para materiais diferentes com os dois tipos de carga elétrica, sempre verificando o que ocorre com as lâminas. Por fim, após tocar a bolinha com um corpo eletrizado com uma dada carga, encoste na bolinha de isopor outros corpos contendo tanto cargas positivas como negativas e verifique o que ocorre com as lâminas. Depois de todas as experiências, responda às perguntas abaixo.

- Determine os sinais das cargas de todos os materiais utilizados.

- O que acontece com as lâminas quando os corpos eletrizados são aproximados? Existem diferenças quando diferentes materiais são aproximados e mantidos à mesma distância? E quando o mesmo material é utilizado, variando-se a distância? Isto depende do sinal das cargas nos corpos? Dê explicações detalhadas para todas essas perguntas.

- Após o contato, o que ocorre com as lâminas? Por que isso ocorre? Existem diferenças de material para material e de carga positiva para negativa?

- Depois de carregar o eletroscópio, o que ocorre quando um segundo material é aproximado? Isto depende do tipo de material e da carga do corpo? E da distância? Explique detalhadamente esse fenômeno.

- Quando o eletroscópio é tocado pela segunda vez, o que ocorre? Por quê? Isso depende do material e do tipo de carga do corpo?

- É possível utilizar o eletroscópio para descobrir o sinal da carga de um corpo? Explique como isso pode ser feito.

- Se o arame que segura as lâminas for isolante, o que muda nas experiências acima? Verifique sua resposta, trocando o arame por um fio isolante e repetindo todas as observações feitas acima.

- Se a bolinha não for enrolada em papel-alumínio, o que ocorre? Refaça todas as experiências e comprove sua resposta.
- Se as lâminas forem feitas de material isolante (como papel, por exemplo), existem diferenças? Verifique isso através de experiências.

Outros experimentos envolvendo processos de eletrização e forças elétricas podem ser feitos. Por exemplo, você pode verificar a atração entre um pente carregado e um filete de água que cai de uma torneira, ou entre o pente e pedacinhos de papel. Procure pensar em outras experiências e na explicação para elas com base na teoria vista. No próximo capítulo, veremos o conceito extremamente importante de campo elétrico.

3.5 Exercícios

3.1 Faça uma análise dimensional da lei de Coulomb e verifique se ela está dimensionalmente correta.

3.2 Verifique, na solução do exemplo 3.8, o caso de uma fio semi-infinito, tomando, com algum cuidado, o limite $\ell \to \infty$.

3.3 Aproveitando a solução do exercício anterior, encontre agora a solução para o fio infinito, tomando, também com cuidado, o limite $x_0 \to -\infty$ na expressão acima. Como o fio torna-se infinito, ele tem infinitas cargas. Você espera que a força seja também infinita? Argumente sobre sua resposta.

3.4 Duas cargas $Q_1 = 1,5 \times 10^{-9}$ C e $Q_2 = -4,5 \times 10^{-9}$ C ocupam dois dos vértices de um triângulo equilátero de lado $\ell = 10$ cm, e uma terceira carga Q ocupa o terceiro vértice do triângulo. Qual é o valor da carga Q se ela está em equilíbrio na direção perpendicular à reta que une as outras duas cargas? É possível que, para algum valor, a carga esteja em equilíbrio na direção paralela a essa reta?

3.5 Considere uma placa retangular de lados a e b com uma densidade de carga superficial constante e homogênea sobre ela. Calcule a

força elétrica gerada por esta configuração sobre uma carga Q situada numa posição $\vec{r}$ do espaço. Obtenha os limites importantes, como, por exemplo, uma placa semi-infinita numa direção, infinita numa direção e finita na outra, infinita numa direção e semi-infinita na outra, e infinita nas duas direções.

3.6 Compare a força elétrica entre duas cargas de 1 C situadas uma a 1 m da outra com a força gravitacional entre duas massas de 1 kg, também separadas pela mesma distância. É justificável desprezar efeitos gravitacionais quando tratamos com sistemas elétricos?

3.7 Um pentágono regular possui cargas Q, $2Q$, $-Q$, $-2Q$ e Q nos seus vértices, nesta ordem. Qual é a força resultante sobre uma carga Q situada no seu centro?

3.8 Calcule quantos elétrons há em 1 coulomb de carga. Supondo que esses elétrons vieram de algum átomo que perde elétrons com facilidade, como, por exemplo, o sódio, descubra a massa de sódio necessária para extrair um coulomb de carga. A massa atômica do sódio é de 23 g e ele é um átomo monovalente, isto é, cada átomo, em condições normais, perde apenas um elétron.

3.9 Uma pirâmide tetraédrica regular possui cargas Q situadas nos três vértices da base, e uma carga $-Q$ situada no quarto vértice, que se situa a uma altura H do centro da base triangular. A pirâmide tem todos os lados iguais e existe uma carga q exatamente no seu centro geométrico. Verifique qual é a carga q, se houver, que permanece em equilíbrio neste ponto, e em que direções.

3.10 Considere o mesmo problema anterior, só que agora a carga q vale Q, e não está mais fixa no centro geométrico da pirâmide. Ache um local de equilíbrio para essa carga.

3.11 Uma esfera uniformemente carregada tem raio R e uma carga total Q. Ache a força que ela produz sobre uma carga q situada a uma distância $\vec{r}$ do seu centro.

3.12 Um anel de raio R horizontal tem uma carga Q distribuída de for-

ma homogênea sobre ele. Calcule a força elétrica que age sobre uma carga q, de massa m, situada no eixo do anel, a uma distância z do centro. Estude os limites $z \gg R$, $z \to \infty$ e $z \to 0$. Existe, para alguma combinação de Q, q e z, um ponto de equilíbrio? Qual é o tipo de equilíbrio? Obs.: neste problema é necessário considerar a força gravitacional que age sobre a carga q.

3.13 Calcule a força elétrica entre o próton e o elétron do átomo de hidrogênio, supondo que eles estão separados por 5×10^{-11} m. Considerando que esta é a força responsável por manter o elétron girando em volta do próton, calcule a aceleração centrípeta e a velocidade escalar do elétron na órbita. Utilize os dados do apêndice A para valores numéricos.

Capítulo 4

Campos Elétricos, I: Conceitos Fundamentais

Este capítulo é dedicado ao estudo dos conceitos básicos relacionados ao campo elétrico.

4.1 O Campo Elétrico

No capítulo anterior vimos que, entre duas cargas elétricas quaisquer, age uma força elétrica, e que esta interação se dá pela troca de fótons entre as cargas. No entanto, cada carga tem a sua própria "nuvem" de fótons, que é totalmente independente da existência ou não de outra carga na sua vizinhança. Essa "nuvem" é uma característica intrínseca da carga e o seu "tamanho" é proporcional à intensidade da carga que a gera.

Quando colocamos uma carga na vizinhança de outra, estabelece-se entre elas uma força elétrica, causada pelas "nuvens" de ambas. Se trocarmos esta carga por outra, uma nova força aparece, e essa força, como já vimos, depende das duas cargas [1]. Ao colocarmos duas cargas uma próxima à outra, as "nuvens" de fótons de ambas são perturbadas. Se, no entanto, a primeira carga tiver um valor bastante pequeno, a perturbação causada por ela também será pequena. Essas cargas são conhecidas como *cargas de prova*,

[1] E também da distância entre elas, mas isso, na discussão presente, é irrelevante.

enquanto a carga que tem a "nuvem" perturbada é chamada de *carga-fonte* ou *carga geradora*. Para estudar forças elétricas é necessário sempre haver pelo menos uma carga-fonte e uma carga de prova. Assim, considerando dois problemas semelhantes em que a única diferença é a carga de prova, é preciso estudá-los matematicamente desde o início, caso estejamos interessados nas forças elétricas do sistema.

Como a "nuvem" de fótons é uma característica de cada carga, seria relevante estudar esta propriedade, pois assim não haveria necessidade de utilizar uma carga de prova em particular, e para os dois problemas semelhantes mencionados acima, se soubéssemos como são as "nuvens" das cargas geradoras, o efeito causado por elas sobre uma carga de prova A ou B seria automaticamente conhecido. Esta propriedade associada às cargas, a "nuvem" de fótons, é denominada *campo elétrico* $\vec{\mathcal{E}}$. Operacionalmente, o campo elétrico é definido através de

$$\vec{\mathcal{E}} = \lim_{q_P \to 0} \frac{\vec{F}_P}{q_p} \tag{4.1}$$

onde q_p é uma carga de prova sujeita a uma força elétrica $\vec{F}_P$ gerada por cargas-fonte. Aqui é preciso fazer algumas considerações. Primeiro, a equação acima fornece na verdade a *intensidade do campo elétrico*, e não o campo elétrico em si. No entanto, essa denominação não é utilizada na prática, de modo que a grandeza acima é chamada simplesmente de campo elétrico. Segundo, o limite é apenas formal, pois a carga é quantizada e não pode assumir valores menores em módulo do que a carga do elétron. Terceiro, apesar de a definição operacional ser dada em termos de cargas de prova, o campo elétrico é uma propriedade da carga geradora, associada à "nuvem" de fótons que envolve cada carga. Quarto, em medidas experimentais, a carga de prova deve ter o menor valor possível, para que o campo gerado por ela não perturbe significativamente a distribuição de cargas-fonte cujo campo se quer medir. Por último, a unidade do campo elétrico, como pode ser visto da expressão acima, no SI, é N/C.

Com a definição dada acima, e lembrando que a lei de Coulomb para a força elétrica entre duas cargas é dada pela expressão 3.1,

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

vemos que o campo elétrico gerado na posição $\vec{r}$ por uma única carga-fonte pontual Q, situada na posição $\vec{r}\,'$, é obtido através de

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \tag{4.2}$$

e assim, a força exercida sobre uma carga de prova q qualquer é

$$\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}} \tag{4.3}$$

e, se a carga for mudada para q', a força será

$$\vec{F}' = q'\vec{\mathcal{E}}$$

o que é muito mais simples do que resolver o problema desde o início.

O campo elétrico gerado por várias cargas pontuais é a soma vetorial dos campos individuais, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} + \cdots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_n)}{|\vec{r}-\vec{r}_n|^3}$$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \tag{4.4}$$

e no caso de uma distribuição contínua de cargas, num certo volume V, com uma densidade volumétrica de cargas $\rho(\vec{r}\,')$, a soma se transforma numa integral, e assim, a expressão torna-se

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV \tag{4.5}$$

onde a integral é feita sobre todo o volume V ocupado pelas cargas geradoras de campo elétrico. Note que $\vec{r}$ é sempre a posição onde queremos calcular o campo elétrico e que $\vec{r}\,'$ é sempre a posição das cargas geradoras. Quando as cargas se distribuem sobre uma superfície S, então temos uma densidade superficial de cargas $\sigma(\vec{r}\,')$, ao passo que, se as cargas estiverem distribuídas em linhas de carga, a densidade será uma densidade linear $\lambda(\vec{r}\,')$. Alguns exemplos são tratados a seguir.

Exemplo 4.1. *Considere uma carga Q situada na origem.*

a) Qual é o campo elétrico gerado por ela?

Quando a carga está situada na origem, $\vec{r}' = 0$, e o campo elétrico fica

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \tag{4.6}$$

Observe que ele é um campo vetorial com uma simetria esférica radial, como mostra a figura 4.1.

$Q > 0$ $Q < 0$

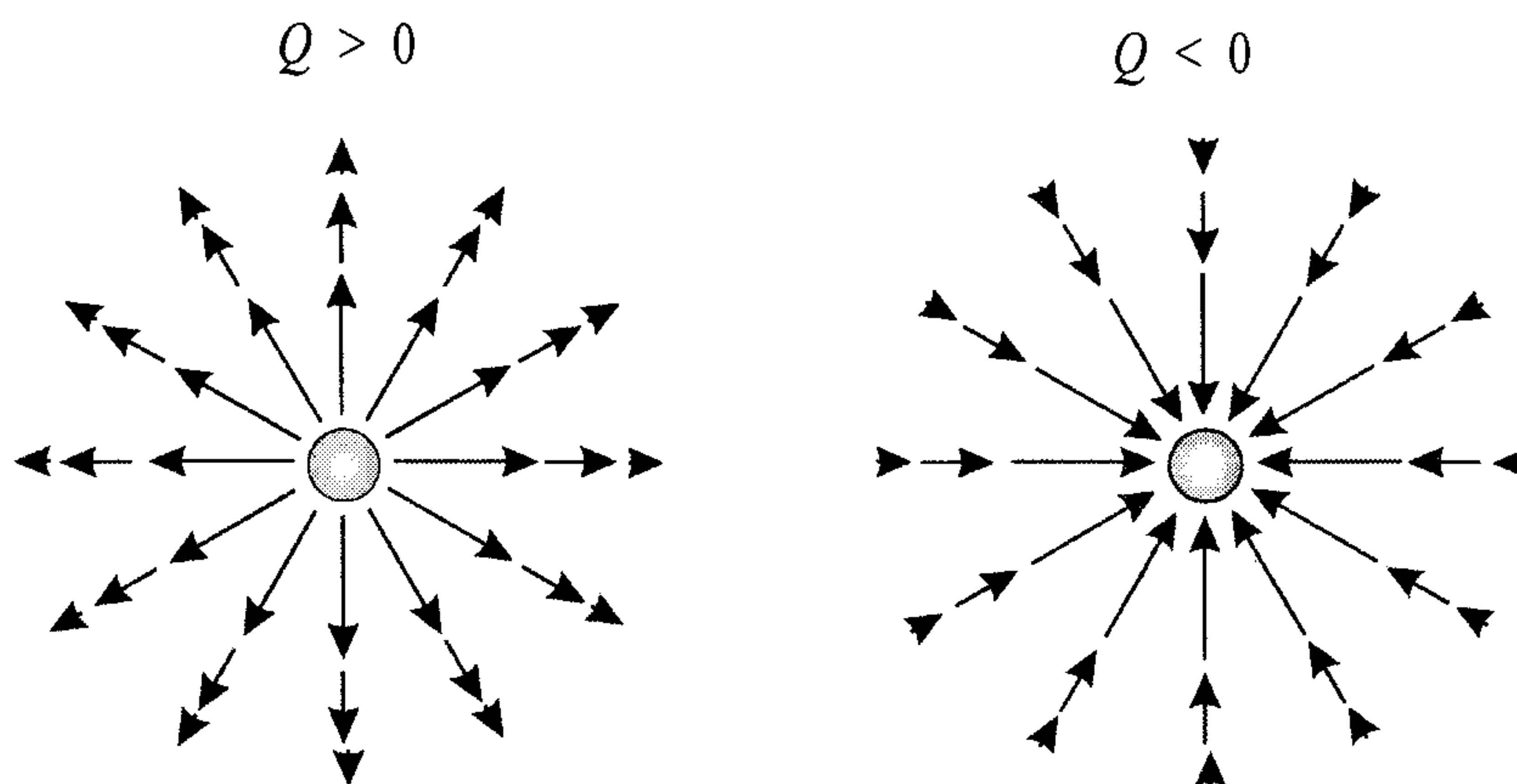



Figura 4.1: Campo elétrico vetorial de uma carga pontual. Note que, a uma mesma distância, o campo em módulo é constante, e que ele diminui quando ela aumenta.

Aqui, vale a pena nos aprofundarmos um pouco mais e discutir fisicamente o motivo que leva o campo elétrico de uma carga pontual a ser como o apresentado na figura 4.1. Para tanto, imagine uma esfera homogênea e sem nenhuma imperfeição, situada no vácuo. Essa esfera possui infinitos eixos de simetria que passam pelo seu centro. Se a olharmos de qualquer direção, veremos exatamente a mesma coisa. Não há como identificar uma região "em cima" ou "embaixo", ou então "esquerda" ou "direita", ou "norte", "sul", "leste" ou "oeste". Todas as direções são idênticas, por causa da enorme simetria que a esfera apresenta. Assim, qualquer influência que essa esfera produza no meio externo deve acompanhar essa simetria, ou seja, deve ser a mesma em qualquer direção radial a partir do centro da esfera.

Podemos pensar numa carga pontual no vácuo como sendo uma esfera cujo raio tende a zero. Como acontece com a esfera, a carga pontual tem infinitos eixos de simetria que passam pelo seu centro. Mas a carga pontual gera uma perturbação no espaço. Essa perturbação, a que chamamos de campo elétrico, corresponde aos fótons que ela produz e absorve continuamente. Não há nenhum

motivo para que a carga emita mais fótons numa direção do que em outra. Portanto, ela deve emitir fótons de maneira tal que todas as direções sejam igualmente privilegiadas, ou seja, o campo elétrico gerado por uma carga pontual no vácuo tem que ter, *necessariamente*, uma simetria esférica radial como a da figura 4.1, e esse fato é percebido até mesmo intuitivamente. Se apresentássemos o campo elétrico de uma carga pontual como sendo algum dos que aparecem na figura 4.2,

$Q > 0$ $\quad$ $Q < 0$

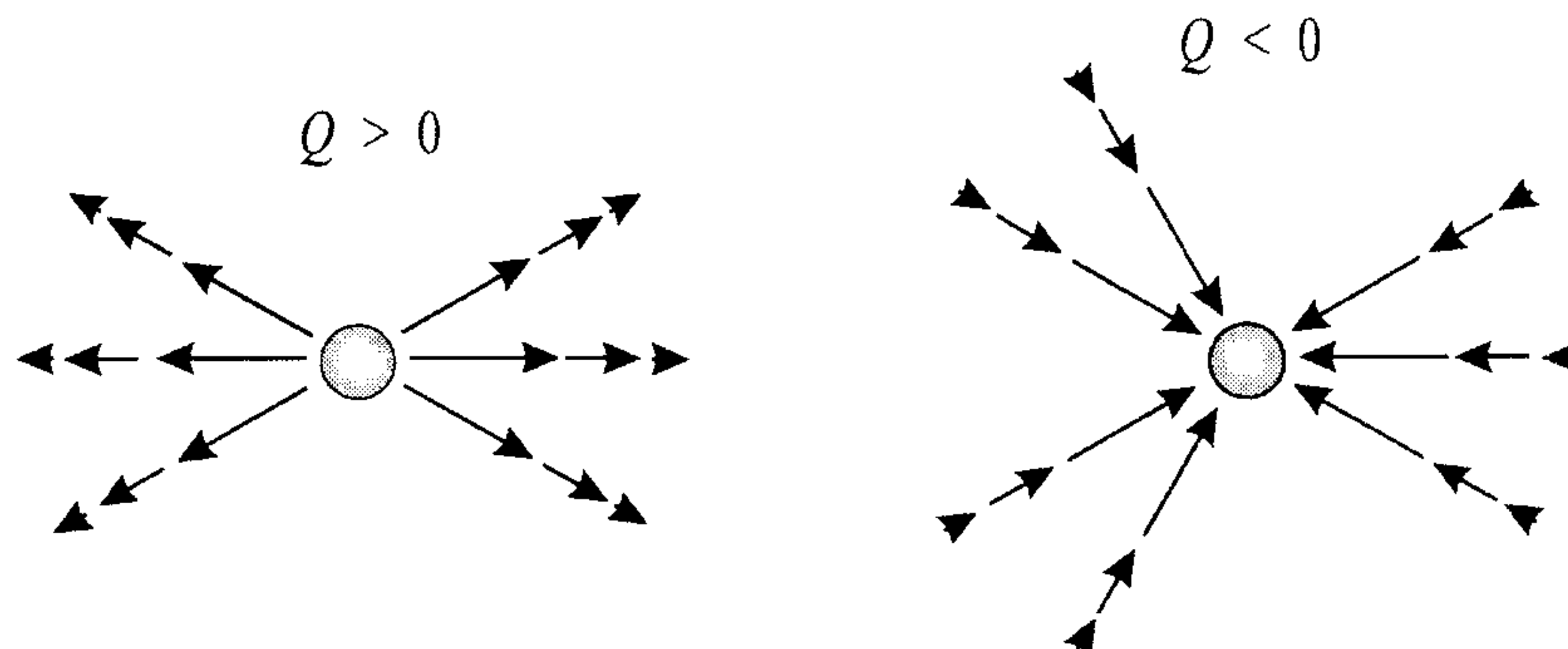



Figura 4.2: Suposições (incorretas) para os campos elétricos vetoriais de uma carga pontual.

automaticamente surgiria a seguinte questão: o que está errado aqui? Poderíamos pensar em duas respostas para essa pergunta. A primeira envolve a carga, que poderia não ser esférica e homogênea, e assim, ela teria um campo elétrico não-uniforme. Entretanto, a carga é pontual, sem dimensão, de modo que essa hipótese não parece plausível, já que algo sem dimensão não pode ter inomogeneidades, considerando que não ocupa um volume no espaço. A segunda resposta envolve o meio, que é o vácuo, e então o vácuo não seria homogêneo, apresentando propriedades diferentes em direções diferentes. Ora, essa hipótese também é inconsistente, pois o vácuo é imaterial, é vazio, e o vazio não pode ser diferente numa direção do que ele é na outra. Conseqüentemente, os campos apresentados na figura 4.2 não podem estar corretos, e tampouco podem representar fisicamente o campo elétrico de uma carga pontual, que é dado, corretamente, pela figura 4.1.

b) Qual é o valor do campo a uma distância $d = 10$ cm, se a carga vale $Q = 2 \times 10^{-7}$ C?

Utilizando o valor

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \ \mathrm{N.m^2/C^2}$$

obtemos, para o módulo do campo elétrico,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \\
&= 9\times 10^9 \times \frac{2\times 10^{-7}}{[10^{-1}]^2} \\
\mathcal{E} &= 1,8\times 10^5 \text{ N/C}
\end{aligned}
$$

cuja direção é radial com sentido para fora.

c) Qual é a força gerada sobre uma carga $q = -3\times 10^{-6}$ C situada na posição descrita no item anterior?

A força elétrica a que esta carga está submetida é dada por

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= q\vec{\mathcal{E}} \\
&= -3\times 10^{-6}\times 1,8\times 10^5\ \hat{\mathbf{r}} \\
\vec{F} &= -0,54\ \hat{\mathbf{r}}\text{ N}
\end{aligned}
$$

Trata-se de uma força atrativa, orientada na direção radial para dentro.

Exemplo 4.2. *Considere um triângulo equilátero de lado* a *cujos vértices são ocupados por cargas $+Q$, $-Q$ e $+2Q$ ($Q > 0$), como mostra a figura 4.3.*

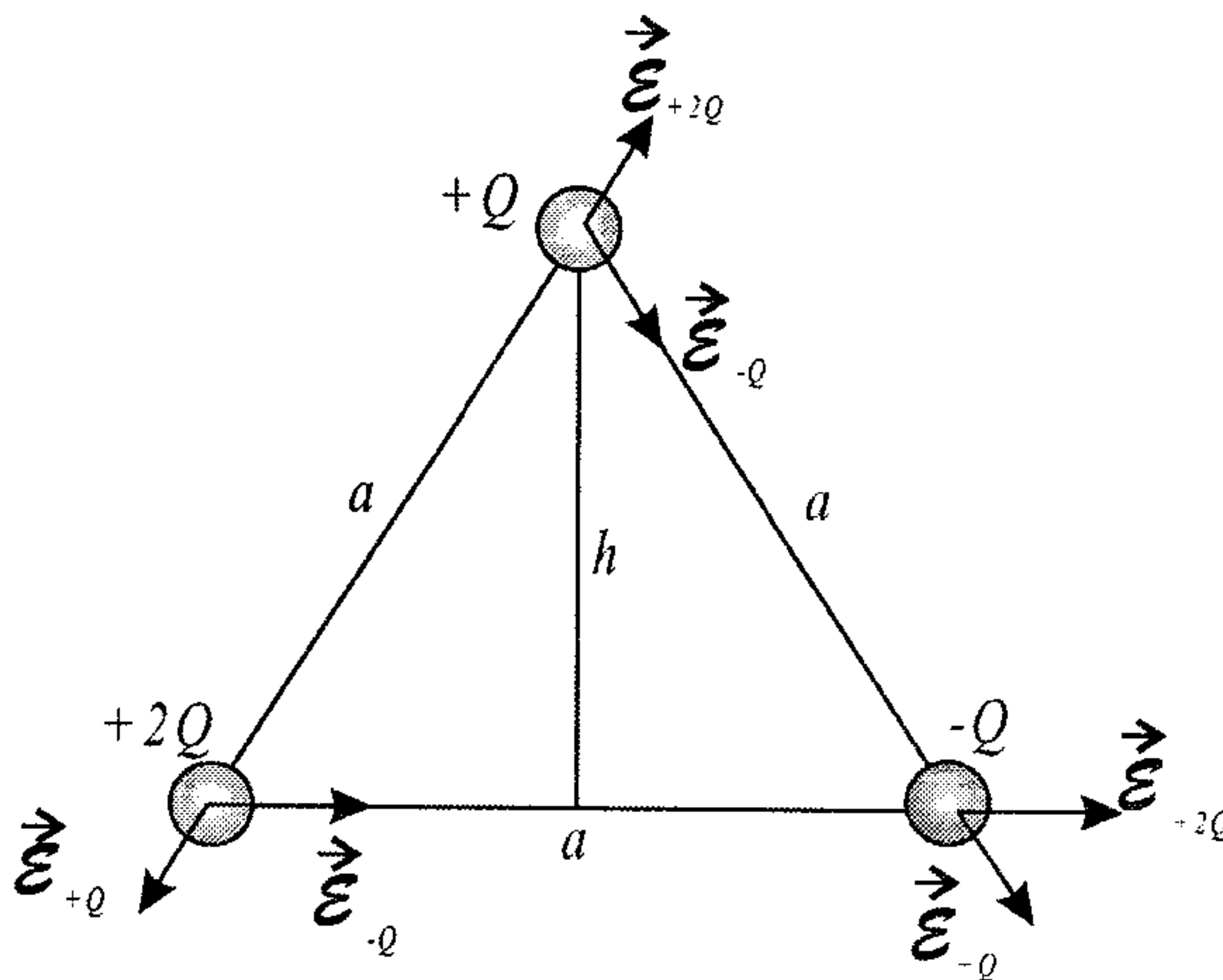



Figura 4.3: Um triângulo equilátero de lado a, formado por cargas $+Q$, $-Q$ e $+2Q$.

a) Calcule o campo elétrico resultante sobre cada carga.

Para calcular o campo elétrico sobre cada carga, é útil descrever suas posições num sistema de coordenadas. No nosso caso, vamos considerar as seguintes posições no plano xy:

$$\text{Carga } +2Q : \vec{r}_{+2Q} = 0 \quad \text{(na origem)}$$
$$\text{Carga } -Q : \vec{r}_{-Q} = a\,\hat{\mathbf{i}}$$
$$\text{Carga } +Q : \vec{r}_{+Q} = a\cos 60\,\hat{\mathbf{i}} + a\,\text{sen}\,60\,\hat{\mathbf{j}} = \frac{a}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{j}}$$

Com as posições assim definidas, obtemos

$$\vec{r}_{+Q} - \vec{r}_{+2Q} = \frac{a}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{j}} - 0 = \frac{a}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{j}}$$
$$\vec{r}_{-Q} - \vec{r}_{+2Q} = a\,\hat{\mathbf{i}} - 0 = a\,\hat{\mathbf{i}}$$
$$\vec{r}_{-Q} - \vec{r}_{+Q} = a\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{a}{2}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{a\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{j}} = \frac{a}{2}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{a\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{j}}$$

e também,

$$|\vec{r}_{+Q} - \vec{r}_{+2Q}| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}} = a$$
$$|\vec{r}_{-Q} - \vec{r}_{+2Q}| = a$$
$$|\vec{r}_{-Q} - \vec{r}_{+Q}| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}} = a$$

Agora, utilizamos a equação 4.2 para calcular os campos elétricos gerados por cada carga na posição das outras duas. Primeiro, consideramos como carga geradora a carga $+2Q$, que gera os seguintes campos:

$$\vec{\mathcal{E}}_{+2Q,+Q} = \frac{+2Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}_{+Q} - \vec{r}_{+2Q})}{|\vec{r}_{+Q} - \vec{r}_{+2Q}|^3}$$
$$= \frac{+2Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left(\frac{a}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{j}}\right)}{a^3}$$
$$\vec{\mathcal{E}}_{+2Q,+Q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(\hat{\mathbf{i}} + \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{j}}\right), \qquad \text{sobre a carga } +Q$$

e

$$\vec{\mathcal{E}}_{+2Q,-Q} = \frac{+2Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}_{-Q} - \vec{r}_{+2Q})}{|\vec{r}_{-Q} - \vec{r}_{+2Q}|^3}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{+2Q,-Q} = \frac{+2Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{a\,\hat{\mathbf{i}}}{a^3}$$
$$\vec{\mathcal{E}}_{+2Q,-Q} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\,\hat{\mathbf{i}}, \qquad \text{sobre a carga } -Q$$

Para a carga geradora $-Q$, obtemos os seguintes campos:

$$\vec{\mathcal{E}}_{-Q,+Q} = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}_{+Q} - \vec{r}_{-Q})}{|\vec{r}_{+Q} - \vec{r}_{-Q}|^3}$$
$$= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left(-\frac{a}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{j}}\right)}{a^3}$$
$$\vec{\mathcal{E}}_{-Q,+Q} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}\left(\hat{\mathbf{i}} - \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{j}}\right), \qquad \text{sobre a carga } +Q$$

e

$$\vec{\mathcal{E}}_{-Q,+2Q} = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}_{+2Q} - \vec{r}_{-Q})}{|\vec{r}_{+2Q} - \vec{r}_{-Q}|^3}$$
$$= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{-a\,\hat{\mathbf{i}}}{a^3}$$
$$\vec{\mathcal{E}}_{-Q,+2Q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\,\hat{\mathbf{i}}, \qquad \text{sobre a carga } +2Q$$

E finalmente, quando a carga geradora é a carga $+Q$, achamos

$$\vec{\mathcal{E}}_{+Q,-Q} = \frac{+Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}_{-Q} - \vec{r}_{+Q})}{|\vec{r}_{-Q} - \vec{r}_{+Q}|^3}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left(\frac{a}{2}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{a\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{j}}\right)}{a^3}$$
$$\vec{\mathcal{E}}_{+Q,-Q} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}\left(\hat{\mathbf{i}} - \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{j}}\right) \qquad \text{sobre a carga } -Q$$

e

$$\vec{\mathcal{E}}_{+Q,+2Q} = \frac{+Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}_{+2Q} - \vec{r}_{+Q})}{|\vec{r}_{+2Q} - \vec{r}_{+Q}|^3}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left(-\frac{a}{2}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{a\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{j}}\right)}{a^3}$$
$$\vec{\mathcal{E}}_{+Q,+2Q} = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}\left(\hat{\mathbf{i}} + \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{j}}\right) \qquad \text{sobre a carga } +2Q$$

De posse dos campos elétricos acima, o campo resultante sobre cada uma das carga é obtido através da soma dos campos gerados pelas outras. Vamos começar com a carga $+2Q$.

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_{+2Q} &= \vec{\mathcal{E}}_{-Q,+2Q} + \vec{\mathcal{E}}_{+Q,+2Q} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}(\,\hat{\mathbf{i}} + \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{j}}) \\ \vec{\mathcal{E}}_{+2Q} &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}(\,\hat{\mathbf{i}} - \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{j}})\end{aligned}$$

O campo resultante sobre a carga $-Q$ é

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_{-Q} &= \vec{\mathcal{E}}_{+2Q,-Q} + \vec{\mathcal{E}}_{+Q,-Q} \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}(\,\hat{\mathbf{i}} - \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{j}}) \\ \vec{\mathcal{E}}_{-Q} &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}(\,5\hat{\mathbf{i}} - \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{j}})\end{aligned}$$

E sobre a carga $+Q$ age o campo

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_{+Q} &= \vec{\mathcal{E}}_{+2Q,+Q} + \vec{\mathcal{E}}_{-Q,+Q} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}(\,\hat{\mathbf{i}} + \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{j}}) + \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}(\,\hat{\mathbf{i}} - \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{j}}) \\ \vec{\mathcal{E}}_{+Q} &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}(3\,\hat{\mathbf{i}} + \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{j}})\end{aligned}$$

b) Qual é a força elétrica que age sobre cada carga?

Como já conhecemos os campos elétricos, podemos encontrar a força elétrica através de

$$\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}}$$

Assim, para a carga $+2Q$, temos

$$\begin{aligned}\vec{F}_{+2Q} &= +2Q\vec{\mathcal{E}}_{+2Q} \\ &= +2Q\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}(\,\hat{\mathbf{i}} - \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{j}}) \\ \vec{F}_{+2Q} &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}(\,\hat{\mathbf{i}} - \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{j}})\end{aligned}$$

enquanto a força sobre a carga $-Q$ vale

$$\begin{aligned}\vec{F}_{-Q} &= -Q\vec{\mathcal{E}}_{-Q} \\ &= -Q\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}(\,5\hat{\imath} - \sqrt{3}\,\hat{\jmath}) \\ \vec{F}_{-Q} &= -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2}(\,5\hat{\imath} - \sqrt{3}\,\hat{\jmath})\end{aligned}$$

A força elétrica sobre a carga $+Q$ é

$$\begin{aligned}\vec{F}_{+Q} &= \vec{\mathcal{E}}_{+Q} \\ &= +Q\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}(3\,\hat{\imath} + \sqrt{3}\,\hat{\jmath}) \\ \vec{F}_{+Q} &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2}(3\,\hat{\imath} + \sqrt{3}\,\hat{\jmath})\end{aligned}$$

Exemplo 4.3. *Utilizando as comparações feitas entre a lei de Newton e a l de Coulomb no exemplo 3.5, obtenha a expressão para o campo gravitacion gerado por uma distribuição de massas de densidade $\rho(\vec{r}\,')$, num volume V.*

No exemplo 3.5 vimos que as duas leis de força tornam-se equivalent com as seguintes substituições:

$$\begin{aligned}Q &\leftrightarrow M \\ \rho &\leftrightarrow \rho_m \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &\leftrightarrow -G\end{aligned}$$

Assim, adaptando a equação 4.5,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\,dV$$

obtemos, para o campo gravitacional $\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}\,)$, a expressão

$$\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}\,) = -G\int_V \rho_m(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\,dV \qquad (4.7$$

Exemplo 4.4. *Utilizando os resultados do exemplo 3.8, responda ao seguinte.*

a) Qual é o campo elétrico gerado pelo fio de comprimento ℓ ?

O campo elétrico pode ser obtido das expressões 3.5 e 3.6,

$$\vec{F}_y = \frac{q\lambda\hat{\mathbf{j}}}{4\pi\epsilon_0 y}\left[\frac{x_0+\ell-x}{\sqrt{(x_0+\ell-x)^2+y^2}} - \frac{x_0-x}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}}\right]$$
$$\vec{F}_x = \frac{q\lambda\hat{\mathbf{i}}}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x_0+\ell-x)^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}}\right]$$

se lembrarmos que

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\vec{F}}{q}$$

e assim,

$$\vec{\mathcal{E}}_x = \frac{\lambda\hat{\mathbf{i}}}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x_0+\ell-x)^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}}\right] \tag{4.8a}$$
$$\vec{\mathcal{E}}_y = \frac{\lambda\hat{\mathbf{j}}}{4\pi\epsilon_0 y}\left[\frac{x_0+\ell-x}{\sqrt{(x_0+\ell-x)^2+y^2}} - \frac{x_0-x}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}}\right] \tag{4.8b}$$

b) Qual é o campo elétrico de um fio semi-infinito que se estende de x_0 até ∞ ?

Neste caso, é preciso tomar algum cuidado. Quando o fio é semi-infinito, $\ell \to \infty$, e este limite deve ser tomado de maneira criteriosa. No caso do campo elétrico na direção x, vemos, na equação 4.8a, que o segundo termo entre colchetes não contém ℓ, e assim, esse termo permanece igual. Já no primeiro termo, ℓ aparece no denominador da fração. Quando $\ell \to \infty$, o termo $\sqrt{(x_0+\ell-x)^2+y^2}$ também tende a infinito, e como o numerador é fixo (e vale 1), a fração como um todo tende a zero, e esse termo desaparece da expressão final, que fica

$$\vec{\mathcal{E}}_x = \frac{\lambda\hat{\mathbf{i}}}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}}\right]$$
$$\vec{\mathcal{E}}_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}}\hat{\mathbf{i}}$$

Note que, se a densidade de cargas for positiva, o campo na direção x é orientado no sentido negativo do eixo, pois as cargas situadas à direita da posição x onde queremos calcular o campo elétrico se estendem até o infinito e produzem uma contribuição maior para o campo elétrico no sentido negativo do que as cargas situadas à esquerda da posição x, que são em número finito. Quando a densidade de cargas é negativa, ocorre o inverso, e a componente em x do campo elétrico aponta no sentido positivo.

Para calcular a componente y do campo elétrico, observamos, na equação 4.8b, que o segundo termo entre colchetes não depende de ℓ, e que, portanto, ele não muda. Todavia, o primeiro termo contém ℓ no numerador e no denominador. Neste caso, podemos fazer a seguinte transformação:

$$\frac{x_0 + \ell - x}{\sqrt{(x_0 + \ell - x)^2 + y^2}} = \frac{x_0 + \ell - x}{(x_0 + \ell - x)\sqrt{1 + \left[\frac{y}{x_0+\ell-x}\right]^2}}$$

$$\frac{x_0 + \ell - x}{\sqrt{(x_0 + \ell - x)^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{y}{x_0+\ell-x}\right]^2}}$$

e agora consideramos o limite $\ell \to \infty$ na expressão acima. O resultado é

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{x_0 + \ell - x}{\sqrt{(x_0 + \ell - x)^2 + y^2}} = \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{y}{x_0+\ell-x}\right]^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0}}$$

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{x_0 + \ell - x}{\sqrt{(x_0 + \ell - x)^2 + y^2}} = 1$$

e assim, o campo elétrico em y fica

$$\vec{\mathcal{E}}_y = \frac{\lambda\,\hat{\mathbf{j}}}{4\pi\epsilon_0 y}\left[1 - \frac{x_0 - x}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + y^2}}\right]$$

c) Qual é o campo elétrico gerado por um fio infinito na direção x ?

Qualitativamente, podemos esperar que o campo elétrico de um fio infinito não tenha componente na direção x, por causa da simetria da situação. Para cada contribuição para o campo elétrico na direção x gerada por uma carga em x_1, existe uma contribuição igual e oposta gerada por outra carga em x_2, e como o fio é infinito, isso ocorre para todas as cargas. Portanto, no

total, o campo em x deve ser nulo. Só deve existir campo na direção y e, por simetria, esse campo deve ter uma simetria cilíndrica em torno do fio, dependendo apenas da distância ρ ao fio. No plano xy, podemos obter as expressões dos campos elétricos a partir dos resultados do item anterior, tomando com cuidado o limite $x_0 \to -\infty$. Vejamos o que ocorre então para a componente x, que é

$$\vec{\mathcal{E}}_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}}\,\hat{\mathbf{i}}$$

Quando tomamos o limite $x_0 \to -\infty$, a fração tende a zero, e o resultado é

$$\vec{\mathcal{E}}_x = 0$$

o que concorda com o que foi dito acima. A componente y do campo é

$$\vec{\mathcal{E}}_y = \frac{\lambda\hat{\mathbf{j}}}{4\pi\epsilon_0 y}\left[1-\frac{x_0-x}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}}\right]$$

e aqui é preciso ter cuidado para não cometer enganos. Como x_0 é um número negativo, vamos reescrever a fração dentro dos colchetes da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{x_0-x}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}} &= -\frac{|x_0|+x}{\sqrt{[-(|x_0|+x)]^2+y^2}}\\
&= -\frac{|x_0|+x}{\sqrt{(|x_0|+x)^2+y^2}}\\
\frac{x_0-x}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}} &= -\frac{|x_0|+x}{(|x_0|+x)\sqrt{1+\left[\frac{y}{|x_0|+x}\right]^2}}\\
\frac{x_0-x}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}} &= -\frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{y}{|x_0|+x}\right]^2}}
\end{aligned}$$

e, agora sim, podemos tomar o limite

$$\begin{aligned}
\lim_{x_0\to-\infty}\frac{x_0-x}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}} &= -\lim_{x_0\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{y}{|x_0|+x}\right]^2}}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{1+0}}\\
\lim_{x_0\to-\infty}\frac{x_0-x}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2}} &= -1
\end{aligned}$$

e a componente y do campo fica

$$\vec{\mathcal{E}}_y = \frac{\lambda \hat{\mathbf{j}}}{4\pi\epsilon_0 y}[1 - (-1)]$$

$$\vec{\mathcal{E}}_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}\hat{\mathbf{j}}$$

Por causa da simetria cilíndrica em torno do fio infinito no eixo x, o campo elétrico de um fio infinito situado no eixo z é um campo radial, dependente da coordenada cilíndrica ρ, e ele pode ser escrito como

$$\vec{\mathcal{E}}_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{4.9}$$

de modo que o fio gera uma campo elétrico vetorial com uma simetria cilíndrica, como mostra a figura 4.4. Este resultado será obtido novamente na seção 4.2, quando estudarmos a *Lei de Gauss.* Veja que uma carga pontual sem dimensão apresenta um campo com uma simetria esférica tridimensional ao seu redor, como se observa na equação 4.6 e na figura 4.1. No caso do fio infinito, que tem uma dimensão linear bem definida, a simetria é cilíndrica, bidimensional, como se vê na figura 4.4, sugerindo que a densidade de carga, ao ganhar uma dimensão, o fez à custa da diminuição da simetria do campo elétrico. Qual é a simetria que você espera para um campo elétrico gerado por um plano infinito com uma densidade de cargas σ ?

$\lambda > 0$ $\lambda < 0$

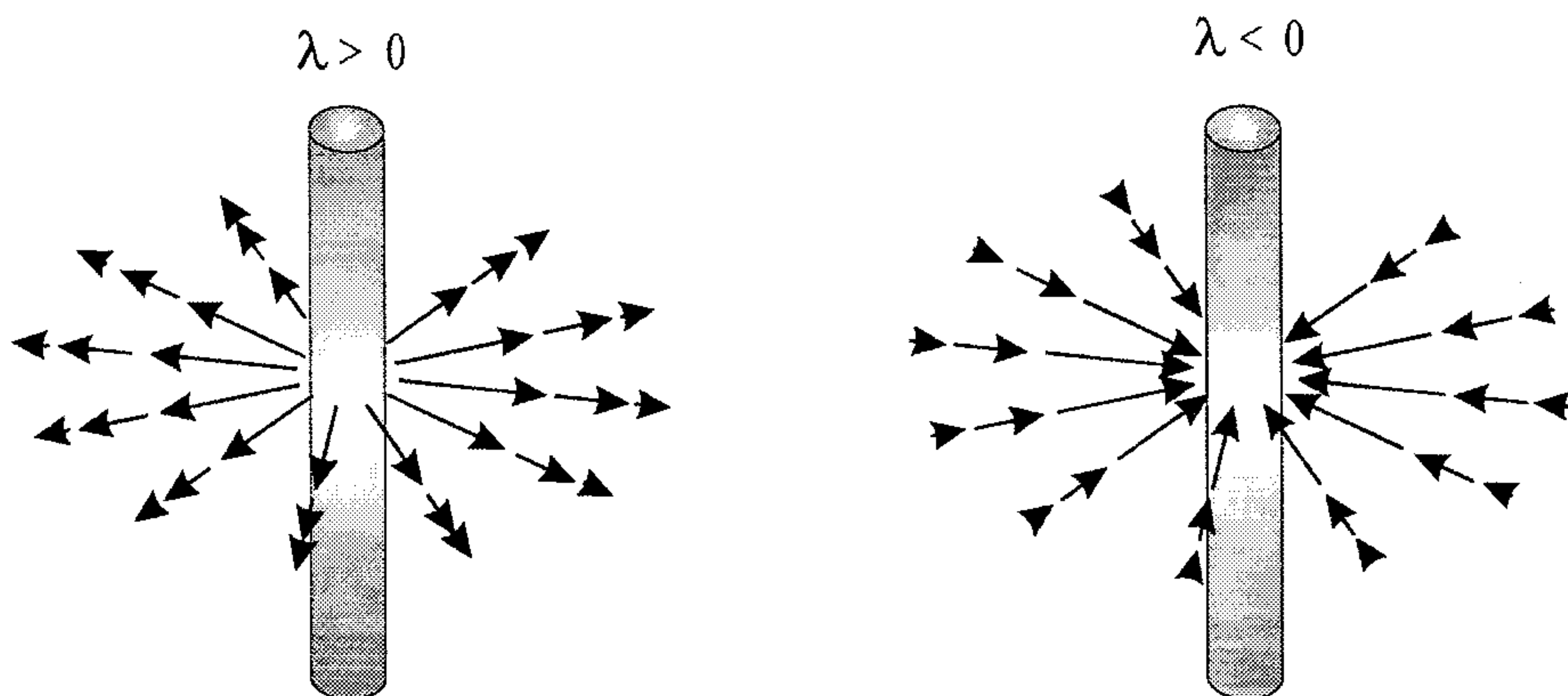



Figura 4.4: Campo elétrico vetorial de um fio infinito. Note que, a uma mesma distância do eixo z, o campo em módulo é constante, diminuindo com o aumento desta.

Exemplo 4.5. *Considere uma espira metálica de raio R carregada com uma carga total Q positiva, como mostra a figura 4.5.*

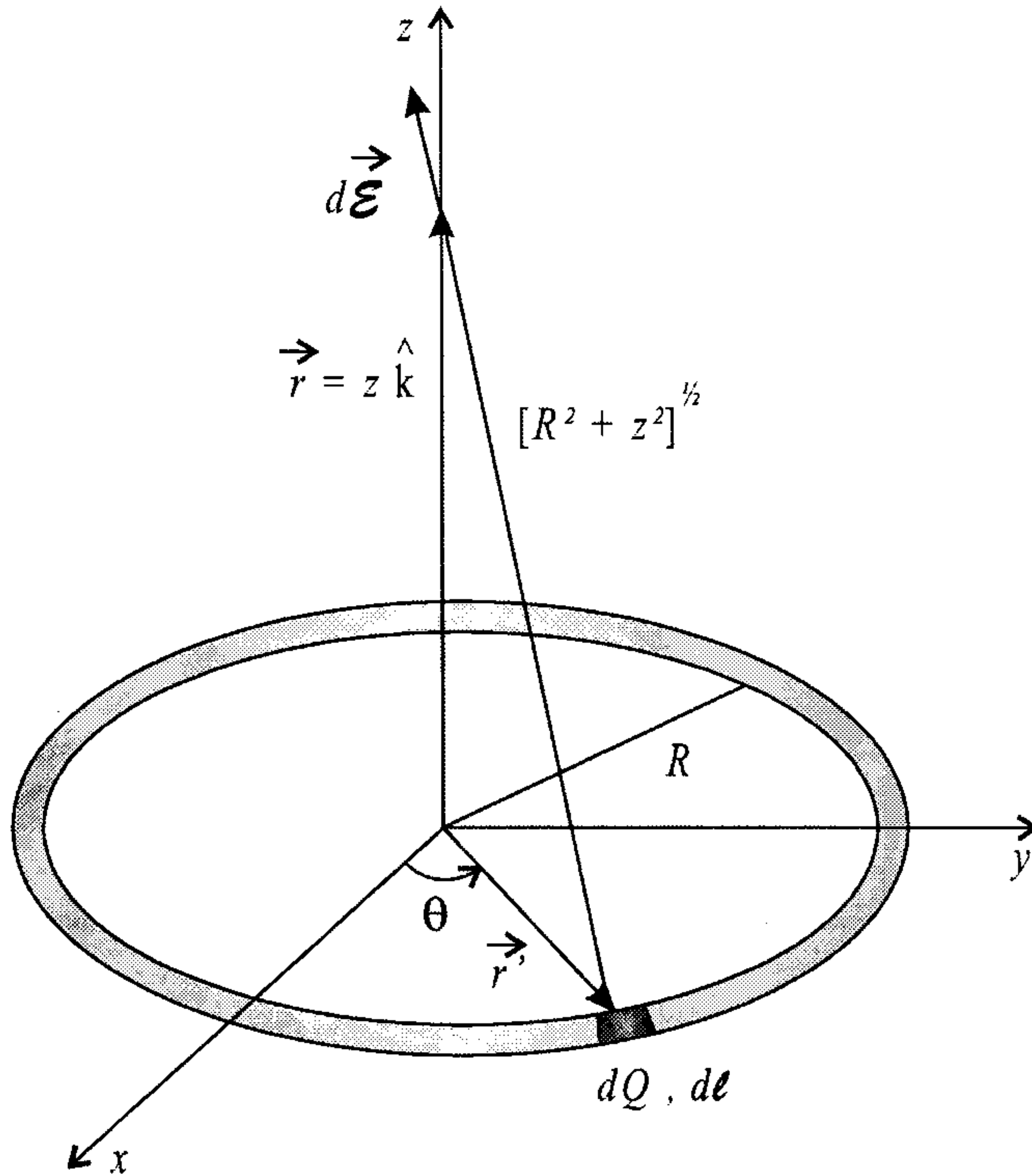



Figura 4.5: Espira metálica de carga positiva Q.

a) Qual é o campo elétrico gerado por essa espira num ponto situado no seu eixo de simetria, a uma distância z da origem?

Neste problema, a carga está distribuída de forma homogênea sobre a espira, e assim, temos uma densidade linear λ sobre a circunferência da espira. Assim, adaptando a equação 4.5, obtemos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_C \lambda \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, d\ell$$

A densidade de cargas é dada por

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R} = \frac{dQ}{d\ell} \tag{4.10}$$

Além disso, $d\ell$ é um segmento de arco na circunferência, e ele vale

$$d\ell = R\,d\theta$$

e os vetores $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$ são

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= z\,\hat{\mathbf{k}} \\
\vec{r}\,' &= x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} = R\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{j}} \\
\vec{r} - \vec{r}\,' &= z\,\hat{\mathbf{k}} - R\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} - R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{j}} \\
|\vec{r} - \vec{r}\,'| &= \sqrt{z^2 + R^2\cos^2\theta + R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} = \sqrt{z^2 + R^2} \\
|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3 &= \left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Com todas as grandezas definidas acima, o campo elétrico fica

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{z\,\hat{\mathbf{k}} - R\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} - R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{j}}}{\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,R\,d\theta$$

Por questões de simetria, esperamos que o campo nas direções x e y se anul restando apenas uma contribuição na direção z. Isto ocorre porque, para ca da carga dQ, existe uma carga simétrica dQ' cuja contribuição para o camp nas direções x e y é oposta àquela de dQ, e ambas se cancelam mutuament restando apenas a contribuição na direção z. Vejamos se os resultados ma temáticos estão de acordo com a previsão física. Primeiro, vamos calcular parte da integral em z, que é

$$\vec{\mathcal{E}}_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,R\,d\theta$$

ou

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}_z &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{zR\,\hat{\mathbf{k}}}{\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{zR\,\hat{\mathbf{k}}}{\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\theta\right)_0^{2\pi} \\
\vec{\mathcal{E}}_z &= \frac{\lambda}{2\epsilon_0}\frac{zR}{\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_z = \frac{Q}{2\pi R}\frac{1}{2\epsilon_0}\frac{zR}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\vec{\mathcal{E}}_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qz}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\hat{\mathbf{k}}$$

onde usamos a equação 4.10, para substituir a densidade de cargas λ. Para a componente x, temos

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}_x &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} -\frac{R\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}}}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,R\,d\theta \\
&= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^2\,\hat{\mathbf{i}}}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta \\
&= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^2\,\hat{\mathbf{i}}}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\operatorname{sen}\theta\right)_0^{2\pi} \\
\vec{\mathcal{E}}_x &= 0
\end{aligned}$$

que se anula, como esperávamos. A componente y fica

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}_y &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} -\frac{R\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{j}}}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,R\,d\theta \\
&= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^2\,\hat{\mathbf{j}}}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^2\,\hat{\mathbf{j}}}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\cos\theta\right)_0^{2\pi} \\
\vec{\mathcal{E}}_y &= 0
\end{aligned}$$

que também vai a zero, como deve ser. Assim, o campo da espira metálica, no seu eixo, é dado por

$$\vec{\mathcal{E}}_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qz}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\hat{\mathbf{k}} \tag{4.11}$$

b) Qual é o campo na origem?

Na origem, temos $z = 0$, e, por simetria, esperamos um campo nulc pois os campos gerados pelas cargas simétricas deve se anular perfeitament nesta região. De fato, usando a expressão acima, temos

$$\vec{\mathcal{E}}_z = 0$$

c) Qual é o campo para regiões muito afastadas da espira?

Neste caso, queremos o campo quando z é muito grande se comparad com R, ou seja, $z \gg R$. Para obter este resultado, vamos reescrever a equa ção 4.11 como

$$\vec{\mathcal{E}}_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{z^3\left[1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{k}}$$

e agora expandimos a última fração numa série de Taylor (veja a seção 2.1 equação 2.6), o que resulta em

$$\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 1 - \frac{3}{2}\frac{R^2}{z^2} + \cdots$$

e como $z \gg R$, podemos considerar apenas os dois primeiros termos da ex pansão, ou seja,

$$\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \cong 1 - \frac{3}{2}\frac{R^2}{z^2}$$

e o campo elétrico fica

$$\vec{\mathcal{E}}_z \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \left[1 - \frac{3}{2}\frac{R^2}{z^2}\right] \hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_z \cong \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} - \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{z^4}\right] \hat{\mathbf{k}} \qquad z \gg R$$

e quando $z \ggg R$, obtemos o resultado

$$\vec{\mathcal{E}}_z \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{z^2}\hat{\mathbf{k}} \qquad z \ggg R$$

que é idêntico ao campo gerado por uma carga pontual na origem. Na verdade, quando estamos muito longe da espira, não podemos perceber diferenças nos efeitos provocados por ela ou por uma carga pontual na origem sobre uma carga de prova situada no eixo z, e assim, o campo elétrico deve ser o mesmo. Veja que esta expressão só vale para o campo num ponto no eixo z. O campo elétrico para um ponto situado fora do eixo z é diferente, por causa da falta de simetria da situação.

Os diagramas vetoriais apresentados nas figuras 4.1 e 4.4 para o campo elétrico podem se tornar extremamente complicados, dependendo da distribuição de cargas, e isso, ao invés de auxiliar, pode dificultar o entendimento. Para tornar a "visualização" do campo elétrico mais simples, Michael Faraday (1791-1867), pesquisador inglês que contribuiu muito para o desenvolvimento do Eletromagnetismo, criou o conceito de *linhas de campo elétrico*, à época chamadas de *linhas de força*. Vejamos então as propriedades dessas linhas de campo.

4.2 Linhas de Campo Elétrico e Lei de Gauss

Antes de discutirmos as linhas de campo, é interessante apresentá-las para o caso de uma carga Q pontual, que é bastante ilustrativo. Isto é feito na figura 4.6.

$Q > 0$ $\qquad$ $Q < 0$

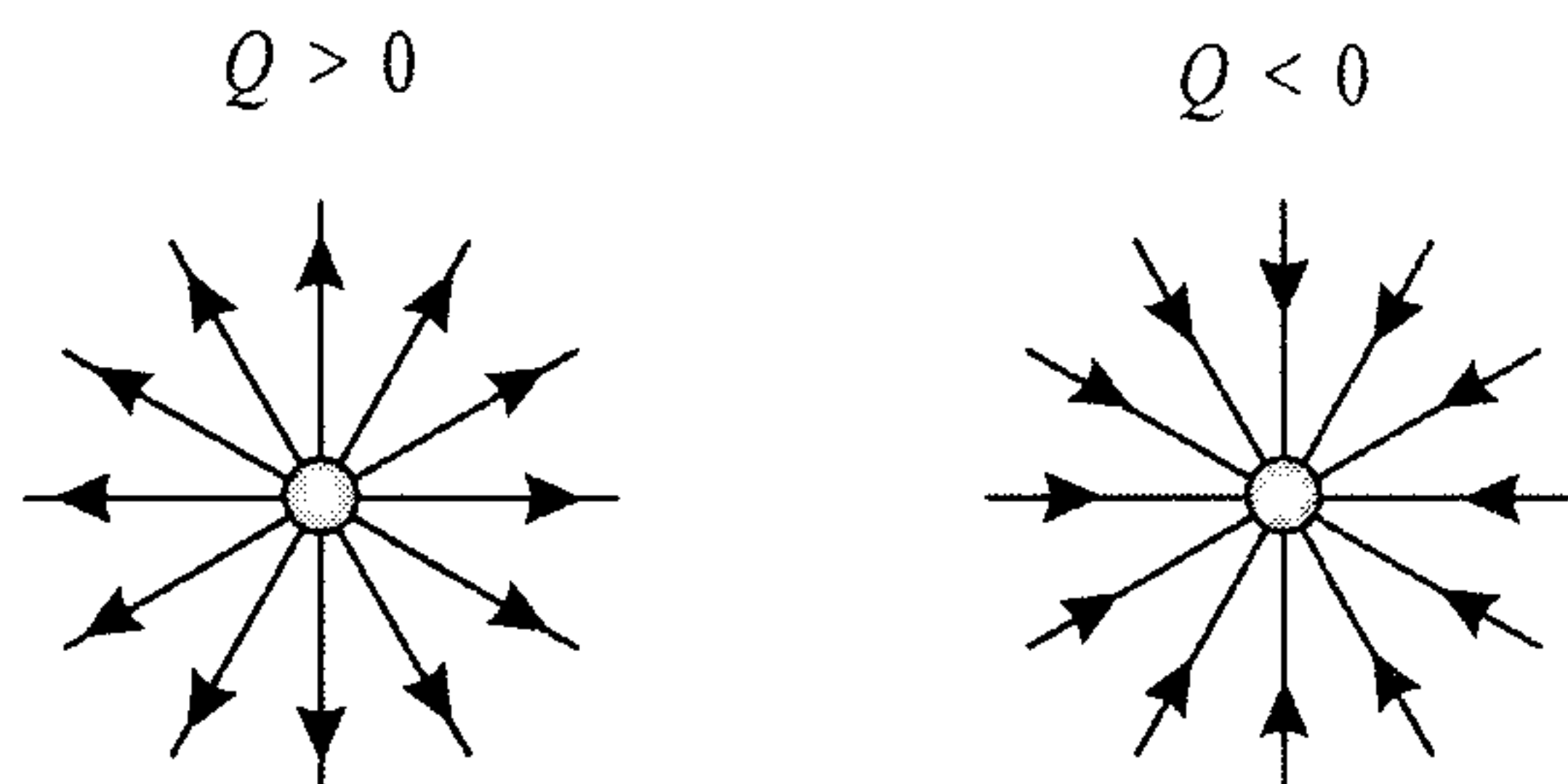



Figura 4.6: Linhas de campo elétrico de uma carga pontual Q. Note que as linhas de campo têm uma simetria esférica, como o campo elétrico da figura 4.1.

As linhas de campo elétrico têm propriedades que as tornam muito úteis. Essas propriedades são:

1. As linhas de campo elétrico "nascem" nas cargas pontuais positivas e "morrem" nas cargas pontuais negativas.

2. As linhas de campo elétrico são direcionais, orientadas no sentido de sair das cargas positivas e entrar nas cargas negativas. Em cada ponto do espaço, as linhas têm a mesma direção e sentido do campo elétrico resultante naquele ponto. Por causa disso, as linhas de campo não podem se cruzar. Se elas se cruzassem, haveria um ponto do espaço com dois campos elétricos resultantes, o que é incompatível com a noção de que há apenas uma resultante numa soma de vetores.

3. O número de linhas de campo que saem (ou entram) é proporcional ao valor Q da carga. Assim, de uma carga $|q|$ saem (ou entram) mais linhas de campo do que de uma carga $|Q|$, se $|q| > |Q|$, e vice-versa, se $|q| < |Q|$.

4. O número de linhas que atravessam uma superfície S normal às linhas num dado ponto do espaço é proporcional à intensidade do campo elétrico nesse ponto.

As linhas de campo da figura 4.6 satisfazem todas as condições acima. As linhas de campo saem da carga positiva e entram na carga negativa. Como o campo elétrico é radial, as linhas são retas partindo da origem em todas as direções, orientadas para fora no caso $Q > 0$, e para dentro quando $Q < 0$.

Para verificar a última propriedade, imagine uma superfície esférica de raio R envolvendo a carga. Por essa superfície passam N linhas de força, distribuídas de forma homogênea por uma área $A = 4\pi R^2$. Assim, em cada ponto temos $\frac{N}{4\pi R^2}$ linhas, e o campo elétrico é proporcional a esse valor, ou seja, $\mathcal{E} \propto \frac{N}{4\pi R^2}$. Como N é fixo, temos então que $\mathcal{E} \propto \frac{1}{R^2}$, o que está totalmente de acordo com a equação 4.6 para o campo gerado por uma carga pontual, que é $\mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, já que $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$ é uma constante. Além disso, pelo item 3, o número de linhas de campo N é proporcional ao valor da carga Q, ou seja, $N \propto Q$, o que também está de acordo com a equação 4.6. Para o fio infinito, as linhas de campo são mostradas na figura 4.7.

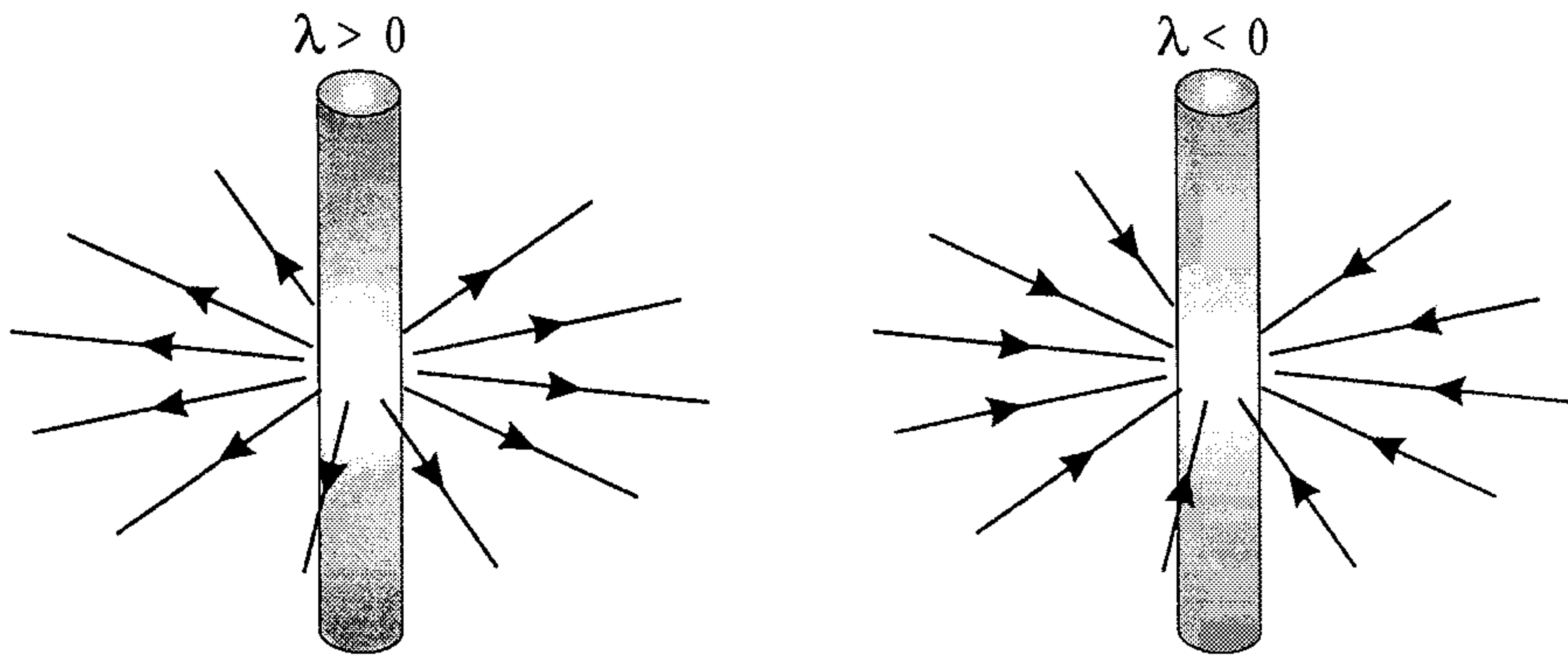



Figura 4.7: Linhas de campo elétrico para o fio infinito. Note a simetria cilíndrica em torno do eixo do fio.

O fluxo Φ de um dado campo vetorial $\vec{B}$ através de uma superfície S é dado pela integral de superfície

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA$$

e se a superfície S for fechada, envolvendo um volume V, o fluxo total será

$$\Phi_t = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA$$

Vamos considerar uma carga pontual Q envolta por uma superfície S esférica de raio r, como na figura 4.8.

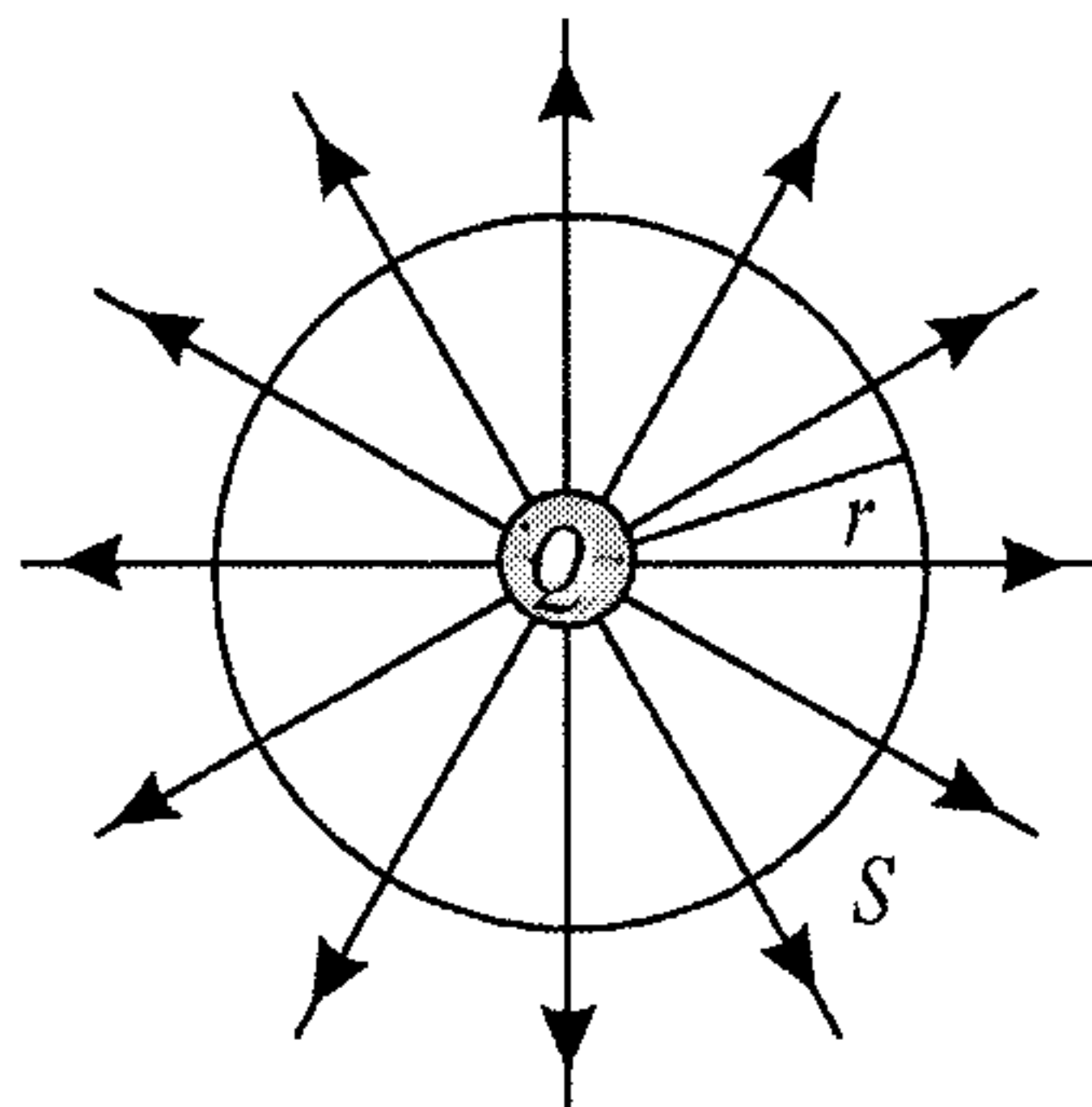



Figura 4.8: Carga Q envolta por uma superfície S esférica fechada.

Como o campo elétrico de uma carga pontual tem uma simetria esféric radial, em cada ponto da superfície o campo $\vec{E}$ tem módulo constante, e el está na mesma direção que a normal à superfície, que é radial. Assim, o flux elétrico do campo elétrico é

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{E}} &= \oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA \\
&= \oint_S \mathcal{E}\hat{n} \cdot \hat{n}\, dA \\
&= \mathcal{E} \oint_S dA \\
&= \mathcal{E} 4\pi r^2 \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 \\
\Phi_{\mathcal{E}} &= \frac{Q}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

e o fluxo elétrico depende apenas da carga Q dentro da superfície. Note qu não importa o raio da superfície esférica. Isso porque o fluxo elétrico est associado ao número de linhas de campo que atravessam a superfície S, no caso considerado, esse número é sempre fixo. Na verdade, a forma de também não importa, pois o mesmo número de linhas de campo atravessar qualquer superfície S de qualquer formato que seja colocada em volta d carga, como mostra a figura 4.9. Dessa figura, é fácil perceber que o númer de linhas que atravessam as superfícies S, S' e S'' é igual a 12. No caso d superfície S''', de formato qualquer, as linhas cruzam a superfície para for 14 vezes, ao passo que para dentro há 2 cruzamentos, num total líquido d $14 - 2 = 12$ cruzamentos para fora da superfície. Isso significa que o flux por qualquer uma dessas superfícies fechadas é o mesmo, apenas é mais fáci calculá-lo para o caso da superfície fechada esférica S, porque ela acompanh a simetria do campo elétrico. Este tipo de superfície, que facilita o cálculo d fluxo elétrico e explora a simetria da distribuição de cargas, é denominad *superfície gaussiana*. O cálculo para as outras superfícies é mais complicado mas o resultado final seria idêntico, ou seja, para qualquer superfície fechada temos

$$\Phi_{\mathcal{E}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

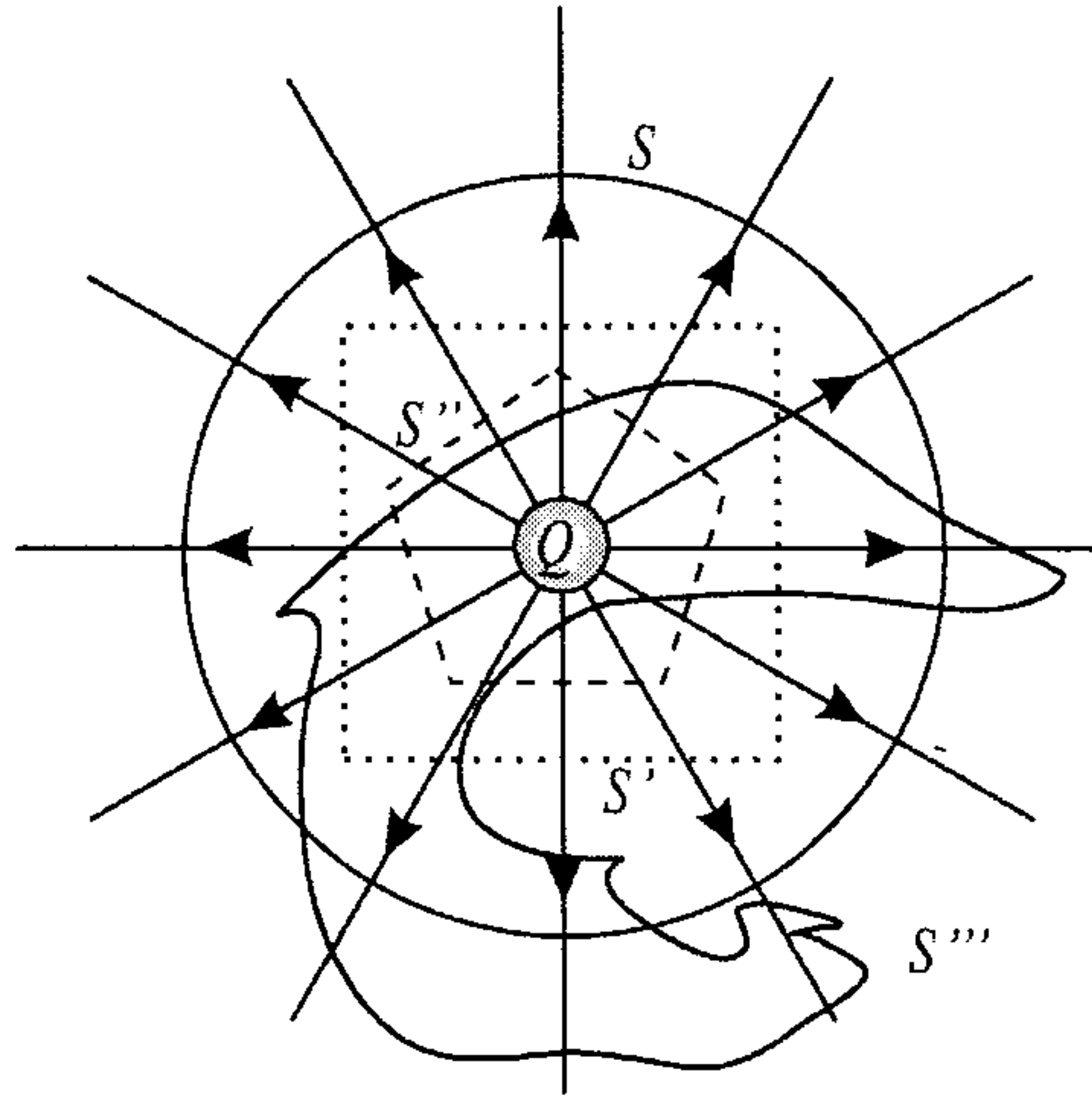



Figura 4.9: Carga Q envolta por superfícies fechadas de formas diferentes. S é uma superfície esférica, S' é uma superfície cúbica, S'' é uma superfície dodecaédrica e S''' é uma superfície de formato qualquer.

que depende apenas da carga dentro da superfície. Deduzimos esta expressão para uma única carga pontual, mas, na verdade, se tivermos várias cargas pontuais dentro da superfície, Q será a carga líquida (a soma algébrica das cargas) dentro da superfície, sendo que as cargas podem estar localizadas em qualquer lugar no seu interior, não necessariamente no centro. Combinando a equação acima com a definição de fluxo, obtemos a expressão

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{4.12}$$

que é conhecida como lei de Gauss. Ela estabelece que, para qualquer superfície fechada S que envolva um conjunto de cargas com uma carga líquida Q, a integral de área da componente normal à superfície do campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}$, representada por $\vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}$, é igual à carga Q dividida por uma constante, ϵ_0. Esta é a primeira lei de Maxwell da Eletrostática, válida para meios sem dielétricos, escrita na forma integral.

Quando a superfície envolve uma distribuição de cargas de densidade $\rho(\vec{r}\,')$, a lei de Gauss pode ser escrita como

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}\,')\, dV \tag{4.13}$$

onde V é o volume definido pela superfície S, e a integral volumétrica é feita na região dentro desse volume onde estão as cargas.

Através do teorema do divergente, equação 1.54, que é

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B}\, dV = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA$$

temos, para o campo elétrico, a expressão

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}\, dV = \oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA$$

O lado direito desta equação pode ser reescrito mediante o uso da expressão 4.13, e ele fica

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}\, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}\,')\, dV$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$\int_V \left[\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} - \frac{\rho}{\epsilon_0}\right] dV = 0$$

e como o volume sobre o qual a integral é feita é qualquer, o integrando deve ser nulo, ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4.14}$$

que é a lei de Gauss escrita na forma diferencial. Esta equação também é conhecida como primeira lei de Maxwell da Eletrostática na forma diferencial, em meios sem dielétricos.

Aqui podemos ter uma idéia clara do significado físico do divergente de uma função. Vamos observar, por exemplo, a figura 4.1. Nela, vemos que o campo elétrico "nasce" ou "morre" na carga pontual, que age como uma fonte ou sorvedouro se a carga for, respectivamente, positiva ou negativa. Se ela for positiva, o campo "diverge" a partir dela, ao passo que se ela for negativa, o campo "converge" para ela. Convergir é o oposto de divergir, e assim, o campo elétrico diverge, com sinal de menos, da carga negativa. O campo elétrico só pode ser criado por cargas. Assim, a equação 4.14 acima estabelece o fato físico fundamental de que todas as cargas elétricas produzem campos elétricos, ou seja, são fontes de campos elétricos, que se propagam de forma divergente a

partir delas. Esse fato físico independe do meio e da velocidade da carga, e ele permanece mesmo para campos dependentes do tempo. Assim, se num certo ponto o divergente do campo elétrico é não-nulo, isso significa que nesse ponto existe uma carga elétrica, exatamente como que estabelece a equação 4.14.

Antes de aplicar a lei de Gauss em alguns problemas relevantes, vamos apresentar uma dedução alternativa da lei de Gauss, baseada em argumentos matemáticos.

4.3 Dedução Matemática da Lei de Gauss

O campo elétrico de uma distribuição de cargas é dado pela expressão 4.5,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV$$

Vamos calcular $\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}$, ou seja,

$$\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}} = \nabla\cdot\left\{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV\right\} \tag{4.15}$$

O operador ∇ não age sobre $\rho(\vec{r}\,')$, e assim, obtemos

$$\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\nabla\cdot\left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]dV$$

Para simplificar os cálculos, fazemos $\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}\,' = X\,\hat{\mathbf{i}} + Y\,\hat{\mathbf{j}} + Z\,\hat{\mathbf{k}}$, de forma que temos que calcular

$$\nabla\cdot\left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right] = \frac{1}{R^3}\nabla\cdot\vec{R} + \vec{R}\cdot\nabla\left[\frac{1}{R^3}\right]$$

O primeiro termo fica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R^3}\nabla\cdot\vec{R} &= \frac{1}{R^3}\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial X} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial Y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial Z}\right]\cdot\left[X\,\hat{\mathbf{i}} + Y\,\hat{\mathbf{j}} + Z\,\hat{\mathbf{k}}\right] \\
&= \frac{1}{R^3}\left[\frac{\partial X}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial Z}\right] \\
\frac{1}{R^3}\nabla\cdot\vec{R} &= \frac{3}{R^3}
\end{aligned}$$

O segundo é

$$\begin{aligned}
\vec{R}\cdot\nabla\left[\frac{1}{R^3}\right] &= \vec{R}\cdot\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial X}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial Y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial Z}\right]\left[\frac{1}{\left(X^2+Y^2+Z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right] \\
&= \vec{R}\cdot\left[\frac{-3X\,\hat{\mathbf{i}}-3Y\,\hat{\mathbf{j}}-3Z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left(X^2+Y^2+Z^2\right)^{\frac{5}{2}}}\right] \\
&= -3\vec{R}\cdot\left[\frac{\vec{R}}{R^5}\right] \\
&= -3\frac{R^2}{R^5} \\
\vec{R}\cdot\nabla\left[\frac{1}{R^3}\right] &= -\frac{3}{R^3}
\end{aligned}$$

e assim, obtemos

$$\nabla\cdot\left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right]=\frac{1}{R^3}\nabla\cdot\vec{R}+\vec{R}\cdot\nabla\left[\frac{1}{R^3}\right]=\frac{3}{R^3}-\frac{3}{R^3}$$

que é nulo se $\vec{R}\neq 0$. Quando $\vec{R}=0$, ou seja, quando $\vec{r}=\vec{r}\,'$ [2], temos uma indeterminação. Para resolvê-la, vamos considerar uma pequena esfera de raio R em torno do ponto $\vec{r}=\vec{r}\,'$, ou $\vec{R}=0$, e usar o teorema do divergente neste ponto, isto é, calculamos

$$\int_V \nabla\cdot\left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right]dV=\oint_S\left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right]\cdot\hat{n}\,dA$$

Para uma esfera, a normal é o próprio vetor $\frac{\vec{R}}{R}$, e assim,

$$\begin{aligned}
\int_V \nabla\cdot\left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right]dV &= \oint_S\left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right]\cdot\left[\frac{\vec{R}}{R}\right]dA \\
&= \oint_S \frac{R^2}{R^4}\,dA \\
\int_V \nabla\cdot\left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right]dV &= \frac{1}{R^2}\oint_S dA
\end{aligned}$$

[2] Fisicamente, isto significa que estamos na mesma posição que a das cargas geradoras, exatamente sobre elas, e nesses pontos deve ocorrer algo diferente do que se verifica nos pontos do espaço onde não há cargas.

$$\int_V \nabla \cdot \left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right] dV = \frac{1}{R^2}(4\pi R^2)$$
$$\int_V \nabla \cdot \left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right] dV = 4\pi$$

pois a área da esfera é $A = 4\pi R^2$. Esta equação não depende de R, e portanto, ela vale inclusive para $R = 0$, que é o ponto que nos interessa. Como a integral é não-nula, e lembrando que o divergente é nulo para todo $\vec{R} \neq 0$, vemos que, se $\vec{R} = 0$, o divergente deve ser não-nulo, pois senão a integral seria identicamente nula, o que discorda do fato de que, na verdade, ela vale 4π. Ou seja, a única contribuição para o divergente vem dos pontos onde $\vec{R} = 0$, ou $\vec{r} = \vec{r}\,'$, que são os pontos onde se situam as cargas e onde se espera que algo diferente ocorra. Para representar esta situação, é comum usar as chamadas funções delta de Dirac $\delta(x)$, que têm várias propriedades interessantes. No nosso caso, as relevantes são

$$\int \delta(x - x_0)\, dx = 1 \tag{4.16}$$

e

$$\int f(x)\, \delta(x - x_0)\, dx = f(x_0) \tag{4.17}$$

que valem desde que o intervalo de integração contenha o valor x_0 da delta de Dirac. Portanto, podemos escrever

$$\int_V \nabla \cdot \left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right] dV = \int_V 4\pi\delta(\vec{R})\, dV$$

pois teríamos

$$\int_V 4\pi\delta(\vec{R})\, dV = 4\pi \int_V \delta(\vec{R})\, dV = 4\pi \times 1 = 4\pi$$

Além disso, reescrevendo a penúltima equação como

$$\int_V \left\{\nabla \cdot \left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right] - 4\pi\delta(\vec{R})\right\} dV = 0$$

chegamos a uma importante propriedade matemática, que é

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{R}}{R^3}\right] = 4\pi\delta(\vec{R})$$

ou

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right] = 4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{4.18}$$

pois o volume de integração é arbitrário. De posse desta equação, voltamos expressão 4.15, para achar

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\nabla \cdot \left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right] dV \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\, dV \\
\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} &= \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\, dV
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

que é a primeira lei de Maxwell da Eletrostática, equação 4.14. Quando es crevemos essa lei na forma integral, através de

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}\, dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0}\, dV$$

usamos o teorema do divergente para transformar a primeira integral em

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\, dV$$

que é a lei de Gauss 4.13. Vejamos agora algumas aplicações da lei de Gaus

4.4 Aplicações da Lei de Gauss

Para que a lei de Gauss possa ser aplicada com sucesso a um cert problema, é preciso que o campo elétrico desse problema tenha um cert

grau de simetria, de modo que possamos escolher uma superfície gaussiana que facilite a resolução das integrais. Em distribuições de carga genéricas, a lei de Gauss pode se tornar tão ou mais complicada de utilizar do que a equação 4.5. Isso significa dizer também que, para aplicar a lei de Gauss, precisamos antes ter uma idéia física de como o campo elétrico se comporta no espaço e saber quais são as simetrias envolvidas. Vamos considerar alguns problemas importantes, começando com a relação entre a lei de Gauss e a lei de Coulomb.

Exemplo 4.6. *Considere uma carga pontual Q situada na origem.*

a) Qual é o campo elétrico gerado por essa carga?

O campo elétrico gerado por uma carga pontual tem uma simetria esférica radial, como mostra a figura 4.1. Isso significa que, a uma distância r da carga, o módulo do campo elétrico é constante, e que sua direção é radial para fora, se a carga é positiva, ou para dentro, se ela é negativa. Essa simetria sugere que a melhor superfície gaussiana neste caso é uma superfície esférica de raio r, centrada na carga, como mostra a figura 4.8. Assim, a normal à superfície é dada por $\hat{n} = \hat{\mathbf{r}}$, e temos

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho\, dV$$

A integral do lado direito dá a carga Q dentro da superfície, enquanto o campo elétrico no lado esquerdo pode ser escrito como $\vec{\mathcal{E}} = \pm\mathcal{E}\,\hat{\mathbf{r}}$, onde o sinal positivo vale para uma carga Q positiva, e o sinal negativo, para uma carga Q negativa. Portanto, obtemos

$$\oint_S \pm\mathcal{E}\,\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}\, dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

O módulo do campo elétrico $\mathcal{E}$ é constante na superfície e pode ser retirado da integral, ou seja,

$$\begin{aligned} \pm\mathcal{E} \oint_S dA &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \pm\mathcal{E} 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \mathcal{E} &= \pm\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

e, numa notação vetorial,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Note que este resultado é idêntico ao obtido na equação 4.6, do exercício 4.1.

b) Qual é a força elétrica exercida sobre uma carga q na posição $\vec{r}$?

A força elétrica exercida sobre uma carga q é dada por

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{\mathcal{E}}\\ &= q\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\\ \vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

Esta expressão é, na verdade, a lei de Coulomb para a força elétrica entre duas cargas, deduzida a partir da lei de Gauss.

Exemplo 4.7. *Partindo da lei de Gauss para o campo elétrico, obtenha a lei de Gauss para o campo gravitacional.*

No exemplo 4.3, vimos que o campo gravitacional é dado pela expressão 4.7, que é

$$\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}) = -G\int_V \rho_m(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV$$

Ele está associado ao campo elétrico, equação 4.5,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV$$

através da correspondência

$$\begin{aligned}Q &\leftrightarrow M\\ \rho &\leftrightarrow \rho_m\\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &\leftrightarrow -G\end{aligned}$$

de onde se tira

$$\frac{1}{\epsilon_0} \leftrightarrow -4\pi G$$

A lei de Gauss do campo elétrico é

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho\, dV$$

e assim, a lei de Gauss para o campo gravitacional será

$$\oint_S \vec{\mathcal{G}} \cdot \hat{n}\, dA = -4\pi G \int_V \rho_m\, dV \tag{4.19}$$

Note que, como a força gravitacional é sempre atrativa, o fluxo do campo gravitacional é sempre negativo. No caso do campo elétrico, o fluxo é positivo se a carga total dentro da superfície gaussiana é positiva, e negativo se a carga total é negativa.

Exemplo 4.8. *Considere uma casca esférica metálica de raio R com uma densidade de cargas σ distribuída uniformemente sobre a superfície.*

a) Calcule o campo elétrico para $r > R$, isto é, fora da esfera.

A figura 4.10 apresenta a situação acima.

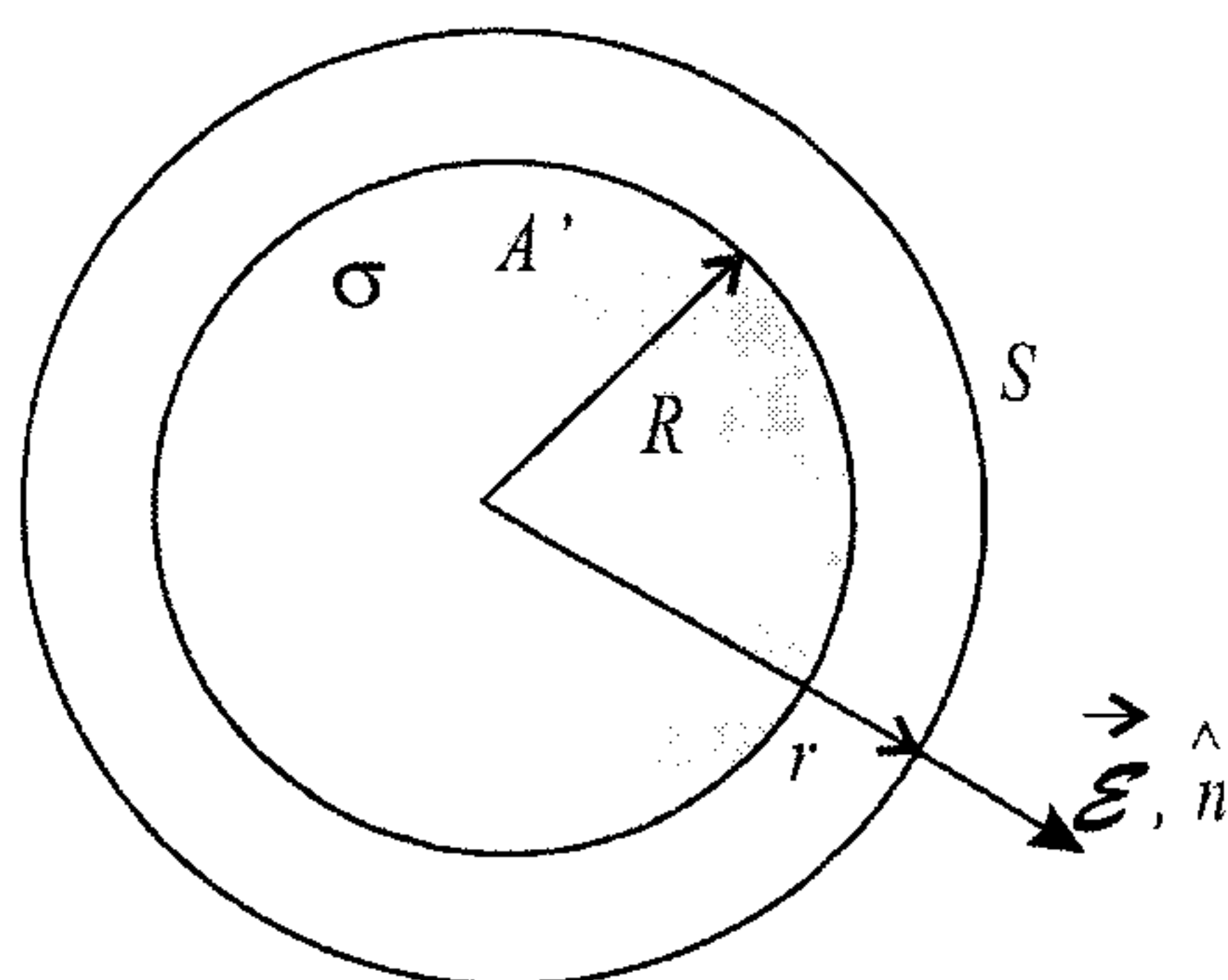



Figura 4.10: Uma esfera metálica de raio R com uma densidade de cargas superficial σ, e uma gaussiana esférica de raio r, sendo $r > R$.

Por causa da simetria esférica do problema, o campo elétrico fora d esfera também tem uma simetria esférica radial e é semelhante ao camp de uma carga pontual. Assim, utilizando uma superfície gaussiana de raio : temos, pela lei de Gauss,

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho\, dV$$

A carga dentro da superfície gaussiana está distribuída apenas sobre superfície A' que delimita a casca esférica. Portanto, a integral do lado direit deve ser realizada sobre esta área, ou seja,

$$\begin{aligned} \oint_S \pm\mathcal{E}\, \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}\, dA &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{A'} \sigma\, dA' \\ \pm\mathcal{E} \oint_S dA &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_{A'} dA' \\ \pm\mathcal{E} 4\pi r^2 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} 4\pi R^2 \\ \mathcal{E} &= \pm\frac{\sigma}{\epsilon_0}\frac{R^2}{r^2} \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\sigma = \frac{dQ}{dA} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

obtemos, vetorialmente,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, \hat{\mathbf{r}}, \qquad r > R \qquad (4.2C$$

ou seja, fora da esfera o campo é o mesmo que seria produzido por um carga Q pontual situada na origem. Seria de se esperar que esse fato valess apenas para as regiões muito afastadas da casca esférica mas, na realidad‹ ele se verifica também para as regiões próximas à casca. Em sua experiênciε Coulomb não usou cargas pontuais, e sim, pequenas esferas metálicas. N entanto, como vimos acima, o campo gerado fora da esfera é o mesmo que o d cargas pontuais, e, por esse motivo, os resultados que Coulomb obteve forar os mesmos. Por analogia (que pode ser demonstrada), o campo gravitacionε de uma casca esférica, para as regiões fora da esfera, é o mesmo que seri obtido se toda a massa da casca fosse colocada no seu centro.

b) Qual é o campo elétrico para $r < R$, isto é, dentro da esfera?

A figura 4.11 mostra a situação acima.

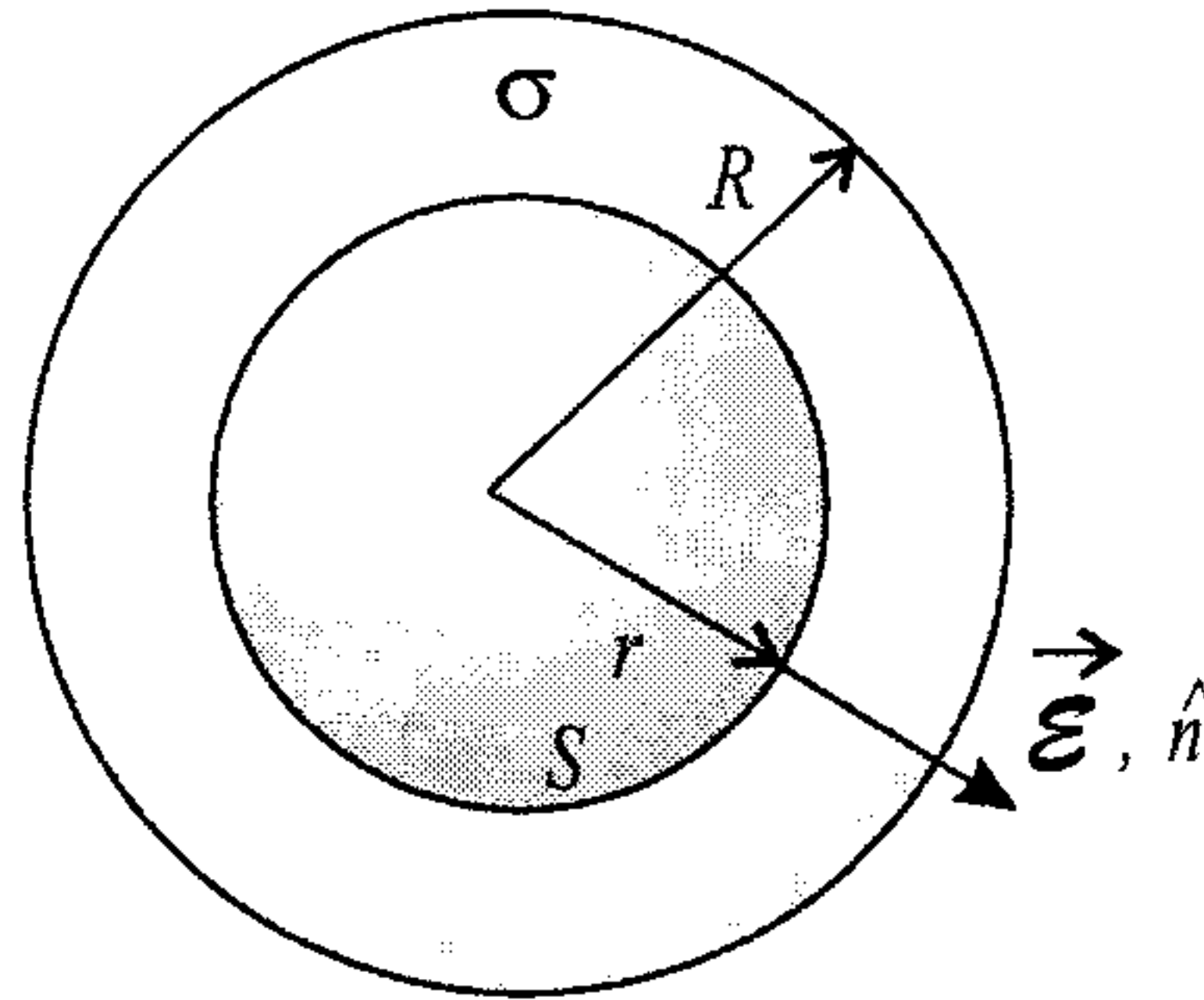



Figura 4.11: Uma esfera metálica de raio R com uma densidade de cargas superficial σ e uma gaussiana esférica de raio r, sendo $r < R$.

Neste caso, a lei de Gauss fica

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{1}{\epsilon_0} \overbrace{\int_V \rho\, dV}^{Q'}$$
$$\oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{Q'}{\epsilon_0}$$

onde a carga Q' é a carga líquida dentro da superfície gaussiana. No entanto, só existem cargas na superfície da casca esférica, e assim, a carga dentro da esfera é nula, ou seja, $Q' = 0$. Portanto,

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = 0$$

Dessa forma, a integral acima deve ser nula. Entretanto, se houver um campo elétrico na superfície gaussiana, ele deve ter uma simetria esférica radial e deve estar na direção da normal, por causa da simetria esférica do problema. Assim, o integrando ou é sempre positivo ou é sempre negativo, e a soma que conduz à integral seria ou positiva ou negativa, pois dA não é nulo. O único modo de a integral ser nula é se o campo for identicamente nulo, isto é,

$$\vec{\mathcal{E}} = 0, \qquad r < R \tag{4.21}$$

e assim, dentro de uma casca esférica metálica o campo elétrico é nulo. Este fato seria de se esperar para o centro da esfera, porque esse é um local extremamente simétrico e todos os campos elétricos gerados pela superfície deveriam mesmo se anular. Porém, a anulação do campo elétrico ocorre em qualquer lugar dentro de uma casca esférica que produz uma *blindagem elétrica*. Voltaremos a falar da blindagem elétrica em breve. Outro ponto interessante é que uma casca esférica blinda o campo gravitacional dentro do seu interior, da mesma forma como o faz uma casca esférica de cargas.

Exemplo 4.9. *O modelo de Thomson, conhecido como "pudim de ameixas", supunha que o átomo era formado por uma carga positiva distribuída de forma homogênea num volume esférico de raio R e que nessa "massa" os elétrons estariam incrustados. Considere o modelo de Thomson para o hidrogênio, e responda.*

a) Qual é o campo elétrico a uma distância r quando $r > R$?

Como o átomo é eletricamente neutro, as cargas positivas estão em mesmo número que as cargas negativas, e o total líquido é nulo. Assim, fora do átomo, quando $r > R$, se considerarmos uma superfície gaussiana esférica de raio r, veremos que a carga total dentro da gaussiana é nula. O campo elétrico, se existisse, deveria ter uma simetria radial. Portanto, o único modo de a integral da lei de Gauss se anular ocorre quando $\vec{\mathcal{E}} = 0$ fora do átomo.

b) Qual é o campo elétrico dentro do átomo, a uma distância r do centro?

O elétron do átomo de hidrogênio, no modelo de Thomson, deve estar situado em equilíbrio no centro do átomo, porque nesse local as forças elétricas se anulam em virtude da simetria esférica. Portanto, ao escrever a lei de Gauss, temos duas contribuições, uma do elétron no centro da esfera e outra da carga positiva distribuída no volume do átomo. A superfície gaussiana é uma esfera de raio r, como mostra a figura 4.12 abaixo. A lei de Gauss para esta superfície fica, considerando apenas a parte do campo gerada pela densidade volumétrica de carga positiva,

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}}_+ \cdot \hat{n}\, dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho\, dV$$

$$\oint_S \mathcal{E}_+ \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}\, dA = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_V dV$$

$$\mathcal{E}_+ \oint_S dA = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$\mathcal{E}_+ 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{4\pi r^3}{3}$$
$$\mathcal{E}_+ = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

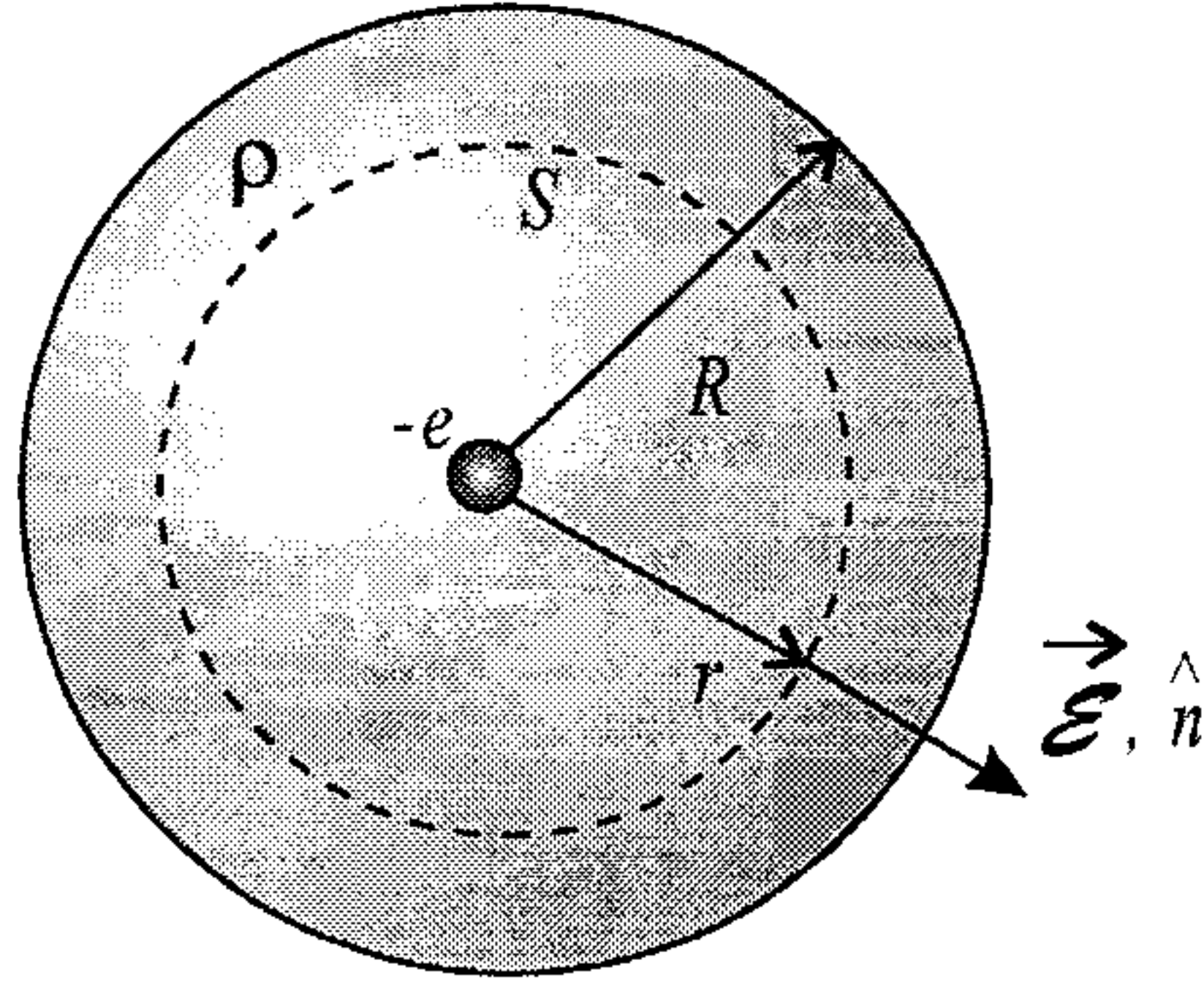



Figura 4.12: Superfície gaussiana para o modelo de Thomson.

A densidade volumétrica é dada por

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \frac{e}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{3e}{4\pi R^3}$$

e o campo gerado pela carga positiva fica

$$\vec{\mathcal{E}}_+ = \frac{r}{3\epsilon_0}\frac{3e}{4\pi R^3}\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 R^3}\,\hat{\mathbf{r}}$$

O campo gerado pelo elétron no centro do átomo a uma distância r é

$$\vec{\mathcal{E}}_- = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

e o campo total fica

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} &= \vec{\mathcal{E}}_+ + \vec{\mathcal{E}}_- \\ &= \frac{er}{4\pi\epsilon_0 R^3}\,\hat{\mathbf{r}} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(\frac{r^3}{R^3} - 1\right)\hat{\mathbf{r}} \\ \vec{\mathcal{E}} &= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)\hat{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

c) Suponha que o elétron seja deslocado para uma distância r do centro. Qual é a força que age sobre ele?

A força que age sobre o elétron é causada apenas pela parte do campo elétrico gerada pelas cargas positivas. Assim, temos

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -e\vec{\mathcal{E}}_+ \\ &= -e\frac{er}{4\pi\epsilon_0 R^3}\,\hat{\mathbf{r}} \\ \vec{F} &= -\frac{e^2 r}{4\pi\epsilon_0 R^3}\,\hat{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

Note que ela é uma força orientada para o centro da esfera.

d) Qual é o movimento do elétron quando ele é solto?

A força elétrica sobre o elétron pode ser escrita como

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}\,\vec{r}$$

que resulta numa equação muito semelhante à lei de Hooke para uma mola, isto é,

$$\vec{F}_{\text{mola}} = -k(x - x_0)\,\hat{\mathbf{i}}$$

se interpretarmos a constante de mola k como sendo

$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

A força é restauradora e, por causa disso, o elétron executará um movimento harmônico simples, de freqüência angular ω dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_e}}$$

onde m_e é a massa do elétron. Com o valor de k dado acima, obtemos

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3 m_e}} = \frac{e}{R}\sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R m_e}}$$

A freqüência ν do movimento é dada por

$$\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

e assim,

$$\nu = \frac{e}{2\pi R}\sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R m_e}}$$

Desse modo, o período τ da oscilação fica

$$\tau = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi R}{e}\sqrt{4\pi\epsilon_0 R m_e}$$

e) Sendo $R = 5,3 \times 10^{-11}$ m e $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg, calcule a freqüência de oscilação do elétron.

A freqüência é

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{e}{2\pi R}\sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R m_e}}\\ &= \frac{1,6 \times 10^{-19}}{2\pi \times 5,3 \times 10^{-11}}\sqrt{\frac{9 \times 10^9}{5,3 \times 10^{-11} \times 9,11 \times 10^{-31}}}\\ \nu &= 6,560 \times 10^{15}\,\text{Hz}\end{aligned}$$

Exemplo 4.10. *Usando a lei de Gauss, mostre que a carga elétrica dentro de um condutor metálico em equilíbrio está na superfície do condutor.*

Quando o condutor está em equilíbrio, a carga que ele contém cessou de se movimentar, e isso significa que não deve haver nenhum campo elétrico resultante dentro dele, pois, se houvesse, a carga não teria alcançado o equilíbrio ainda, o que contraria a hipótese inicial. Assim, dentro do condutor metálico em equilíbrio, $\vec{\mathcal{E}} = 0$, e qualquer condutor metálico em equilíbrio produz uma blindagem elétrica em seu interior. Portanto, considerando uma superfície gaussiana qualquer dentro do condutor, temos, para a lei de Gauss,

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{1}{\epsilon_0}\overbrace{\int_V \rho\, dV}^{Q}$$

Entretanto, como $\vec{\mathcal{E}} = 0$ no interior do condutor, a integral à esquerda é nula identicamente, e assim,

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = 0$$

e a carga dentro da superfície gaussiana é nula. Como a superfície gaussiana é qualquer, não há carga em lugar nenhum dentro do condutor, e a carga que ele possui só pode estar na superfície. Este fato independe da forma do condutor.

Exemplo 4.11. *Considere um fio retilíneo de tamanho infinito e densidade linear de cargas* λ*, como o fio da figura 4.4. Calcule o campo elétrico desse fio através da lei de Gauss.*

Como se percebe na figura 4.4, o campo do fio tem uma simetria cilíndrica radial, e sua componente na direção z é nula. Isto sugere uma superfície gaussiana cilíndrica de raio ρ ao redor do fio, concêntrica com ele e de altura L, como mostra a figura 4.13.

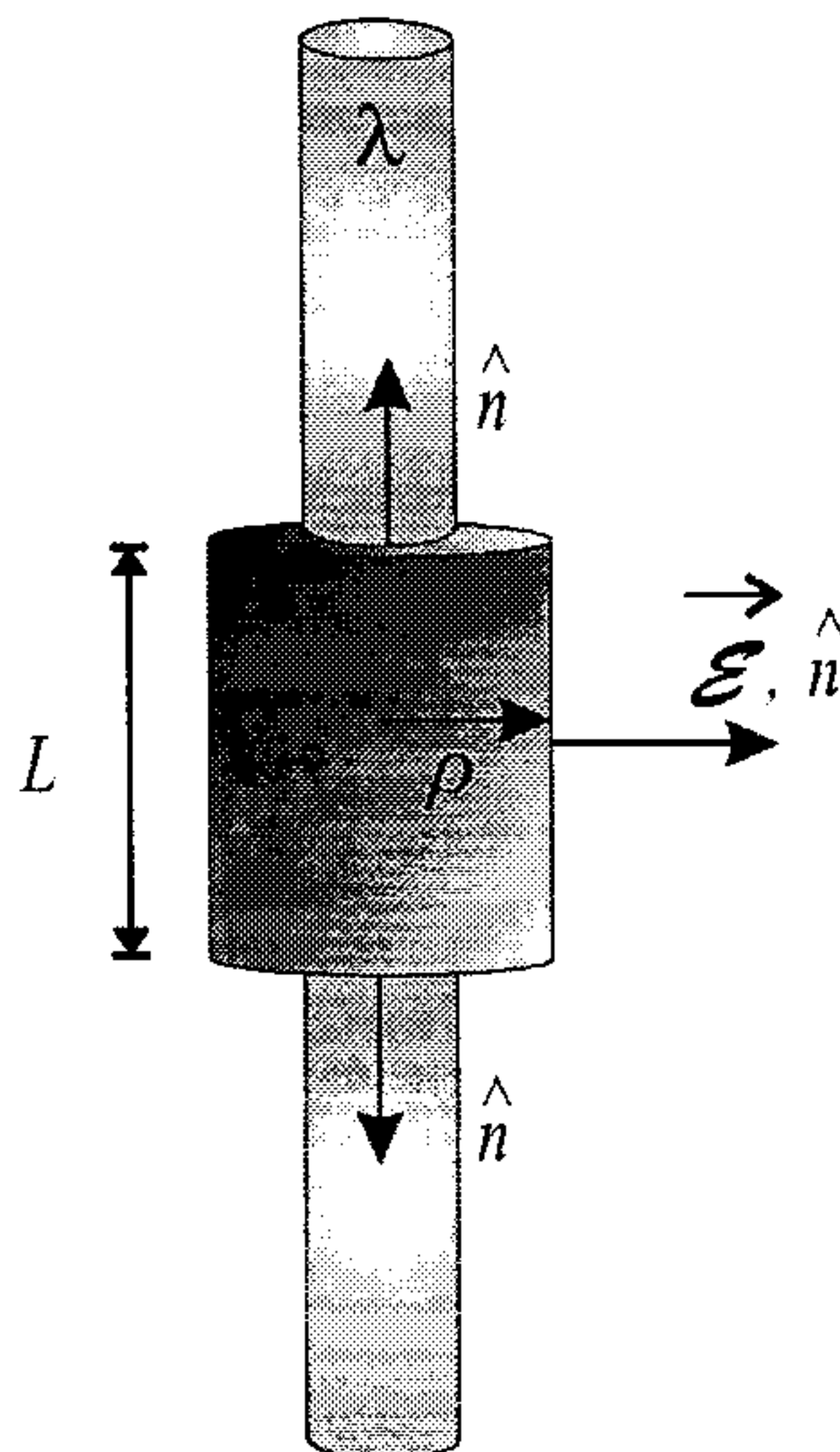



Figura 4.13: Superfície gaussiana para um fio infinito.

A carga dentro da superfície está localizada apenas no fio, que possui uma densidade linear λ de cargas. Assim, a lei de Gauss para esta superfície fica

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\; dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{fio}} \lambda\; d\ell$$

Note que a superfície cilíndrica é formada por três superfícies: a superfície curva lateral, cuja normal é radial e está na mesma direção que a do campo, e as "tampas" superior e inferior, cujas normais estão orientadas numa direção perpendicular à do campo, o que faz com que o produto escalar entre eles seja nulo. Portanto, a lei de Gauss fica, considerando que $\hat{n} = \hat{\boldsymbol{\rho}}$ e $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$,

$$\begin{aligned}
\int_{\text{lateral}} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA &= \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \\
\int_{\text{lateral}} \mathcal{E}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}\, dA &= \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \\
\mathcal{E} \int_{\text{lateral}} dA &= \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \\
\mathcal{E} 2\pi\rho L &= \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \\
\mathcal{E} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}
\end{aligned}$$

ou, vetorialmente,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\;\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

que concorda com a expressão 4.9, obtida através de cálculo direto.

Exemplo 4.12. *Qual é o campo elétrico para um plano infinito de cargas negativas, de densidade superficial σ ?*

A figura 4.14 ilustra um plano de cargas e a superfície gaussiana apropriada a este caso.

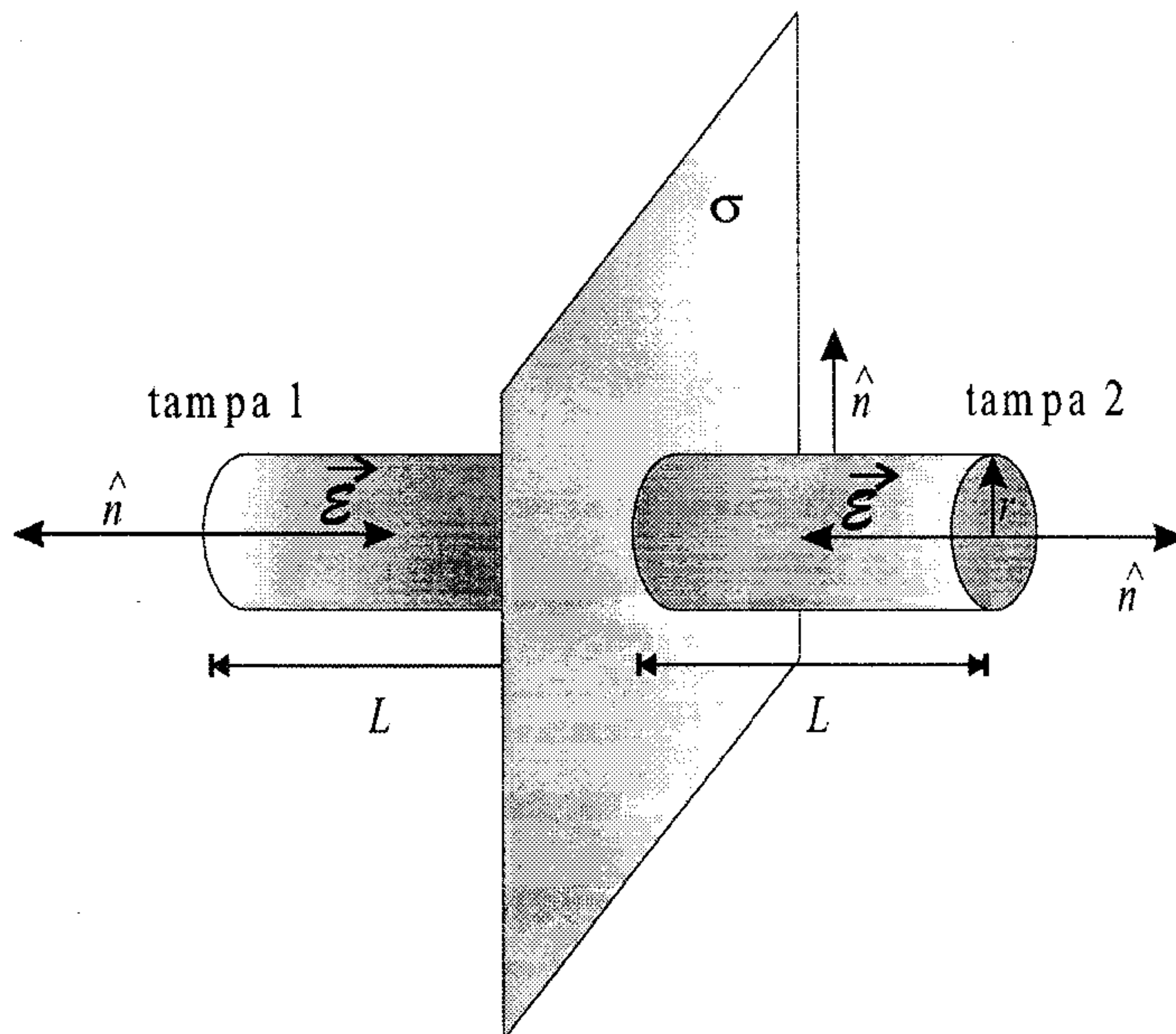



Figura 4.14: Um plano de cargas negativas, com uma densidade σ.

O campo elétrico de um plano de cargas deve ter uma simetria linear, e o campo deve estar orientado numa direção perpendicular ao plano. Isto pode ser melhor entendido se pensarmos que, em relação a uma dada origem arbitrária no plano, existe um anel de cargas de raio R, com centro nessa origem, que produz, por simetria, uma contribuição nula para o campo elétrico nas direções paralelas ao plano, restando apenas a contribuição para o campo na direção perpendicular a ele. Assim, a gaussiana indicada é um cilindro, de tamanho $2L$ e raio r, como mostra a figura. Entretanto, agora o campo está na mesma direção que a normal à superfície nas "tampas" do cilindro, e ele é perpendicular à normal na superfície lateral. Portanto, a contribuição devida à superfície lateral é nula, e apenas as outras duas superfícies entram na lei de Gauss. Note que a carga envolvida pela lei de Gauss está no círculo que esta superfície define no plano. A lei de Gauss fica

$$\int_{\text{tampa 1}} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA + \int_{\text{tampa 2}} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{A'} \sigma\, dA'$$

$$\int_{\text{tampa 1}} \mathcal{E}\,\hat{\mathbf{k}} \cdot (-\hat{\mathbf{k}})\, dA + \int_{\text{tampa 2}} -\mathcal{E}\,\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}\, dA = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_{A'} dA'$$

$$-\mathcal{E}\pi r^2 - \mathcal{E}\pi r^2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\pi r^2$$
$$\mathcal{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

ou, vetorialmente,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\hat{n} \tag{4.22}$$

Este resultado é bastante interessante, pois o campo elétrico gerado por um plano de cargas é constante e independe da distância ao plano. Isto pode ser melhor entendido se pensarmos que, considerando um ponto do espaço próximo ao plano, a maior contribuição para o campo elétrico neste local vem da região situada, no plano, próxima ao ponto. As contribuições das regiões do plano mais afastadas são quase paralelas a ele, e elas têm componentes perpendiculares muito pequenas. Já nos pontos do espaço afastados do plano, as contribuições geradas pelas regiões do plano mais distantes tornam-se praticamente perpendiculares a ele e compensam a diminuição da intensidade do campo gerado pelas regiões do plano mais próximas ao ponto do espaço, fazendo com que o campo fique constante.

Exemplo 4.13. *Qual é o campo produzido por uma placa metálica infinita de cargas positivas com uma densidade superficial* σ *?*

É preciso ter algum cuidado aqui, porque uma placa tem uma certa espessura, e sendo ela uma placa metálica condutora, as cargas situam-se apenas na superfície, e não no interior. A figura 4.15 apresenta esta geometria. A superfície gaussiana é novamente um cilindro, mas uma das "tampas" está dentro da placa metálica. O campo da placa deve ser perpendicular à placa, pelas mesmas razões que explicam o fato de o campo do plano ser perpendicular ao plano. Assim, a superfície lateral do cilindro tem uma normal que é perpendicular ao campo, e sua contribuição para a lei de Gauss é nula. Como existe uma "tampa" dentro da placa, o campo neste local é nulo e também resulta numa contribuição nula para a lei de Gauss. Resta apenas a outra "tampa", ou seja,

$$\int_{\text{tampa}} \vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{n}\;dA = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{A'} \sigma\;dA'$$
$$\int_{\text{tampa}} \mathcal{E}\;\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}}\;dA = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\int_{A'} dA'$$

$$\mathcal{E}\int_{\text{tampa}} dA = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\pi r^2$$
$$\mathcal{E}\pi r^2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\pi r^2$$
$$\mathcal{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

e então,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{n} \tag{4.23}$$

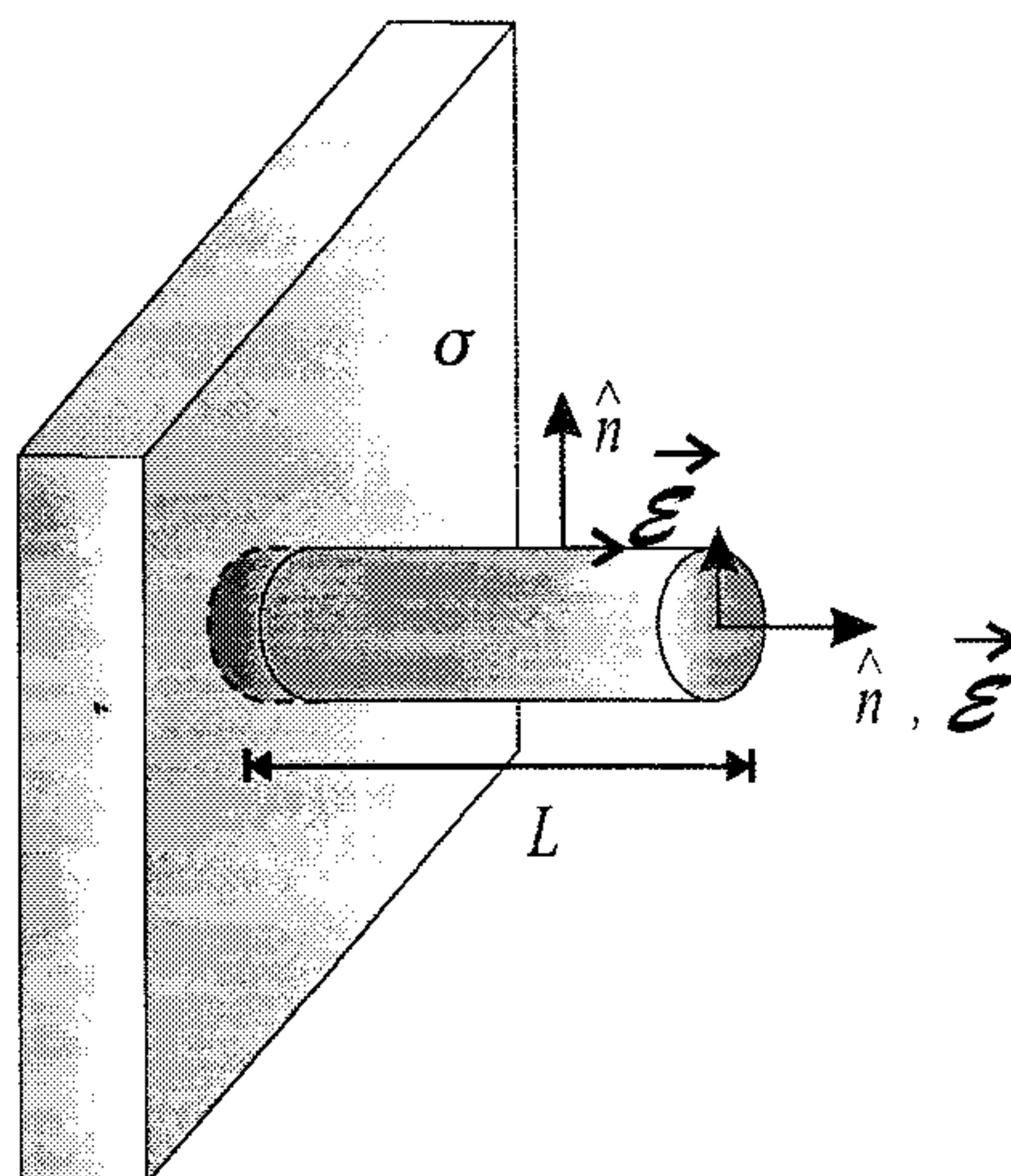



Figura 4.15: Uma placa infinita de cargas positivas, com uma densidade superficial σ.

Note que o campo da placa também é constante, assim como o campo do plano de cargas. Além disso, o campo da placa é duas vezes mais intenso do que o desse plano.

Exemplo 4.14. *Considere um sistema formado por dois planos metálicos infinitos, de densidade de carga σ e $-\sigma$, respectivamente, colocados paralelamente um ao outro, a uma distância L, e formando o arranjo mostrado na figura 4.16. Qual é o campo entre esses planos?*

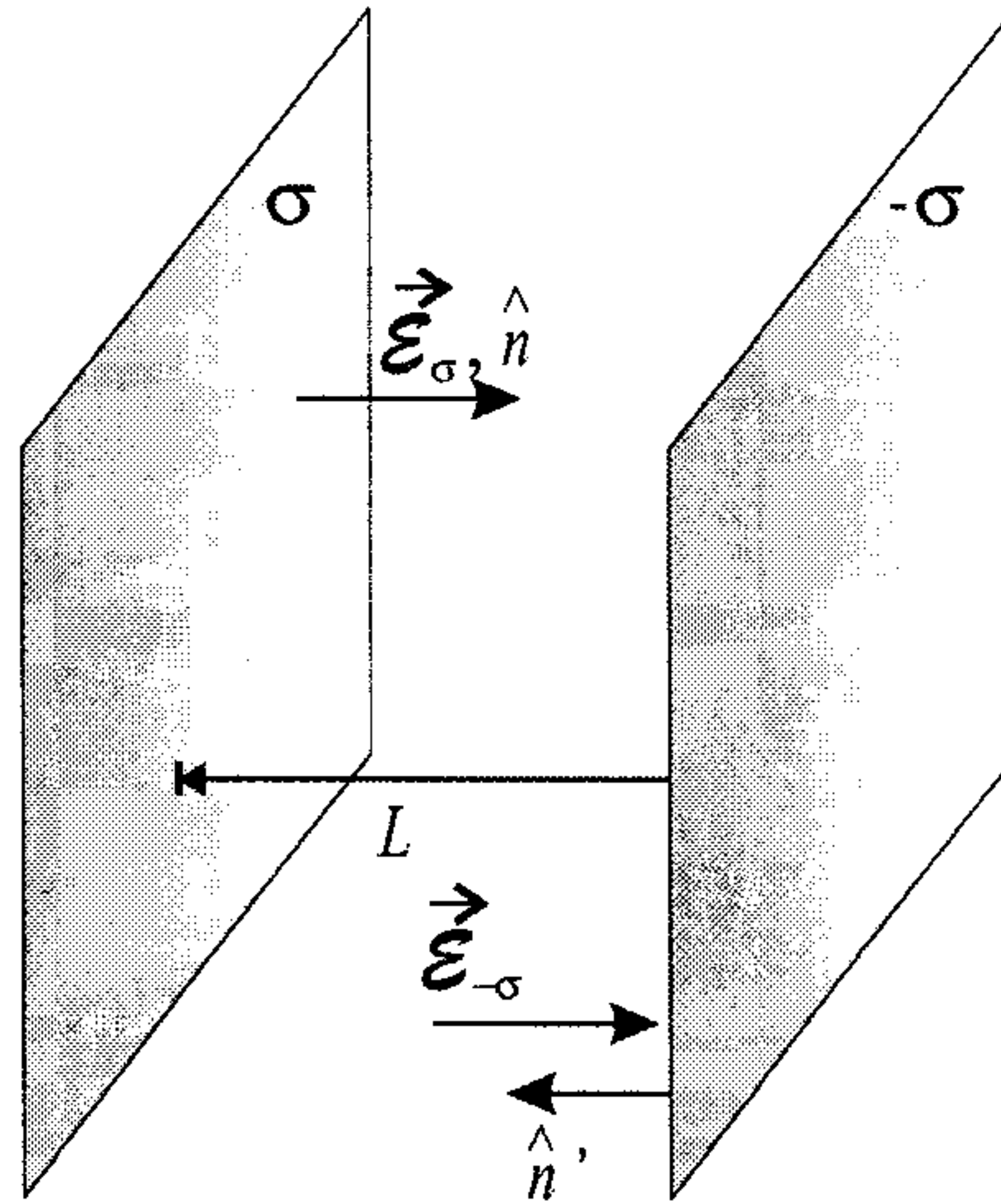



Figura 4.16: Dois planos infinitos paralelos, com densidades de carga σ e $-\sigma$.

Como vimos no exemplo 4.12, o campo gerado por um plano é dado pela equação 4.22,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\hat{n}$$

O plano de densidade σ produz um campo que é orientado de maneira a afastar-se do plano, enquanto o plano com a densidade $-\sigma$ possui um campo que é orientado em direção ao plano. Assim, na região entre eles, os campos estão na mesma direção e sentido, e eles se somam, produzindo o campo total

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\hat{n} + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\,(-\hat{n}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{n} \tag{4.24}$$

Observe que, à esquerda do plano de densidade σ ou à direita do plano de densidade $-\sigma$, o campo elétrico resultante é nulo, pois os campos estão orientados em sentidos opostos nessas duas regões. Assim, dois planos paralelos com densidades de cargas opostas limitam um campo elétrico no espaço.

Exemplo 4.15. *Mostre que o campo elétrico nas proximidades da superfície de um condutor de forma qualquer, na região externa ao condutor, é dado por*

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{n} \tag{4.25}$$

sendo $\hat{n}$ a normal à superfície do condutor.

A situação acima pode ser vista na figura 4.17, que mostra também a superfície gaussiana indicada para este caso.

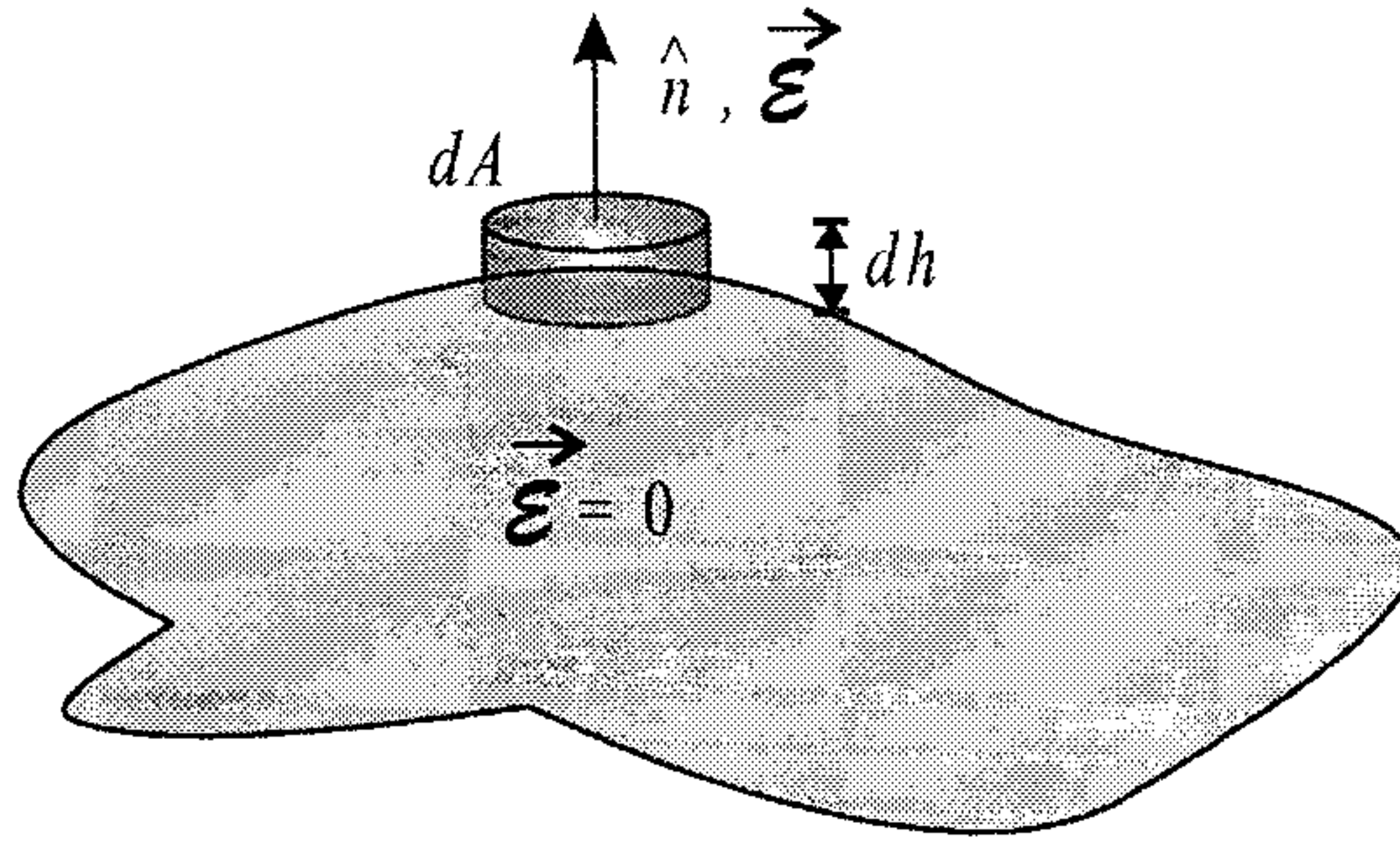



Figura 4.17: Um condutor de forma qualquer, e uma superfície gaussiana de forma cilíndrica de altura desprezível.

Como se percebe na figura, na superfície do condutor temos uma gaus siana cilíndrica com uma base de área dA muito pequena e uma altura dh também muito pequena. Essa superfície gaussiana delimita uma área dA' na superfície do condutor, que é igual a dA, já que a gaussiana é infinitesimal. Na superfície, o campo elétrico só pode ter uma componente normal à superfície pois, se houvesse uma componente tangente, as cargas seriam movidas até atingir o equilíbrio, quando então o campo tangente seria nulo. Dentro do condutor o campo é nulo, e a única contribuição para a lei de Gauss vem da superfície superior do cilindro, ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_S \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA &= \frac{1}{\epsilon_0}\int_{A'} \sigma\, dA' \\
\mathcal{E}\int_S dA &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}\int_{A'} dA' \\
\mathcal{E} dA &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} dA' \\
\mathcal{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

e, vetorialmente,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$$

que vale para pontos situados na região externa ao condutor e muito próximos a ele. Com isso encerramos os exemplos de aplicação da lei de Gauss. Nos exercícios, outras aplicações serão vistas. Agora, vamos continuar com o estudo do campo elétrico de outras distribuições de carga.

4.5 O Dipolo Elétrico

A configuração de cargas formada por duas cargas de mesmo módulo e sinais opostos, separadas por uma distância d, é chamada *dipolo elétrico.* A figura 4.18 apresenta tal configuração. Existem dois tipos de dipolo elétrico na natureza: os dipolos elétricos permanentes e os dipolos elétricos induzidos. O processo de formação de um dipolo elétrico induzido será visto mais tarde, no capítulo 10. Os dipolos elétricos permanentes aparecem nas moléculas polares, nas quais o "centro geométrico" das cargas positivas não coincide exatamente com o "centro geométrico" das cargas negativas, o que resulta na formação de um dipolo elétrico.

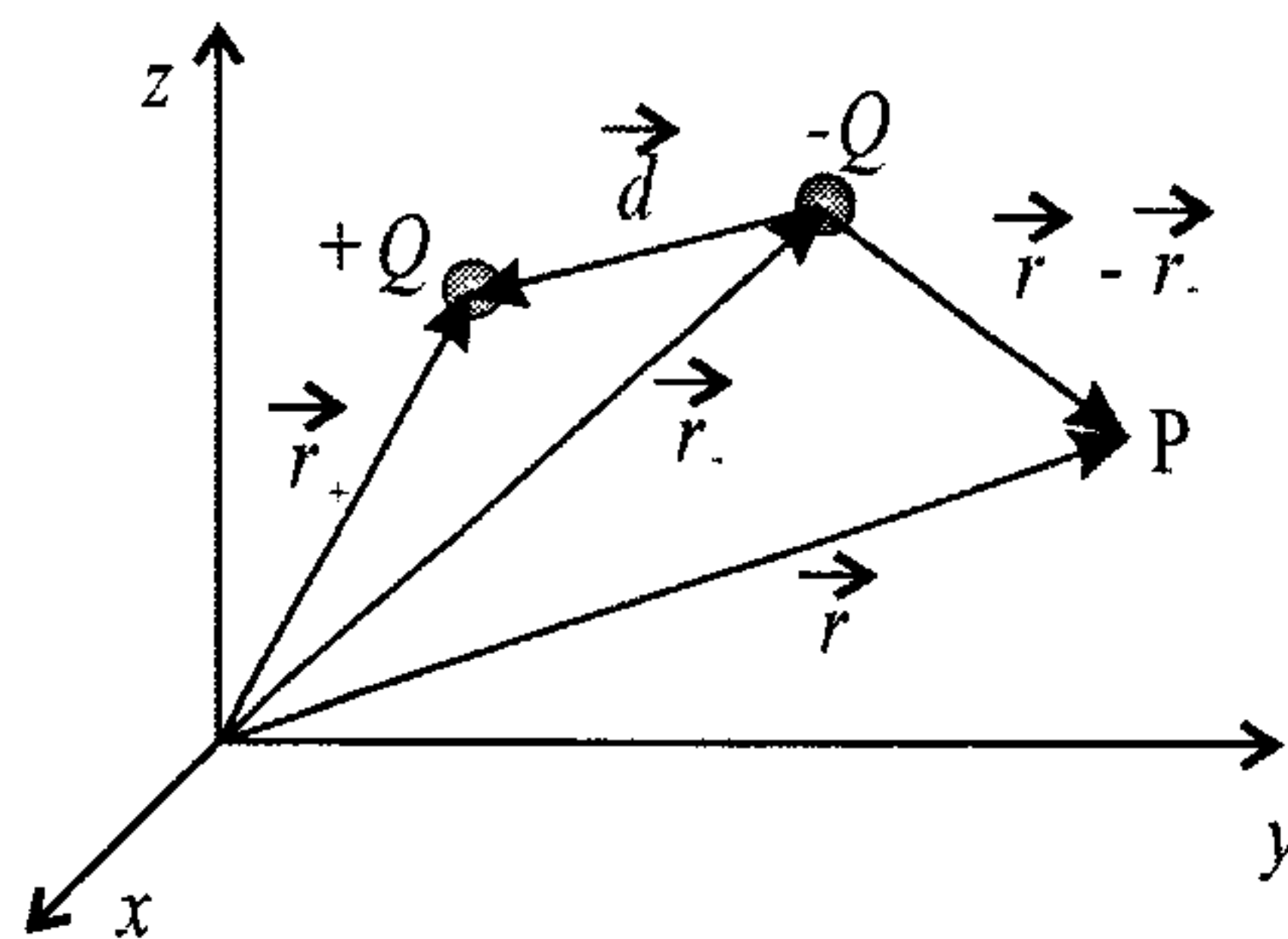



Figura 4.18: Um dipolo elétrico.

A formação de dipolos permanentes é muito comum em moléculas cuja configuração espacial dos átomos que a constituem é assimétrica, como, por exemplo, a água. A molécula da água é ilustrada esquematicamente na figura 4.19 abaixo.

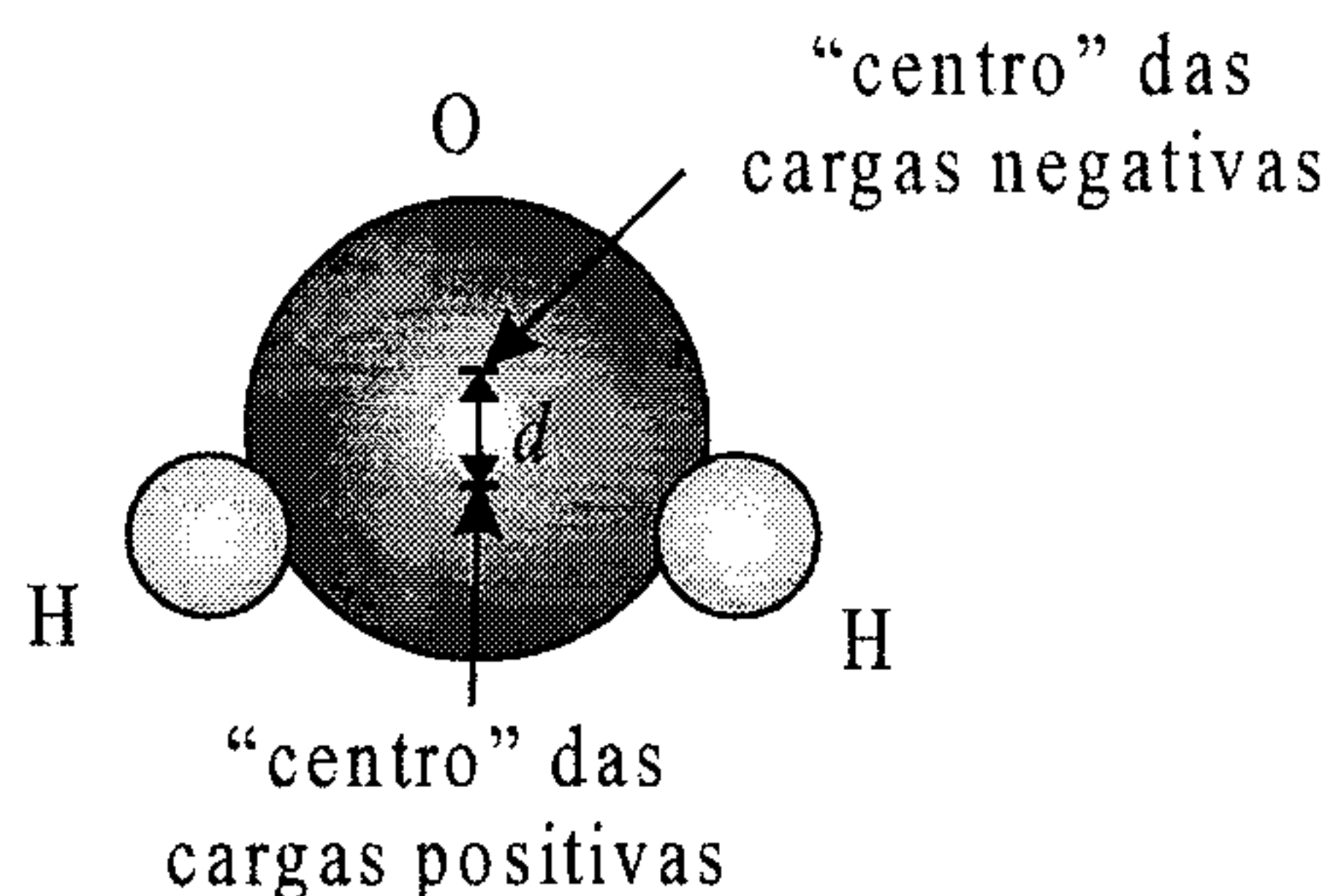



Figura 4.19: Diagrama esquemático da molécula da água.

É importante frisar que o diagrama acima é apenas um esquema da molécula, pois as distribuições esféricas de cargas, ao se interpenetrarem, se modificam e perdem esta forma esférica. No entanto, ele apresenta de maneira clara a formação do dipolo elétrico da água. Num dipolo elétrico, as linhas de campo elétrico têm a configuração apresentada na figura 4.20. É interessante notar nessa figura que as linhas de campo estão mais concentradas na região central entre as cargas, e menos nas outras regiões. Isso significa que o campo elétrico nessa região é mais intenso do que nos pontos à esquerda da carga positiva, ou à direita da carga negativa, por exemplo. Vamos agora calcular esse campo elétrico.

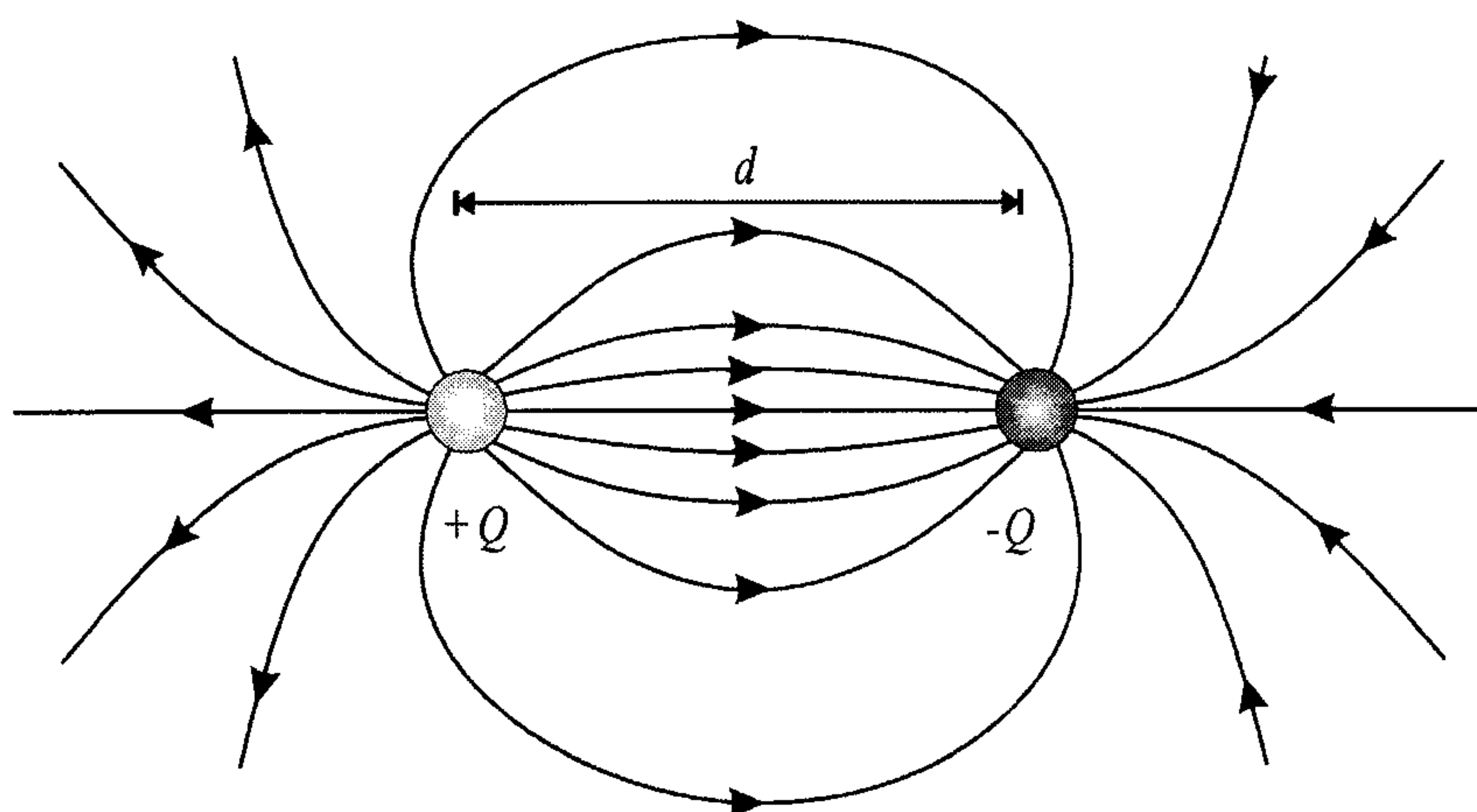



Figura 4.20: Linhas de campo elétrico para um dipolo elétrico.

O campo gerado por um dipolo elétrico numa posição $\vec{r}$ é a soma vetorial do campo produzido pela carga $+Q$, situada na posição $\vec{r}_+$ (veja a figura 4.18), com o campo produzido pela carga $-Q$, situada na posição $\vec{r}_-$. Assim, aplicando a equação 4.4 para essas duas cargas, temos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{2}\frac{Q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{+Q(\vec{r}-\vec{r}_+)}{|\vec{r}-\vec{r}_+|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Q(\vec{r}-\vec{r}_-)}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}$$

No entanto, temos também que

$$\vec{r}_+ = \vec{r}_- + \vec{d}$$

onde $\vec{d}$ é orientado da carga negativa para a positiva, e assim obtemos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}_- - \vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_- - \vec{d}\,|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}_-}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\right] \tag{4.26}$$

que vale para qualquer ponto e fornece a expressão exata para o campo elétrico gerado por um dipolo de separação $\vec{d}$ qualquer. No entanto, os dipolos em que estamos interessados, em especial os moleculares, têm uma separação $\vec{d}$ muito pequena quando comparada com a distância $\vec{r}-\vec{r}_-$, e podemos expandir a expressão acima neste limite, para obter uma equação de entendimento mais fácil. Vamos considerar o primeiro termo dentro dos colchetes, que é aquele que envolve $\vec{d}$. Podemos reescrevê-lo como

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}_- - \vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_- - \vec{d}\,|^3} = (\vec{r}-\vec{r}_- - \vec{d}\,)|\vec{r}-\vec{r}_- - \vec{d}|^{-3} \tag{4.27}$$

e expressar o módulo como

$$|\vec{r}-\vec{r}_- - \vec{d}|^{-3} = \left[|\vec{r}-\vec{r}_-|^2 - 2(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d} + d^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \left\{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2\left[1 - \frac{2(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2} + \frac{d^2}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right]\right\}^{-\frac{3}{2}}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}_- - \vec{d}|^{-3} = |\vec{r}-\vec{r}_-|^{-3}\left[1 - \frac{2(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2} + \frac{d^2}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right]^{-\frac{3}{2}}$$

Agora, o termo entre colchetes é do tipo $(1+x)^n$, onde x é pequeno quando comparado com 1, pois $\vec{d} \ll (\vec{r}-\vec{r}_-)$. Então, podemos expandir esse termo numa série de Taylor e considerar apenas termos lineares em $\vec{d}$, isto é, termos até a primeira ordem em $\vec{d}$ (veja a seção 2.1, sobre a série de Taylor). O resultado para o termo entre colchetes é

$$\left[1-\frac{2(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}+\frac{d^2}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right]^{-\frac{3}{2}} \cong 1+\frac{3(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}$$

e então,

$$|\vec{r}-\vec{r}_- -\vec{d}|^{-3} \cong |\vec{r}-\vec{r}_-|^{-3}\left[1+\frac{3(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right]$$

e voltando à equação 4.27, obtemos

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}_- -\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_- -\vec{d}|^3} \cong \frac{\vec{r}-\vec{r}_- -\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\left[1+\frac{3(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right]$$

ou

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}_- -\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_- -\vec{d}|^3} \cong \frac{\vec{r}-\vec{r}_-}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\left[1+\frac{3(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right] - \frac{\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\left[1+\frac{3(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right]$$

O último termo do lado direito envolve o fator d^2, e assim, ele pode ser desprezado em comparação com os outros. Portanto,

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}_- -\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_- -\vec{d}|^3} \cong \frac{\vec{r}-\vec{r}_-}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\left[1+\frac{3(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right] - \frac{\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}$$

e, retornando à equação 4.26,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}_- -\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_- -\vec{d}|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}_-}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\right]$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\vec{r}-\vec{r}_-}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\left[1+\frac{3(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^2}\right] - \frac{\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}_-}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\right\}$$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3(\vec{r}-\vec{r}_-)\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^5}(\vec{r}-\vec{r}_-) - \frac{\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\right], \qquad \vec{d} \ll (\vec{r}-\vec{r}_-)$$

que é o campo gerado por um dipolo nas regiões que se encontram bem afastadas dele. É comum definir o *vetor momento de dipolo* $\vec{p}$ como sendo [3]

$$\vec{p} = |Q|\vec{d} \tag{4.28}$$

Além disso, quando $\vec{d} \to 0$ e $Q \to \infty$ ao mesmo tempo, de forma que $\vec{p}$ fica fixo, temos um dipolo pontual, situado na posição $\vec{r} = \vec{r}_-$, e a expressão acima torna-se exata. Assim, para um dipolo pontual, temos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5}(\vec{r}-\vec{r}\,') - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right] \tag{4.29}$$

Note que o campo elétrico gerado por um dipolo decai, com a distância, de uma forma proporcional a r^{-3}, ou seja, ele vai a zero mais rapidamente do que o campo elétrico de uma carga pontual.

Isto pode ser comprovado se considerarmos, para facilitar, um dipolo na origem, orientado na direção z, semelhante ao da figura 4.20. Assim, $\vec{r}\,' = 0$, $\vec{p} = p\,\hat{\mathbf{k}}$ e $\vec{r} = r\,\hat{\mathbf{r}}$. A expressão 4.29 fica, neste caso,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3r\,\hat{\mathbf{r}}\cdot p\,\hat{\mathbf{k}}}{r^5}r\,\hat{\mathbf{r}} - \frac{p\,\hat{\mathbf{k}}}{r^3}\right]$$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{k}}}{r^3}\,\hat{\mathbf{r}} - \frac{\hat{\mathbf{k}}}{r^3}\right]$$

Como os versores têm módulo unitário, percebemos claramente a dependência de $\vec{\mathcal{E}}$ com a distância de uma forma proporcional a r^{-3}. No plano perpendicular ao eixo z, entre as cargas, ou seja, no plano que secciona o dipolo ao meio, $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\rho}}$, e o campo elétrico é dado por

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{k}}}{r^3} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{4.30}$$

que é orientado em sentido oposto ao do momento de dipolo. Observe que esta é a região em que o campo elétrico é mais intenso.

[3] O momento de dipolo da água vale $p = 6,14 \times 10^{-30}$ C.m. Trata-se de um dos maiores valores de momento de dipolo de todas as substâncias.

4.6 Torque sobre um Dipolo Elétrico

Acabamos de calcular o campo elétrico gerado por um dipolo elétrico. Mas o que ocorre quando o dipolo está imerso num campo elétrico externo? Neste caso, as duas cargas ficam sujeitas à ação de forças elétricas, como ilustra a figura 4.21. Como vemos pela figura, o grupo de forças faz com que um torque aja sobre o dipolo elétrico, e no caso acima, esse torque sai do plano do papel de forma perpendicular. O torque resultante é a soma dos torques exercidos por cada uma das forças, ou seja, considerando como origem o ponto médio entre as duas cargas,

$$\vec{\mathbb{T}}_+ = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+$$
$$\vec{\mathbb{T}}_- = \vec{r}_- \times \vec{F}_-$$

e então,

$$\vec{\mathbb{T}}_O = \vec{\mathbb{T}}_+ + \vec{\mathbb{T}}_-$$
$$\vec{\mathbb{T}}_O = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_-$$

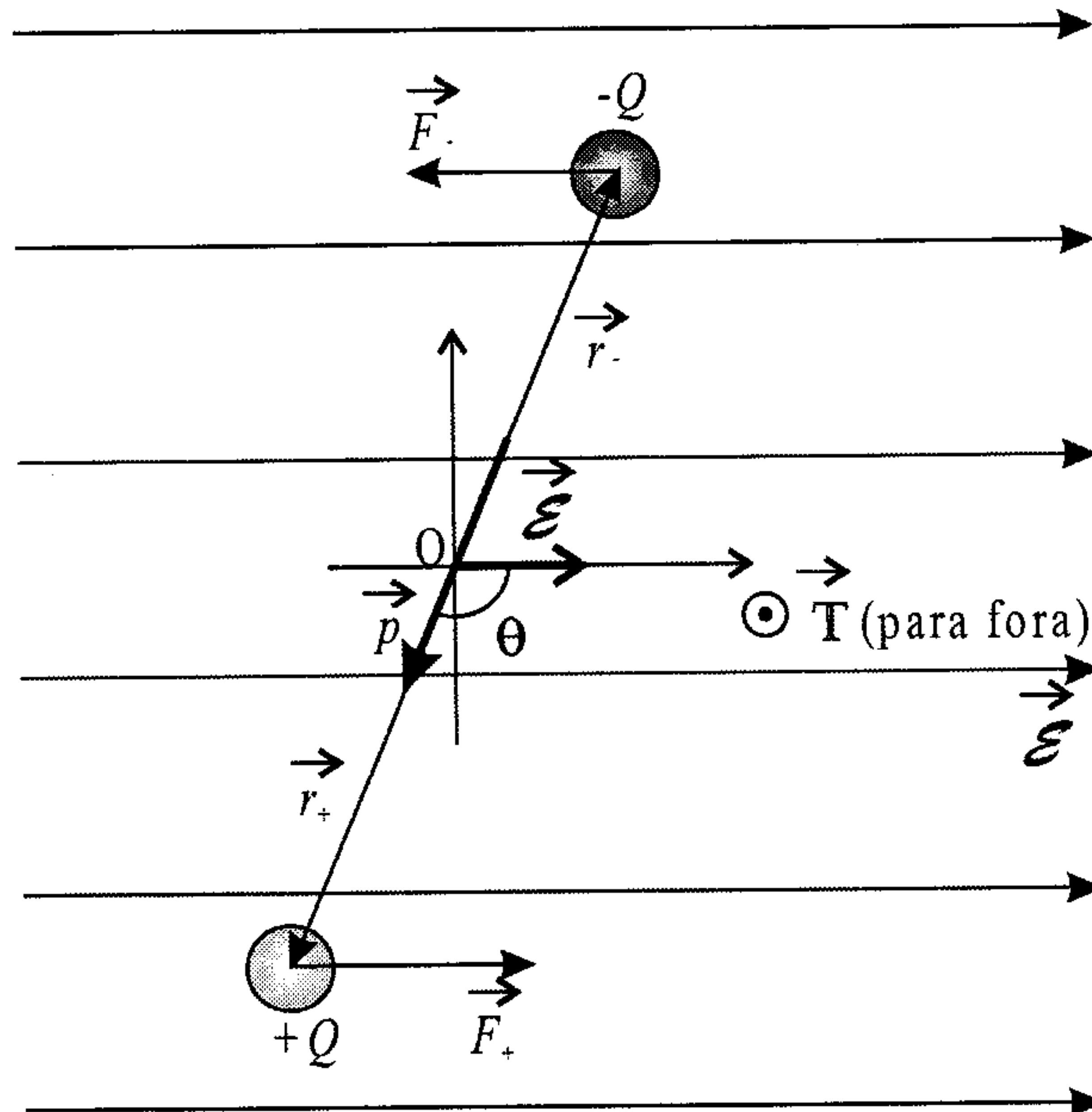



Figura 4.21: Dipolo elétrico num campo elétrico externo uniforme.

Como estamos no ponto médio entre as duas cargas,

$$\vec{r}_+ = -\vec{r}_-$$

Além disso, sendo o campo elétrico uniforme, e considerando que, em módulo, as duas cargas são iguais, as forças que agem sobre as cargas também são iguais em módulo, e portanto,

$$\vec{F}_+ = -\vec{F}_-$$

Com estas substituições, o torque fica

$$\vec{\mathbb{T}}_O = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + (-\vec{r}_+) \times (-\vec{F}_+)$$
$$\vec{\mathbb{T}}_O = 2\vec{r}_+ \times \vec{F}_+$$

No entanto, $2\vec{r}_+ = \vec{d}$, e $\vec{F}_+ = Q\vec{\mathcal{E}}$, e então,

$$\vec{\mathbb{T}}_O = \vec{d} \times Q\vec{\mathcal{E}}$$

ou, como o momento de dipolo é definido pela equação 4.28 ($\vec{p} = Q\vec{d}$), obtemos

$$\vec{\mathbb{T}}_O = \vec{p} \times \vec{\mathcal{E}} \tag{4.31}$$

que é a expressão para o torque que age sobre um dipolo de tamanho qualquer, situado num campo elétrico homogêneo. Esse torque, que faz com que o dipolo gire em torno de seu centro, é chamado *torque de giro*. Quando o campo não é homogêneo, as forças elétricas nas duas cargas não são exatamente iguais, e o torque acima constitui uma parte do torque total. Fazendo uma analogia mecânica, o torque calculado acima é o torque do sistema em torno do "centro de massa", e o torque total em relação a qualquer ponto é o torque em relação ao "centro de massa", que aqui é o centro do dipolo, somado ao torque do centro de massa em relação à outra origem. Assim, precisamos encontrar a força total que age sobre um dipolo quando o campo não é homogêneo. Neste caso, a força é dada por

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_+ + \vec{F}_- \\ &= Q\vec{\mathcal{E}}_+ + (-Q)\vec{\mathcal{E}}_- \\ \vec{F} &= Q(\vec{\mathcal{E}}_+ - \vec{\mathcal{E}}_-)\end{aligned}$$

Considere agora que o centro do dipolo esteja situado numa posição $\vec{r}$ em relação a um outro referencial O' qualquer. Assim, podemos escrever

$$\vec{F} = Q\left[\vec{\mathcal{E}}_+(\vec{r}+\vec{r}_+) - \vec{\mathcal{E}}_-(\vec{r}+\vec{r}_-)\right]$$

Levando em conta que $\vec{r}_+ \ll \vec{r}$ e que $\vec{r}_- \ll \vec{r}$, podemos expandir os campos elétricos em uma série de Taylor em torno da posição $\vec{r}$, da mesma forma como se faz com uma função escalar, lembrando que o campo elétrico é uma grandeza vetorial. Mantendo apenas os termos lineares em $\vec{r}_+$ e $\vec{r}_-$, obtemos

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}_+(\vec{r}+\vec{r}_+) &= \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \vec{r}_+ \; \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \\
\vec{\mathcal{E}}_+(\vec{r}+\vec{r}_-) &= \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \vec{r}_- \; \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})
\end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= Q\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \vec{r}_+ \; \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) - \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) - \vec{r}_- \; \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\right] \\
\vec{F} &= Q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})
\end{aligned}$$

No entanto, temos

$$\vec{r}_+ = -\vec{r}_- = \frac{\vec{d}}{2}$$

e a expressão acima fica

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \overbrace{Q\vec{d}}^{\vec{p}} \; \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \\
\vec{F} &= \vec{p} \; \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}
\end{aligned}$$

e assim, o torque do "centro de massa" do dipolo em torno da origem O' é dado por

$$\vec{\mathbb{T}}_{O'} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left(\vec{p} \; \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}\right)$$

e o torque total é

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbb{T}} &= \vec{\mathbb{T}}_O + \vec{\mathbb{T}}_{O'} \\
\vec{\mathbb{T}} &= \vec{r} \times \left(\vec{p} \; \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}\right) + \vec{p} \times \vec{\mathcal{E}}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Note que, se o campo é homogêneo, $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$, e o torque independe da origem O ou O'. Ainda que o campo não seja homogêneo, se a origem está no centro do dipolo, o torque ainda será dado pela expressão 4.31, pois neste caso, $\vec{r} = 0$.

O torque gerado pelo campo elétrico externo faz com que o dipolo gire e procure orientar seu momento de dipolo no mesmo sentido que o do campo externo. Este fato é extremamente importante e será estudado novamente no capítulo 10.

4.7 Delta de Dirac e Cargas Pontuais

Na seção 4.2 vimos a função delta de Dirac, que possui duas propriedades importantes, dadas pelas equações 4.16 e 4.17, que são

$$\int \delta(x - x_0)\ dx = 1$$

e

$$\int f(x)\ \delta(x - x_0)\ dx = f(x_0)$$

Elas são válidas desde que o intervalo de integração contenha o valor x_0, chamado *zero* da delta. Outras propriedades importantes das funções delta de Dirac são

$$\int f(x)\ \delta'(x - x_0)\ dx = -f'(x_0) \tag{4.33}$$

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left|\frac{df}{dx}(x_i)\right|} \tag{4.34}$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \tag{4.35}$$

$$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\ dV = \begin{cases} 1, & \vec{r}_0 \in V \\ 0, & \vec{r}_0 \notin V \end{cases} \tag{4.36}$$

$$\int_V f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\ dV = \begin{cases} f(\vec{r}_0), & \vec{r}_0 \in V \\ 0, & \vec{r}_0 \notin V \end{cases} \tag{4.37}$$

Da expressão 4.36, vemos que a função delta tridimensional não é adimensional. Na verdade, para que essa equação seja válida do ponto de vista de análise dimensional, a função delta deve ter dimensão de inverso de volume, ou L^{-3}. Das expressões 4.16 e 4.35, observamos que cada uma das funções delta unidimensionais em coordenadas retangulares tem dimensão de inverso de comprimento, ou L^{-1}, o que produz, na delta tridimensional, uma dimensão $\left(L^{-1}\right)^3 = L^{-3}$, como deve ser. Esta verificação é importante, porque nos permite obter as funções delta em outras coordenadas, em particular nas coordenadas cilíndricas e esféricas, o que será útil mais tarde. As coordenadas cilíndricas são ρ, θ e z, e a nossa primeira sugestão para a função delta poderia ser

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(\rho - \rho_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(z - z_0)$$

Se essa expressão estiver correta, ao ser integrada em todo o espaço, ela deve resultar, pela equação 4.36, no número 1. Vamos verificar isto explicitamente, lembrando que o elemento de volume em coordenadas cilíndricas é dado pela equação 1.45,

$$dV = \rho d\rho\, d\theta\, dz$$

Assim, considerando um ponto qualquer $\mathrm{P}(\rho_0, \theta_0, z_0)$ como zero da delta, a sua integral resulta na expressão

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\rho - \rho_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(z - z_0)\rho d\rho\, d\theta\, dz$$

que pode ser reescrita como

$$I = \int_0^{\infty} \rho\delta(\rho - \rho_0)d\rho \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_0)d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - z_0)dz$$

Usando as propriedades 4.16 e 4.17, obtemos para as integrais os valores

$$\int_0^{\infty} \rho\delta(\rho - \rho_0)d\rho = \rho_0 \tag{4.38a}$$

$$\int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_0)d\theta = 1 \tag{4.38b}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - z_0)dz = 1 \tag{4.38c}$$

e portanto,

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \delta(\rho-\rho_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(z-z_0)\rho d\rho\, d\theta\, dz = \rho_0$$

o que discorda do fato de que a integral deveria valer 1 e ser adimensional, pois o resultado tem dimensão de comprimento ($[\rho_0] = L$). A função delta em z na equação 4.38c tem dimensão de L^{-1}, e da mesma forma a função delta em ρ na expressão 4.38a, visto que ambas são coordenadas lineares. Já a função delta no ângulo θ não possui dimensão, uma vez que ângulos são adimensionais, como podemos ver na integral em 4.38b, lembrando que $[d\theta] = 1$. É preciso, portanto, corrigir a função $\delta(\theta-\theta_0)$, o que é feito mediante sua divisão por uma grandeza que tem dimensão de comprimento. Como a integral das funções delta tem como resultado ρ_0, vamos dividir a função delta no ângulo por ρ e verificar se isso resolve o problema. Assim, nossa nova função delta é

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \delta(\rho-\rho_0)\frac{\delta(\theta-\theta_0)}{\rho}\delta(z-z_0)$$

e agora, fazendo a integral, temos

$$I = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \delta(\rho-\rho_0)\frac{\delta(\theta-\theta_0)}{\rho}\delta(z-z_0)\rho d\rho\, d\theta\, dz$$

ou

$$I = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \delta(\rho-\rho_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(z-z_0) d\rho\, d\theta\, dz$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} I &= \overbrace{\int_0^\infty \delta(\rho-\rho_0)d\rho}^{1} \overbrace{\int_0^{2\pi} \delta(\theta-\theta_0)d\theta}^{1} \overbrace{\int_{-\infty}^\infty \delta(z-z_0)dz}^{1} \\ I &= 1 \end{aligned}$$

Assim, confirmamos que a função delta em coordenadas cilíndricas é representada por

$$\delta_{\rho,\theta,z} = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \delta(\rho-\rho_0)\frac{\delta(\theta-\theta_0)}{\rho}\delta(z-z_0) \tag{4.39}$$

A esta altura, você poderia perguntar por que, ao invés de dividir a função delta por ρ, não a dividimos por ρ_0, o que formalmente produziria o mesmo efeito final. A resposta é simples: suponha que $\rho_0 = 0$. A função delta ficaria dividida por zero, o que produz uma indeterminação, não sendo, portanto, de grande utilidade prática. Por isso, o correto é dividi-la por ρ.

Vejamos agora a função delta em coordenadas esféricas r, θ e ϕ. A hipótese inicial é

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(\phi - \phi_0)$$

mas, como já sabemos que as funções delta de coordenadas angulares precisam ser corrigidas para acertar as dimensões, precisamos "consertar" as funções delta dos ângulos. Vamos integrar esta função delta para ver o que está errado. O elemento de volume em coordenadas esféricas é dado pela expressão 1.47,

$$dV = r^2 \operatorname{sen}\theta dr\, d\theta\, d\phi$$

e assim,

$$I = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(\phi - \phi_0) r^2 \operatorname{sen}\theta dr\, d\theta\, d\phi$$

ou

$$I = \overbrace{\int_0^\infty r^2\delta(r - r_0)dr}^{r_0^2} \overbrace{\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\delta(\theta - \theta_0)d\theta}^{\operatorname{sen}\theta_0} \overbrace{\int_0^{2\pi} \delta(\phi - \phi_0)d\phi}^{1}$$

ou seja,

$$I = r_0^2 \operatorname{sen}\theta_0$$

Assim, para corrigir as funções delta, se tomarmos por base o que ocorreu para a função delta em coordenadas cilíndricas, devemos dividi-las por r. Entretanto, apenas isso não é suficiente, por causa do fator $\operatorname{sen}\theta_0$ que também aparece na integral. Para eliminar esse fator indesejável, dividimos a função delta do ângulo θ por $\operatorname{sen}\theta$, o que resulta em

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(r - r_0)\frac{\delta(\theta - \theta_0)}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\delta(\phi - \phi_0)}{r}$$

e desse modo,

$$I = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(r - r_0)\frac{\delta(\theta - \theta_0)}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\delta(\phi - \phi_0)}{r} r^2 \operatorname{sen}\theta dr\, d\theta\, d\phi$$

ou

$$I = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(\phi - \phi_0) dr\, d\theta\, d\phi$$

ou ainda,

$$I = \overbrace{\int_0^\infty \delta(r - r_0)dr}^{1} \overbrace{\int_0^\pi \delta(\theta - \theta_0)d\theta}^{1} \overbrace{\int_0^{2\pi} \delta(\phi - \phi_0)d\phi}^{1} = 1$$

e isso mostra que a função delta em coordenadas esféricas é realmente dada pela expressão

$$\delta_{r,\theta,\phi} = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(r - r_0)\frac{\delta(\theta - \theta_0)}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\delta(\phi - \phi_0)}{r} \tag{4.40}$$

Apesar de a expressão 4.40 representar, de forma correta, a função delta em esféricas, em geral essa função é expressa de outra forma, baseada no fato de que $d(\cos\theta) = -\operatorname{sen}\theta d\theta$. Assim, a função delta fica escrita como

$$\delta_{r,\theta,\phi} = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(r - r_0)\frac{\delta(\cos\theta - \cos\theta_0)}{r}\frac{\delta(\phi - \phi_0)}{r} \tag{4.41}$$

fato este que pode ser verificado mediante a integração desta equação em todo o espaço, isto é,

$$I = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta(r - r_0)\frac{\delta(\cos\theta - \cos\theta_0)}{r}\frac{\delta(\phi - \phi_0)}{r} r^2 \operatorname{sen}\theta dr\, d\theta\, d\phi$$

ou, como $d(\cos\theta) = -\operatorname{sen}\theta d\theta$,

$$I = -\int_0^\infty \int_1^{-1} \int_0^{2\pi} \delta(r - r_0)\delta(\cos\theta - \cos\theta_0)\delta(\phi - \phi_0) dr\, d(\cos\theta)\, d\phi$$

Agora, invertemos os limites de integração da integral em $d(\cos\theta)$, o que muda o sinal da integral, ou seja,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \delta(r-r_0)\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\delta(\phi-\phi_0)dr\, d(\cos\theta)\, d\phi \\ &= \overbrace{\int_0^\infty \delta(r-r_0)dr}^{1} \overbrace{\int_{-1}^1 \delta(\cos\theta-\cos\theta_0)d(\cos\theta)}^{1} \overbrace{\int_0^{2\pi} \delta(\phi-\phi_0)d\phi}^{1} \\ I &= 1 \end{aligned}$$

e assim, a função delta definida em 4.41 concorda com os resultados esperados. Quando ela é utilizada desta forma, devemos lembrar de fazer a transformação $d(\cos\theta) = -\operatorname{sen}\theta d\theta$ no elemento de volume em esféricas.

Quando temos um problema envolvendo distribuições contínuas de carga e também cargas pontuais, é conveniente incluir essas cargas na densidade de carga total. Isto pode ser feito através do uso de funções delta de Dirac apropriadas. Se uma dada carga Q está localizada na posição $\vec{r}_0$, a densidade de carga associada a essa carga é escrita como

$$\rho(\vec{r}) = Q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \tag{4.42}$$

É fácil ver que a expressão acima fornece o valor correto para a densidade de carga. Vamos integrar a densidade em todo o espaço, o que deve resultar na carga total Q. Assim,

$$\begin{aligned} \int \rho(\vec{r})\ dV &= \int Q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\ dV \\ \int \rho(\vec{r})\ dV &= Q\overbrace{\int \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\ dV}^{1} \\ \int \rho(\vec{r})\ dV &= Q \end{aligned}$$

e o resultado é a carga total Q, como deve ser. Note que esse resultado independe do sistema de coordenadas utilizado. Se houver várias cargas Q_i em posições $\vec{r}_i$, a densidade de cargas associada será

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i Q_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i) \tag{4.43}$$

e se $\varrho(\vec{r})$ for a densidade de carga associada à distribuição contínua de cargas, a densidade total será

$$\rho_T = \rho + \varrho$$

Para o caso específico de um dipolo, a densidade de carga é

$$\rho_{\text{dipolo}} = Q\big[\delta(\vec{r} - \vec{r}_+) - \delta(\vec{r} - \vec{r}_-)\big] \tag{4.44}$$

e o momento de dipolo pode ser calculado através de

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}\,'\,\rho(\vec{r}\,')\,dV \tag{4.45}$$

que resulta em

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= \int_V \vec{r}\,'\,\rho(\vec{r}\,')\,dV \\
&= \int_V \vec{r}\,'Q\big[\delta(\vec{r} - \vec{r}_+) - \delta(\vec{r} - \vec{r}_-)\big]\,dV \\
&= Q\int_V \vec{r}\,'\big[\delta(\vec{r} - \vec{r}_+) - \delta(\vec{r} - \vec{r}_-)\big]\,dV \\
&= Q\overbrace{[\vec{r}_+ - \vec{r}_-]}^{\vec{d}} \\
\vec{p} &= Q\vec{d}
\end{aligned}$$

concordando com a expressão 4.28. Veja que a equação 4.45 fornece o momento de dipolo para qualquer distribuição de cargas, não apenas um dipolo. O momento de monopolo, que é a carga livre, é dado pela integral

$$Q_{\text{livre}} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\,dV \tag{4.46}$$

que, para um dipolo, se anula, pois

$$\begin{aligned}
Q_{\text{livre}} &= \int_V \rho(\vec{r}\,')\,dV \\
&= \int_V Q\big[\delta(\vec{r} - \vec{r}_+) - \delta(\vec{r} - \vec{r}_-)\big]\,dV \\
&= Q\int_V \big[\delta(\vec{r} - \vec{r}_+) - \delta(\vec{r} - \vec{r}_-)\big]\,dV \\
Q_{\text{livre}} &= Q(1-1)
\end{aligned}$$

ou

$$Q_{\text{livre}} = 0$$

Além dos momentos de monopolo e dipolo, existem outros, que serão vistos nos próximos capítulos.

Exemplo 4.16. *Considere uma carga pontual situada em $z = a$, como mostra a figura 4.22.*

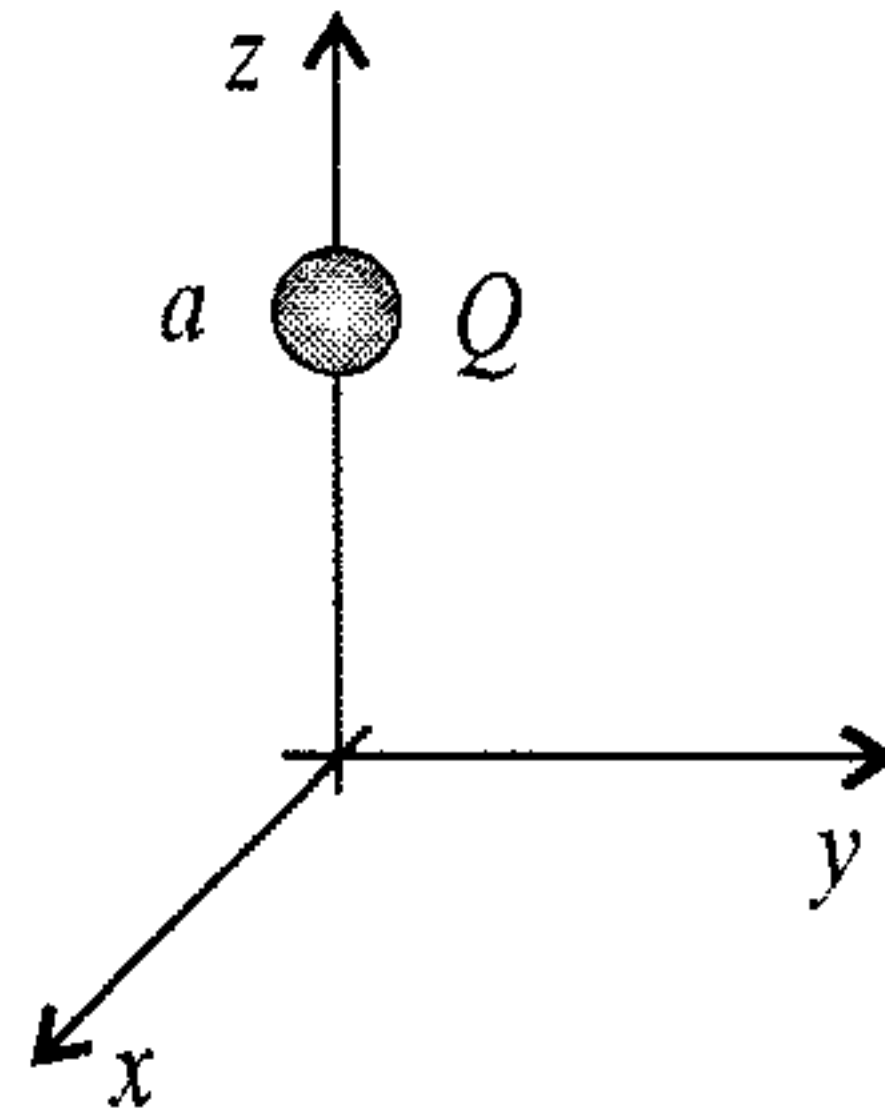



Figura 4.22: Uma carga pontual para a obtenção da densidade de cargas em termos das deltas de Dirac.

a) Para esta carga, escreva a densidade de carga associada.

A carga Q está situada em $x = 0$, $y = 0$ e $z = a$, ou seja, $\vec{r}_0 = a\,\hat{\mathbf{k}}$. Assim, a densidade de carga em coordenadas retangulares é

$$\begin{aligned}\varrho(x,y,z) &= Q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\\ &= Q\delta(x-0)\delta(y-0)\delta(z-a)\\ \varrho(x,y,z) &= Q\delta(x)\delta(y)\delta(z-a)\end{aligned}$$

Podemos verificar se a expressão está correta, integrando-a, ou seja,

$$\int_V \varrho(x,y,z)\,dV = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q\delta(x)\delta(y)\delta(z-a)\,dxdydz$$

$$\int_V \varrho(x,y,z)\,dV = Q\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z-a)\,dxdydz$$

$$\int_V \varrho(x,y,z)\, dV = Q\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)dy\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z-a)dz$$
$$\int_V \varrho(x,y,z)\, dV = Q$$

e portanto, a integral da densidade de cargas fornece a carga total Q, como deve ser. Vamos escrever essa densidade em coordenadas cilíndricas, lembrando que, neste caso, as coordenadas são $\rho = 0$, $\theta = 0$ e $z = a$. A densidade de cargas em cilíndricas fica, usando a expressão 4.39,

$$\begin{aligned}
\varrho(\rho,\theta,z) &= Q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\\
&= Q\delta(r-0)\frac{\delta(\theta-0)}{\rho}\delta(z-a)\\
\varrho(\rho,\theta,z) &= \frac{Q}{\rho}\delta(\rho)\delta(\theta)\delta(z-a)
\end{aligned}$$

e, conferindo esta expressão, temos

$$\begin{aligned}
\int_V \varrho(\rho,\theta,z)\, dV &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q}{\rho}\delta(\rho)\delta(\theta)\delta(z-a)\,\rho d\rho d\theta dz\\
&= Q\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\rho)\delta(\theta)\delta(z-a)\,d\rho d\theta dz\\
&= Q\int_0^{\infty}\delta(\rho)d\rho\int_0^{2\pi}\delta(\theta)d\theta\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z-a)dz\\
\int_V \varrho(\rho,\theta,z)\, dV &= Q
\end{aligned}$$

Por fim, vamos expressá-la também em coordenadas esféricas, sendo que, neste caso, $r = a$, $\theta = 0$ e $\phi = 0$. A densidade de cargas dada pela equação 4.40 torna-se

$$\begin{aligned}
\varrho(r,\theta,\phi) &= Q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\\
&= Q\delta(r-a)\frac{\delta(\theta-0)}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\delta(\phi-0)}{r}\\
\varrho(r,\theta,\phi) &= \frac{Q}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\delta(r-a)\delta(\theta)\delta(\phi)
\end{aligned}$$

e, conferindo esta equação novamente, mediante a sua integração, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_V \varrho(r,\theta,\phi)\,dV &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{Q}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\delta(r-a)\delta(\theta)\delta(\phi)\, r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi \\
&= Q\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta(r-a)\delta(\theta)\delta(\phi)\, dr d\theta d\phi \\
&= Q\int_0^\infty \delta(r-a)dr \int_0^\pi \delta(\theta)d\theta \int_0^{2\pi} \delta(\phi)d\phi \\
\int_V \varrho(r,\theta,\phi)\,dV &= Q
\end{aligned}$$

Em coordenadas esféricas, podemos também expressar a densidade de carga mediante o uso da equação 4.41, que fica

$$\begin{aligned}
\varrho(r,\theta,\phi) &= Q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \\
&= Q\delta(r-a)\frac{\delta(\cos\theta - 1)}{r}\frac{\delta(\phi-0)}{r} \\
\varrho(r,\theta,\phi) &= \frac{Q}{r^2}\delta(r-a)\delta(\cos\theta)\delta(\phi)
\end{aligned}$$

e, para fazer a verificação, devemos lembrar de usar a substituição $d(\cos\theta) = -\operatorname{sen}\theta d\theta$, isto é,

$$\begin{aligned}
\int_V \varrho(r,\theta,\phi)\,dV &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{Q}{r^2}\delta(r-a)\delta(\cos\theta)\delta(\phi)\, r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi \\
&= -Q\int_0^\infty \int_1^{-1} \int_0^{2\pi} \delta(r-a)\delta(\cos\theta)\delta(\phi)\, dr d(\cos\theta) d\phi \\
\int_V \varrho(r,\theta,\phi)\,dV &= Q\int_0^\infty \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} \delta(r-a)\delta(\cos\theta)\delta(\phi)\, dr d(\cos\theta) d\phi \\
\int_V \varrho(r,\theta,\phi)\,dV &= Q\int_0^\infty \delta(r-a)dr \int_{-1}^{1} \delta(\cos\theta)d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} \delta(\phi)d\phi \\
\int_V \varrho(r,\theta,\phi)\,dV &= Q
\end{aligned}$$

b) Usando a equação 4.45, calcule o momento de dipolo desta distribuição de cargas.

O momento de dipolo, dado pela expressão 4.45, fica, em coordenadas retangulares,

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})\, dV$$

$$\vec{p} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}})Q\delta(x)\delta(y)\delta(z-a)\, dxdydz$$

ou

$$\vec{p} = Q\,\hat{\mathbf{i}}\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x)dx}^{0}\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)dy}^{1}\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z-a)dz}^{1}$$
$$+\,Q\,\hat{\mathbf{j}}\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx}^{1}\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y\delta(y)dy}^{0}\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z-a)dz}^{1}$$
$$+\,Q\,\hat{\mathbf{k}}\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx}^{1}\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)dy}^{1}\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} z\delta(z-a)dz}^{a}$$

ou ainda,

$$\vec{p} = Qa\,\hat{\mathbf{k}}$$

Exemplo 4.17. *Encontre a densidade de cargas para as cargas apresentadas na figura 4.23.*

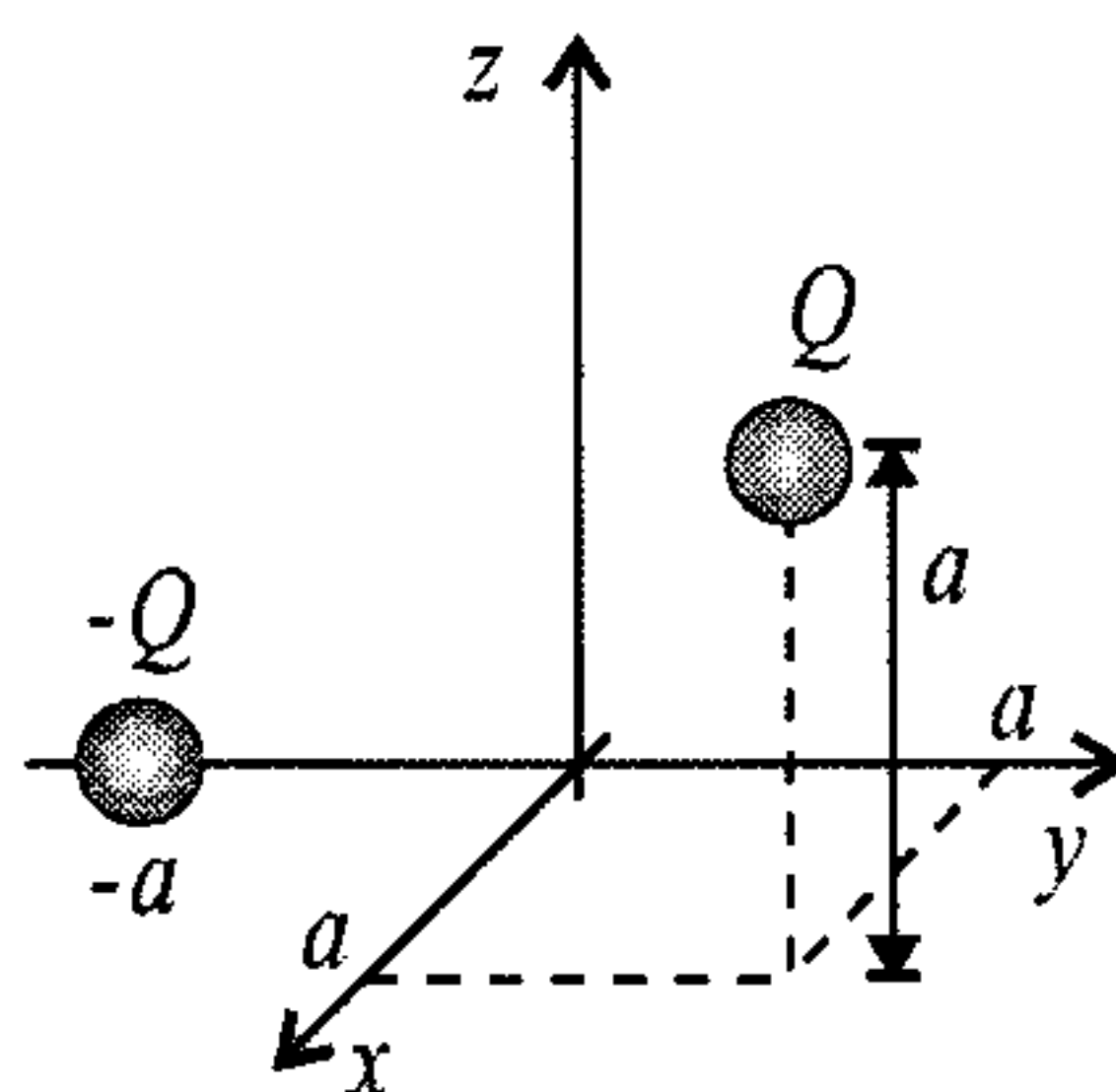



Figura 4.23: Duas cargas pontuais para a obtenção da densidade de cargas em termos das deltas de Dirac.

Na figura, vemos que a carga Q está situada em $\vec{r} = a\,\hat{\mathbf{i}} + a\,\hat{\mathbf{j}} + a\,\hat{\mathbf{k}}$, em coordenadas retangulares. Em coordenadas cilíndricas, temos, através das expressões 1.30,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$
$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{a}{a} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$
$$z = z = a$$

ou seja, a carga está situada no ponto $\mathrm{P}(a\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, a)$. Em coordenadas esféricas, as equações 1.36 nos dão

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$
$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{2}}{a} = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$$
$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{a}{a} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

e a carga Q fica no ponto $\mathrm{P}(a\sqrt{3}, \operatorname{arctg} \sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$. A densidade de carga associada a essa carga fica

$$\varrho_Q(x, y, z) = Q\delta(x - a)\delta(y - a)\delta(z - a)$$

em coordenadas retangulares,

$$\varrho_Q(\rho, \theta, z) = Q\delta(\rho - a\sqrt{2})\frac{\delta(\theta - \frac{\pi}{4})}{\rho}\delta(z - a)$$

em coordenadas cilíndricas, e

$$\varrho_Q(r, \theta, \phi) = Q\delta(r - a\sqrt{3})\frac{\delta(\theta - \operatorname{arctg} \sqrt{2})}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\delta(\phi - \frac{\pi}{4})}{r}$$

em coordenadas esféricas. A outra carga, $-Q$, está situada em $\vec{r}_{-Q} = -a\,\hat{\mathbf{j}}$, em coordenadas retangulares, o que corresponde a uma densidade de cargas

$$\varrho_{-Q}(x, y, z) = -Q\delta(x)\delta(y + a)\delta(z)$$

Em coordenadas cilíndricas, ela está situada em

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2} = a$$
$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{-a}{0} = \operatorname{arctg} -\infty = -\frac{\pi}{2}$$
$$z = z = 0$$

e portanto,

$$\varrho_{-Q}(\rho,\theta,z) = -Q\delta(\rho - a)\frac{\delta(\theta + \frac{\pi}{2})}{\rho}\delta(z)$$

E finalmente, em coordenadas esféricas, a carga $-Q$ está situada em

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{a^2} = a \\ \theta &= \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2}}{0} = \operatorname{arctg}\frac{a}{0} = \operatorname{arctg}\infty = \frac{\pi}{2} \\ \phi &= \operatorname{arctg}\frac{-a}{0} = \operatorname{arctg} -\infty = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

e a densidade de cargas torna-se

$$\varrho_{-Q}(r,\theta,\phi) = Q\delta(r-a)\frac{\delta(\theta - \frac{\pi}{2})}{r\,\operatorname{sen}\theta}\frac{\delta(\phi + \frac{\pi}{2})}{r}$$

ou, de forma equivalente, utilizando a função delta em $\cos\theta$,

$$\varrho_{-Q}(r,\theta,\phi) = Q\delta(r-a)\frac{\delta(\cos\theta)}{r}\frac{\delta(\phi + \frac{\pi}{2})}{r}$$

A densidade de cargas total é a soma das duas densidades, ou seja,

$$\varrho = \varrho_Q + \varrho_{-Q}$$

ou, em coordenadas retangulares,

$$\varrho = Q\delta(x-a)\delta(y-a)\delta(z-a) - Q\delta(x)\delta(y+a)\delta(z)$$

Exemplo 4.18. *Algumas distribuições de carga, apesar de não serem formadas por cargas pontuais discretas, podem ser expressas em termos de funções delta apropriadas. Com base nisso, exprima as seguintes distribuições contínuas de carga, utilizando funções delta.*

a) Uma esfera condutora de raio R, contendo uma carga Q distribuída de forma homogênea sobre ela.

Neste caso, a carga está situada a uma distância R da origem e, para representar este fato, usamos a densidade de cargas

$$\varrho(r,\theta,\phi) = \frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r-R) \tag{4.47}$$

Podemos verificar esta expressão, integrando-a, o que deve resultar na carga total Q sobre a esfera, ou seja,

$$\int_V \varrho(r,\theta,\phi)\,dV = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r-R)\,r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi$$

ou

$$\begin{aligned}
\int_V \varrho(r,\theta,\phi)\,dV &= \frac{Q}{4\pi R^2}\overbrace{\int_0^\infty r^2\delta(r-R)dr}^{R^2}\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{Q}{4\pi R^2}R^2\left[-\cos\theta\right]_0^\pi\left[\phi\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{Q}{4\pi}\left[-(-1)-(-1)\right]\left[2\pi\right] \\
&= \frac{Q}{2}2 \\
\int_V \varrho(r,\theta,\phi)\,dV &= Q
\end{aligned}$$

que é a carga total, como deve ser.

Aqui você poderia questionar por que razão a densidade de cargas não é

$$\varrho(r,\theta,\phi) = \frac{Q}{4\pi r^2}\delta(r-R)$$

ao invés daquela que foi escrita, isto é,

$$\varrho(r,\theta,\phi) = \frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r-R)$$

A explicação vem do fato de que o fator

$$\frac{Q}{4\pi R^2}$$

é a densidade superficial de carga sobre a superfície da esfera, e assim, a densidade ϱ, que é volumétrica, pode ser obtida da superficial através da sua multiplicação pela função delta apropriada, que "força" a carga a estar sobre a superfície da esfera, isto é,

$$\varrho(r,\theta,\phi) = \sigma(\theta,\phi)\delta(r-R)$$

b) Um anel de cargas de raio R no plano xy, com uma carga Q distribuída de forma homogênea sobre ele.

Para este problema, podemos utilizar as coordenadas cilíndricas ou esféricas. A carga está distribuída sobre o anel de forma homogênea, a uma distância R da origem. A densidade linear de cargas é

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$

e, estando o anel no plano xy, $z = 0$, e a densidade volumétrica fica

$$\varrho(\rho, \theta, z) = \lambda\delta(\rho - R)\delta(z)$$

ou

$$\varrho(\rho, \theta, z) = \frac{Q}{2\pi R}\delta(\rho - R)\delta(z) \tag{4.48}$$

Vamos verificar esta expressão, integrando-a sobre todo o espaço, o que deve resultar na carga total Q, ou seja,

$$\int_V \varrho(r, \theta, z)\, dV = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{Q}{2\pi R}\delta(\rho - R)\, \rho d\rho d\theta dz$$

ou

$$\begin{aligned}
\int_V \varrho(r, \theta, z)\, dV &= \frac{Q}{2\pi R} \overbrace{\int_0^\infty \rho\delta(\rho - R)d\rho}^{R} \int_0^{2\pi} d\theta \overbrace{\int_{-\infty}^\infty \delta(z)dz}^{1} \\
&= \frac{Q}{2\pi R} R\big[\theta\big]_0^{2\pi} \\
\int_V \varrho(r, \theta, z)\, dV &= \frac{Q}{2\pi} 2\pi
\end{aligned}$$

e então,

$$\int_V \varrho(r, \theta, z)\, dV = Q$$

Se quisermos usar coordenadas esféricas, devemos lembrar que o plano xy corresponde a $\theta = \frac{\pi}{2}$, e assim obtemos, para a densidade de cargas,

$$\varrho(r, \theta, \phi) = \lambda\delta(r - R)\frac{\delta(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2})}{R}$$

ou seja,

$$\varrho(r, \theta, \phi) = \frac{Q}{2\pi R^2}\delta(r - R)\delta(\cos\theta) \tag{4.49}$$

Note que o fator R extra aparece para que a densidade tenha dimensão de carga por unidade de volume. Novamente podemos verificar se esta expressão está correta, mediante a sua integração em todo o espaço, o que resulta em

$$\int_V \varrho(r, \theta, \phi)\, dV = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi R^2}\delta(r - R)\delta(\cos\theta)\, r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi$$

ou

$$\begin{aligned}
\int_V \varrho(r, \theta, \phi)\, dV &= -\frac{Q}{2\pi R^2}\overbrace{\int_0^\infty r^2\delta(r - R)dr}^{R^2}\int_1^{-1}\delta(\cos\theta)d(\cos\theta)\int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{Q}{2\pi R^2}R^2\overbrace{\int_{-1}^{1}\delta(\cos\theta)d(\cos\theta)}^{1}\left[\phi\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{Q}{2\pi}2\pi \\
\int_V \varrho(r, \theta, \phi)\, dV &= Q
\end{aligned}$$

E assim, comprovamos que a densidade de carga está correta.

c) Um disco de raio R com uma carga total Q distribuída de forma homogênea sobre sua superfície, situado no plano xy.

A carga Q está distribuída sobre toda a área do disco, e assim, existe uma densidade superficial

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

O disco está no plano xy, e assim, a densidade fica

$$\varrho(\rho, \theta, z) = \sigma\delta(z - 0)$$

ou

$$\varrho(\rho, \theta, z) = \frac{Q}{\pi R^2}\delta(z)$$

Fazendo a verificação por meio da integração sobre o disco, temos

$$\int_V \varrho(\rho, \theta, z)\, dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q}{\pi R^2}\delta(z)\, \rho d\rho d\theta dz$$

ou

$$\begin{aligned}
\int_V \varrho(\rho, \theta, z)\, dV &= \frac{Q}{\pi R^2} \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) dz \\
&= \frac{Q}{\pi R^2} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) dz}^{1} \\
&= \frac{Q}{\pi R^2} \frac{R^2}{2} 2\pi \\
\int_V \varrho(\rho, \theta, z)\, dV &= Q
\end{aligned}$$

e o resultado da integral da densidade de cargas é a carga total, como deve ser. Em coordenadas esféricas, o disco está situado em $\theta = \frac{\pi}{2}$ e, como há cargas desde $r = 0$ até $r = R$, devemos dividir a função delta do ângulo θ por r, e não por R, como fizemos no caso do disco. Assim,

$$\varrho(r, \theta, \phi) = \sigma \frac{\delta(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2})}{r}$$

ou seja,

$$\varrho(r, \theta, \phi) = \frac{Q}{\pi R^2 r}\delta(\cos\theta)$$

Novamente fazemos a integral sobre o disco, para fazer a verificação.

$$\begin{aligned}
\int_V \varrho(r, \theta, \phi)\, dV &= \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Q}{\pi R^2 r}\delta(\cos\theta)\, r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi \\
\int_V \varrho(r, \theta, \phi)\, dV &= \frac{Q}{\pi R^2} \int_0^R r dr \int_0^{\pi} \delta(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi
\end{aligned}$$

$$\int_V \varrho(r,\theta,\phi)\,dV = -\frac{Q}{\pi R^2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \int_1^{-1} \delta(\cos\theta)d(\cos\theta)\left[\phi\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{Q}{\pi R^2}\frac{R^2}{2}\overbrace{\int_{-1}^{1} \delta(\cos\theta)d(\cos\theta)}^{1}\,2\pi$$

$$\int_V \varrho(r,\theta,\phi)\,dV = Q$$

Obtemos como resultado que a integral da densidade de cargas fornece a carga total, como deve ser.

d) Um fio de tamanho L, com uma carga Q distribuída de forma homogênea sobre ele, situado no eixo z.

Vamos considerar que o fio se estende de $z = 0$ até $z = L$. Sobre ele existe uma densidade linear de carga dada por

$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

A parte positiva do eixo z corresponde, em coordenadas esféricas, a $\theta = 0$, o que dá origem à função delta $\delta(\cos\theta - \cos 0)$. Como existem cargas sobre todo o fio, e como a densidade linear definida acima tem dimensão de carga por unidade de comprimento, precisamos dividir a função delta por r^2, para corrigir a dimensão, e por um fator 2π, para compensar a integral em ϕ, isto é,

$$\varrho(r,\theta,\phi) = \lambda\frac{\delta(\cos\theta - \cos 0)}{2\pi r^2}$$

ou

$$\varrho(r,\theta,\phi) = \frac{Q}{L}\frac{1}{2\pi r^2}\delta(\cos\theta - 1) \tag{4.50}$$

Fazemos a verificação, integrando esta expressão sobre o fio, ou seja,

$$\int_V \varrho(r,\theta,\phi)dV = \int_0^L \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{Q}{L}\frac{1}{2\pi r^2}\delta(\cos\theta - 1)\, r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi$$

ou

$$\int_V \varrho(r,\theta,\phi)dV = \frac{Q}{2\pi L}\int_0^L dr \int_0^\pi \delta(\cos\theta - 1)\operatorname{sen}\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\int_V \varrho(r,\theta,\phi)dV = -\frac{Q}{2\pi L}\left[r\right]_0^L \int_1^{-1} \delta(\cos\theta - 1)d(\cos\theta)\left[\phi\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{Q}{2\pi L}L \overbrace{\int_{-1}^{1} \delta(\cos\theta - 1)d(\cos\theta)}^{1}\, 2\pi$$

$$\int_V \varrho(r,\theta,\phi)dV = Q$$

que resulta na carga total do fio, como é necessário. Se o fio estivesse estendido de $z = 0$ até $z = -L$, no lado negativo do eixo z, o que corresponde a $\theta = \pi$, a densidade de cargas ficaria

$$\varrho(r,\theta,\phi) = \frac{Q}{L}\frac{1}{2\pi r^2}\delta(\cos\theta - \cos\pi) = \frac{Q}{L}\frac{1}{2\pi r^2}\delta(\cos\theta + 1) \tag{4.51}$$

Concluímos, das expressões acima, que nem sempre é fácil perceber como escrever uma distribuição contínua de cargas em termos de funções delta de Dirac. É um processo muitas vezes baseado em tentativa e erro, mas é preciso ter em mente que a densidade deve ter dimensão de carga por unidade de volume e que a sua integral deve resultar na carga total contida no objeto.

4.8 Mãos à Obra: Lei de Gauss e Blindagem Elétrica

Nos exemplos 4.8, letra b, e 4.10, tratamos de situações envolvendo a lei de Gauss e a blindagem elétrica provocada por um condutor metálico qualquer dentro do seu interior. De fato, mesmo que o condutor tenha duas superfícies, uma interna e outra externa, a carga ficará localizada apenas na superfície externa, como mostra o exercício 4.4. Isto pode ser comprovado através de duas experiências bastante simples, descritas a seguir.

4.8.1 Recipiente Metálico e Lei de Gauss

Na montagem desta experiência, você vai precisar do seguinte.

1. Um pêndulo eletrostático, como o montado na seção 3.4.1, ou um eletroscópio, como aquele montado na seção 3.4.2.

2. Um recipiente metálico, como uma caneca, lata ou leiteira. Quanto mais fundo for o recipiente, melhor.
3. Um pedaço de isopor, para servir como base isolante para o recipiente acima.
4. Uma bolinha de isopor.
5. Papel de seda.
6. Fita adesiva.
7. Papel-alumínio.
8. Um palito de madeira.
9. Um bastão de vidro, pente de plástico ou qualquer corpo que possa ser atritado.
10. Um pedaço de seda, lã ou algodão, para atritar o material mencionado no item anterior.

A montagem desta experiência é apresentada na figura 4.24. Você deve colocar o recipiente metálico sobre o pedaço de isopor, que irá servir como base isolante, impedindo que a carga transferida para o recipiente seja perdida. Nas superfícies interna e externa do recipiente, fixe tiras de papel de seda, como mostra a figura. Depois, eletrize o pente ou o bastão e toque o recipiente metálico, repetindo esse processo várias vezes para que o recipiente adquira uma carga apreciável. Em cada uma dessas operações, aproxime o eletroscópio ou o pêndulo eletrostático do recipiente, para verificar se ele está eletrizado. Faça isso nas partes interna e externa do corpo.

Após carregar o recipiente, observe o que acontece com os papéis de seda fixados nas suas superfícies interna e externa. Aproxime o eletroscópio da parede externa do recipiente, em vários pontos diferentes ao redor desta superfície, procurando manter uma mesma distância dele. Verifique se em todos os lugares o comportamento do eletroscópio ou do pêndulo eletrostático é o mesmo, ou seja, se a carga se espalha de forma homogênea sobre a superfície metálica.

Fixe a bolinha de isopor na ponta do palito de madeira e enrole o papel-alumínio sobre ela. Toque com a bolinha a parte interna do recipiente e verifique se ela ficou eletrizada aproximando-a do eletroscópio ou do pêndulo eletrostático. Faça o mesmo, tocando agora a parte externa do recipiente.

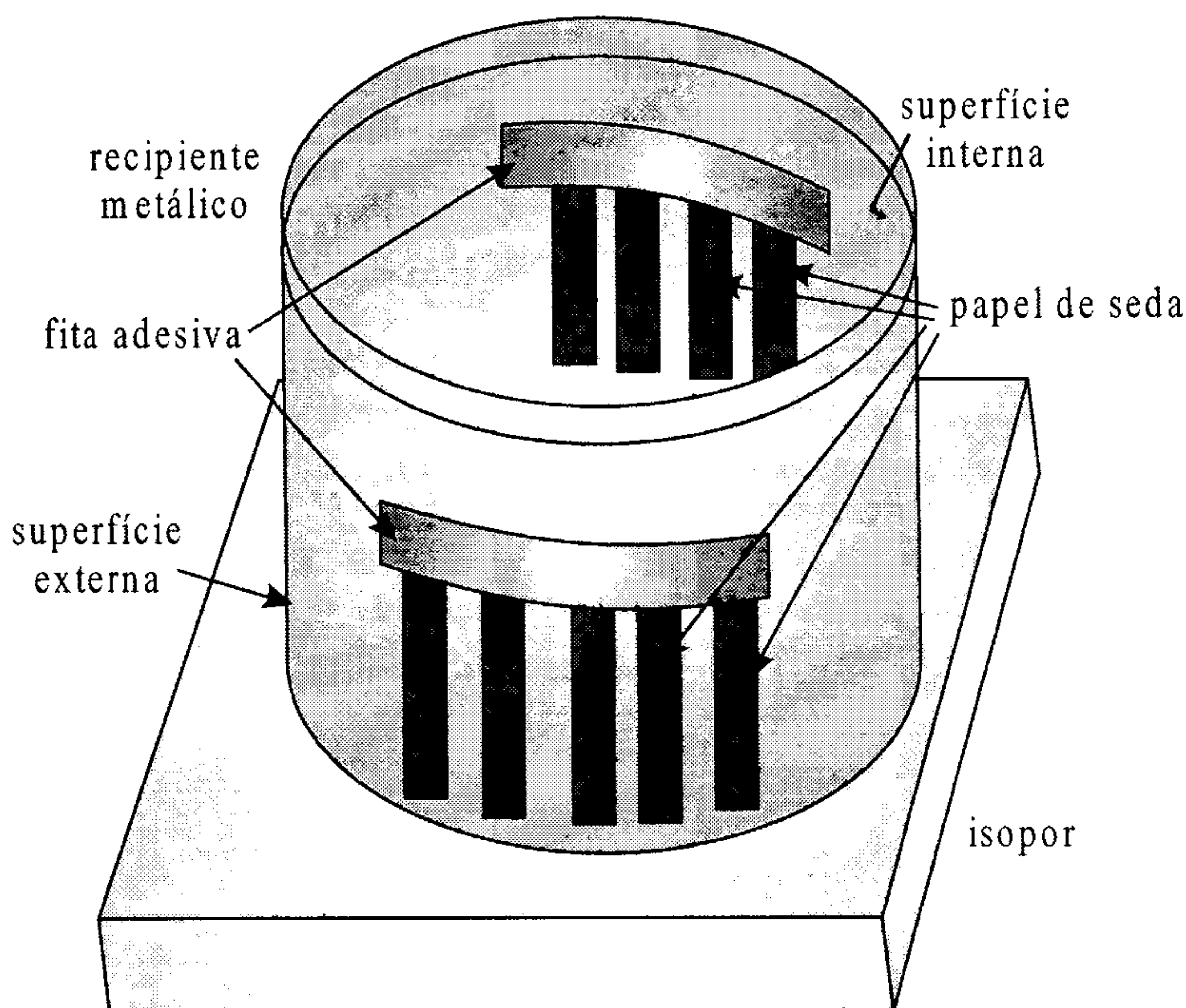



Figura 4.24: Esquema da experiência da caneca metálica.

Estando a bolinha eletrizada depois de tocar o recipiente, ligue a caneca à Terra ou toque-a com o dedo. Com isso, ela se descarregará. Verifique este fato mediante a utilização do eletroscópio ou do pêndulo eletrostático.

Aproxime o pêndulo eletrostático ou o eletroscópio da parede externa do recipiente descarregado e introduza vagarosamente a bolinha carregada dentro da caneca. Verifique o que ocorre com o pêndulo eletrostático ou com o eletroscópio. Depois de todas essas experiências, responda ao seguinte.

- Determine os sinais das cargas de todos os materiais utilizados. Utilize a série triboelétrica, se for necessário.

- O que acontece com os papéis de seda fixados na superfície interna e externa do recipiente? Por quê?

- Existe diferença no comportamento dos papéis quando a caneca tem carga positiva ou negativa?

- Existe carga nas superfícies interna e externa? Ela está distribuída igualmente ou se localiza apenas em certas regiões? Explique a sua resposta.
- O que ocorre quando você introduz a bolinha de isopor carregada no recipiente? Por quê?
- Baseado nesta experiência, você pode explicar por que é seguro ficar dentro de um carro numa tempestade com raios?
- Se você realizasse as experiências com um recipiente plástico, o que mudaria nos vários experimentos? Responda de forma teórica e experimental. Seria um carro de plástico seguro numa tempestade?

4.8.2 Peneiras e Blindagem Elétrica

Para esta experiência você vai precisar do seguinte.

1. Uma peneira ou coador de plástico.
2. Uma peneira ou coador de metal, maior que a de plástico.
3. Um bastão de vidro, pente ou outro material para ser eletrizado.
4. Um pano de seda, algodão ou lã, ou qualquer outro material para ser atritado com o material do item anterior.
5. Papel.
6. Um eletroscópio ou pêndulo eletrostático.

Esta experiência é bastante simples. Atrite os materiais de forma a carregar o bastão ou o pente. Pique o papel em pedacinhos pequenos e os coloque sobre uma superfície qualquer. Aproxime o pente carregado dos papéis e observe o que ocorre.

Coloque a peneira de plástico sobre os papéis e aproxime o pente da peneira. Se for necessário, eletrize novamente o pente. Anote o que ocorre com os papéis.

Mantendo a peneira plástica sobre os papéis, coloque agora a peneira metálica sobre a peneira plástica e aproxime novamente o pente eletrizado da peneira metálica. Verifique o que acontece com os papéis.

Retire a peneira metálica e aproxime novamente o pente da peneira plástica. Depois, sem retirar o pente de perto da peneira plástica, ponha a peneira metálica entre o pente e a peneira plástica, e anote o que ocorre.

Se for possível, repita a experiência, colocando um eletroscópio ou um pêndulo eletrostático no lugar dos papéis. Depois, responda ao seguinte.

- Verifique os sinais das cargas nos corpos.
- O que ocorre com os papéis quando você aproxima o pente? Explique detalhadamente.
- O que acontece com os papéis quando você coloca a peneira plástica sobre eles e aproxima o pente? Por quê? A peneira plástica age como uma blindagem elétrica?
- Quando você aproxima o pente da peneira metálica que está sobre a peneira plástica, o que acontece com os papéis? Existe agora uma blindagem elétrica? Por quê?
- Quando você põe a peneira metálica entre o pente e a peneira plástica, o que ocorre com os papéis, e por quê?
- Responda aos itens anteriores considerando a situação em que você substitui o papel pelo eletroscópio ou pelo pêndulo eletrostático.
- Você quer fazer uma experiência elétrica num ponto A, e existe uma carga Q num ponto B próximo a A que influencia a experiência em A, prejudicando-a. Para livrar-se do inconveniente, você dispõe de uma cúpula metálica e uma cúpula plástica, que podem envolver completamente os pontos A ou B. Como você deve proceder para realizar a experiência sem que haja interferências externas?

4.9 Exercícios

4.1 Calcule o campo elétrico gerado por uma chapa metálica quadrada de lado ℓ, com uma carga Q distribuída de forma homogênea sobre a sua superfície. Estude os limites em que a chapa é semi-infinita e infinita.

4.2 Um retângulo formado por cargas Q, $-Q$, $2Q$ e Q situadas nos vértices, nesta ordem, tem lados $a = 10$ cm e $b = 5$ cm. Sabendo que $Q = 1,2\ \mu$C, ache o campo elétrico sobre cada uma das cargas e também no centro do retângulo.

4.3 Obtenha a lei de Gauss na forma diferencial para o campo gravitacional.

4.4 Verifique, utilizando a lei de Gauss, que toda a carga num condutor que tem uma superfície interna e outra externa está distribuída sobre a superfície externa.

4.5 Um cubo de lado a tem cargas Q situadas nos seus vértices. Escreva a densidade de cargas em termos de funções delta de Dirac, confira explicitamente se a expressão encontrada está correta e calcule o momento de dipolo dessa configuração.

4.6 Uma esfera de raio R tem uma carga Q distribuída de modo que a densidade aumenta de forma linear com a distância ao centro. Calcule o campo elétrico dentro e fora dessa esfera.

4.7 Considere três placas infinitas paralelas com densidades superficiais de carga σ, -2σ e 3σ, respectivamente. Quais são os campos elétricos nas várias regiões do espaço definidas por elas?

4.8 Uma esfera de raio R possui uma carga Q distribuída sobre seu volume. Compare o campo elétrico produzido por ela com o campo de uma esfera de raio R, metálica, contendo a mesma carga Q.

4.9 Verifique se o campo elétrico do dipolo satisfaz a primeira lei de Maxwell da Eletrostática na forma diferencial.

4.10 Um cilindro de raio R muito comprido tem uma carga Q distribuída de acordo com a expressão $\varrho = \varrho_0\left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right)$, onde ϱ é a densidade volumétrica de carga, ϱ_0 e α são constantes e ρ é a coordenada cilíndrica que mede a distância de um ponto ao eixo no plano xy. Calcule o campo elétrico produzido por esse cilindro a uma distância d do eixo.

Capítulo 5

Potenciais Elétricos, I: Conceitos Fundamentais

No capítulo 3, vimos a força elétrica entre duas cargas elétricas, expressa a partir da lei de Coulomb. Essa força é uma das quatro forças fundamentais da natureza, e é importante saber se ela é conservativa ou não [1]. Se for conservativa, ela possui uma série de propriedades relevantes, e a principal delas é que podemos definir uma *energia potencial* associada à força elétrica. Do ponto de vista matemático, quando uma força é conservativa, ela é irrotacional, fato que pode ser usado para verificar esta propriedade da força. Fazemos isso a seguir.

5.1 Energia Potencial Elétrica e Força Elétrica

Para podermos definir uma energia potencial elétrica associada à força elétrica, precisamos antes saber se a força elétrica é conservativa, e isso pode ser verificado de várias formas. Uma forma matemática consiste em calcular o rotacional dessa força, de modo que, se ela for conservativa, o rotacional deve se anular.

A força elétrica entre duas cargas é dada pela expressão 3.1,

---

[1] Sob o ponto de vista mecânico, é claro. Todas as forças são conservativas de um ponto de vista geral, já que a energia, como um todo, sempre se conserva.

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

Vamos calcular $\nabla \times \vec{F}$.

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times \left[\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right]$$

ou

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right]$$

e então precisamos calcular o rotacional do termo entre colchetes. Em coordenadas retangulares, temos

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \\
\vec{r}\,' &= x'\,\hat{\mathbf{i}} + y'\,\hat{\mathbf{j}} + z'\,\hat{\mathbf{k}} \\
\vec{r} - \vec{r}\,' &= (x - x')\,\hat{\mathbf{i}} + (y - y')\,\hat{\mathbf{j}} + (z - z')\,\hat{\mathbf{k}} \\
|\vec{r} - \vec{r}\,'| &\doteq \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \\
|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3 &= \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right]^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

O operador ∇ em coordenadas retangulares, obtido através da equação 1.50, é

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}$$

e o rotacional fica, utilizando esta expressão para o operador ∇,

$$\nabla \times \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right] =$$

$$\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] \times \left\{ \frac{(x - x')\,\hat{\mathbf{i}} + (y - y')\,\hat{\mathbf{j}} + (z - z')\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

Para simplificar, definimos

$$X = x - x' \qquad Y = y - y' \qquad Z = z - z'$$

e assim,

$$\nabla \times \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{Y}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$+ \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{Z}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} + \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \frac{X}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$+ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \frac{Z}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} + \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ \frac{X}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$+ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ \frac{Y}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

Vamos calcular cada um dos termos separadamente.

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{Y}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} = \hat{\mathbf{k}} \frac{Y}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2 \right]^{\frac{5}{2}}} 2X \left(-\frac{3}{2} \right)$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{Y}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} = -\frac{3XY\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2 \right]^{\frac{5}{2}}}$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{Z}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} = -\hat{\mathbf{j}} \frac{Z}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2 \right]^{\frac{5}{2}}} 2X \left(-\frac{3}{2} \right)$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{Z}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} = \frac{3XZ\,\hat{\mathbf{j}}}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2 \right]^{\frac{5}{2}}}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \frac{X}{\left[X^2+Y^2+Z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} = -\hat{\mathbf{k}} \frac{X}{\left[X^2+Y^2+Z^2\right]^{\frac{5}{2}}} 2Y\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \frac{X}{\left[X^2+Y^2+Z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} = \frac{3XY\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[X^2+Y^2+Z^2\right]^{\frac{5}{2}}}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \frac{Z}{\left[X^2+Y^2+Z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} = \hat{\mathbf{i}} \frac{Z}{\left[X^2+Y^2+Z^2\right]^{\frac{5}{2}}} 2Y\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \frac{Z}{\left[X^2+Y^2+Z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} = -\frac{3YZ\,\hat{\mathbf{i}}}{\left[X^2+Y^2+Z^2\right]^{\frac{5}{2}}}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ \frac{X}{\left[X^2+Y^2+Z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} = \hat{\mathbf{j}} \frac{X}{\left[X^2+Y^2+Z^2\right]^{\frac{5}{2}}} 2Z\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ \frac{X}{\left[X^2+Y^2+Z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} = -\frac{3XZ\,\hat{\mathbf{j}}}{\left[X^2+Y^2+Z^2\right]^{\frac{5}{2}}}$$

e finalmente,

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ \frac{Y}{\left[X^2+Y^2+Z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} = -\hat{\mathbf{i}} \frac{Y}{\left[X^2+Y^2+Z^2\right]^{\frac{5}{2}}} 2Z\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ \frac{Y}{\left[X^2+Y^2+Z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} = \frac{3YZ\,\hat{\mathbf{i}}}{\left[X^2+Y^2+Z^2\right]^{\frac{5}{2}}}$$

Reunindo todas as expressões acima, obtemos

$$\nabla \times \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\right] = -\frac{3XY\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2\right]^{\frac{5}{2}}} + \frac{3XZ\,\hat{\mathbf{j}}}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2\right]^{\frac{5}{2}}} + \frac{3XY\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2\right]^{\frac{5}{2}}} - \frac{3YZ\,\hat{\mathbf{i}}}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2\right]^{\frac{5}{2}}} - \frac{3XZ\,\hat{\mathbf{j}}}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2\right]^{\frac{5}{2}}} + \frac{3YZ\,\hat{\mathbf{i}}}{\left[X^2 + Y^2 + Z^2\right]^{\frac{5}{2}}}$$

ou seja,

$$\nabla \times \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\right] = 0$$

e portanto,

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\right]$$

$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

e observamos que a força elétrica é conservativa. Outro modo de verificar isto, agora de um ponto de vista mais físico, é calcular o trabalho realizado pela força elétrica ao levar uma carga de um ponto a outro, em equilíbrio e sob a ação de uma segunda carga, e ver se ele independe da trajetória descrita pela carga. O trabalho W realizado por uma força $\vec{F}$ qualquer ao longo de uma curva C é dado por

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \tag{5.1}$$

Considerando uma carga Q na origem, temos $\vec{r}' = 0$. A força elétrica sobre uma carga q situada a uma distância r é

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

O elemento de arco em esféricas é dado pela equação 1.48,

$$d\vec{\ell} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r \operatorname{sen}\theta d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

e portanto, o trabalho realizado pela força elétrica ao levar a carga q, em equilíbrio e sob a ação de uma outra carga Q, de uma posição $\vec{r}_i$ inicial até uma posição $\vec{r}_f$ final é

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_C \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \left(dr\,\hat{\mathbf{r}} + r d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r \operatorname{sen}\theta d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \\ &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \frac{1}{r^2}\, dr \\ &= -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right)_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \\ W &= -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right] \end{aligned} \tag{5.2}$$

A integral acima independe do caminho C percorrido pela carga. Ela depende apenas dos pontos inicial e final da trajetória. Além disso, se o ponto final coincide com o inicial, o trabalho realizado é nulo. Estas duas características são particulares às forças conservativas, e portanto, a força elétrica é conservativa.

Sendo a força elétrica conservativa, é possível definir uma energia potencial elétrica associada a ela. Essa energia potencial elétrica está relacionada ao trabalho calculado acima, da seguinte forma. O trabalho realizado pela força elétrica no deslocamento da carga é feito à custa de uma variação contrária na energia potencial interna U do sistema isolado formado pelas duas cargas. Isto significa que $W = -\Delta U = -(U_f - U_i)$, e assim,

$$\Delta U = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right] \tag{5.3}$$

Aqui é interessante destacar que a carga, durante seu deslocamento da posição inicial $\vec{r}_i$ até a posição final $\vec{r}_f$, está sob a ação de duas forças. Uma delas é a força elétrica conservativa, interna ao sistema de duas cargas, cujo trabalho realizado calculamos acima. Essa força tem uma energia potencial elétrica associada. A outra é a força externa, responsável por manter a carga em equilíbrio durante o movimento, que anula perfeitamente a força elétrica. Essa força externa é produzida por algum agente desconhecido e irrelevante ao problema, e ela pode ser conservativa ou não. O trabalho realizado por ela é idêntico àquele produzido pela força elétrica, mas com sinal trocado.

Entretanto, como não conhecemos a natureza específica da força externa, não podemos associar a ela uma energia potencial.

Note que, se as duas cargas têm o mesmo sinal, quando elas se afastam uma da outra, a energia potencial elétrica diminui, pois $r_f > r_i$ e $\frac{1}{r_f} < \frac{1}{r_i}$. Quando elas se aproximam, a energia potencial aumenta. Já quando as cargas têm sinais contrários, a energia potencial aumenta quando elas se afastam e diminui quando elas se aproximam. Além disso, como todo tipo de energia, a energia potencial elétrica é medida em joules (J) no SI.

A equação 5.3 dá a variação de energia potencial elétrica, mas é comum estabelecer uma posição de referência na qual a energia potencial é tomada como sendo nula. Em geral, essa referência é considerada em $r_i \to \infty$, e assim, a energia potencial elétrica de um sistema de duas cargas separadas por uma distância $\vec{r}$ fica

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r} \tag{5.4}$$

e se nenhuma das cargas está na origem, a expressão mais geral torna-se

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{5.5}$$

sendo $\vec{r}$ a posição da carga q, e $\vec{r}\,'$, a posição da carga Q. Ao trazermos uma terceira carga Q' para perto das outras duas, a energia potencial do sistema aumenta de

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q'Q}{|\vec{r}\,'' - \vec{r}\,'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ'}{|\vec{r}\,'' - \vec{r}|}$$
$$U = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{|\vec{r}\,'' - \vec{r}\,'|} + \frac{q}{|\vec{r}\,'' - \vec{r}|}\right]$$

onde $\vec{r}\,''$ é a posição da carga Q'. Assim, quando temos várias cargas pontuais Q_i situadas em posições $\vec{r}_i$, ao trazermos uma carga q para a posição $\vec{r}$ perto das outras cargas, a energia potencial aumenta de

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} + \cdots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|}$$
$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \tag{5.6}$$

e quando a carga está distribuída num volume V, com uma densidade de carga $\rho(\vec{r}\,')$, a soma acima torna-se uma integral, de modo que a variação de energia potencial elétrica se torna

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV \tag{5.7}$$

A força elétrica é dada pela expressão 3.2,

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV$$

e esperamos que a força elétrica que age sobre a carga q, gerada pelas outras cargas, e a variação de energia potencial elétrica, causada pelo deslocamento da carga q desde a referência até a posição $\vec{r}$ próxima às outras cargas, estejam relacionadas através de

$$\vec{F} = -\nabla U \tag{5.8}$$

que é uma equação válida para todas as forças conservativas. Fazemos a verificação, calculando o gradiente de U.

$$\begin{aligned}
\nabla U &= \nabla\left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV\right] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \nabla\left[\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]dV \\
\nabla U &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]dV
\end{aligned}$$

Precisamos calcular o gradiente do colchetes acima. Vamos chamar

$$\begin{aligned}
\vec{r}-\vec{r}\,' &= X\,\hat{\mathbf{i}} + Y\,\hat{\mathbf{j}} + Z\,\hat{\mathbf{k}} \\
|\vec{r}-\vec{r}\,'| &= \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}
\end{aligned}$$

e assim,

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial X} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial Y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial Z}\right]\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

ou

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial X}\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial Y}\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial Z}\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

Calculando cada um dos termos separadamente, temos

$$\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial X}\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} = \hat{\mathbf{i}}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}2X$$

$$\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial X}\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} = -\frac{X\hat{\mathbf{i}}}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

para o primeiro termo,

$$\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial Y}\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} = \hat{\mathbf{j}}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}2Y$$

$$\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial Y}\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} = -\frac{Y\hat{\mathbf{j}}}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

para o segundo termo, e

$$\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial Z}\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} = \hat{\mathbf{k}}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}2Z$$

$$\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial Z}\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} = -\frac{Z\hat{\mathbf{k}}}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

para o terceiro. Portanto,

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = -\frac{X\hat{\mathbf{i}}}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Y\hat{\mathbf{j}}}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Z\hat{\mathbf{k}}}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = -\frac{X\,\hat{\mathbf{i}}+Y\,\hat{\mathbf{j}}+Z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left(X^2+Y^2+Z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \tag{5.9}$$

e voltando à energia potencial, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla U &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] dV \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\left[-\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right] dV \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dV \\
\nabla U &= -\vec{F}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\vec{F} = -\nabla U$$

o que concorda com a equação 5.8.

É preciso destacar que a energia potencial elétrica total $\mathbb{U}$ do sistema de n cargas Q_i, nas posições $\vec{r}_i$, é a energia potencial que corresponde a reunir todas as n cargas umas próximas às outras, e que ela é uma grandeza diferente da variação de energia potencial elétrica U.

Para entender isto, vejamos o que ocorre quando temos um sistema formado por três cargas. O trabalho W_1 realizado pela força elétrica para trazer a primeira carga Q_1 para a posição $\vec{r}_1$ é nulo, pois não há inicialmente nenhuma carga e nenhuma força elétrica. Depois que essa carga está no seu lugar, ao trazermos a carga Q_2 para a posição $\vec{r}_2$, a força elétrica de Q_1 sobre Q_2 realiza um trabalho W_2, dado pela expressão 5.2, ou seja,

$$W_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}$$

Quando a segunda carga está no seu lugar, trazemos a carga Q_3 para a posição $\vec{r}_3$, sob a ação das forças elétricas geradas por Q_1 e Q_2, o que produz o trabalho

$$W_3 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_3}{|\vec{r}_3-\vec{r}_1|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2Q_3}{|\vec{r}_3-\vec{r}_2|}$$

e assim, o trabalho total realizado para reunir as três cargas nas posições $\vec{r}_i$ é a soma dos trabalhos parciais, ou seja,

$$\begin{aligned}
W &= W_1 + W_2 + W_3 \\
&= 0 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2Q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \\
W &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2Q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}
\end{aligned}$$

Como o trabalho total realizado é feito à custa de uma variação oposta na energia potencial, a energia potencial total do sistema formado pela reunião das três cargas é

$$\begin{aligned}
\mathbb{U} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2Q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \\
\mathbb{U} &= U_{Q_1,Q_2} + U_{Q_2,Q_3} + U_{Q_1,Q_3}
\end{aligned}$$

que é a soma das energias potenciais de todos os pares de cargas.

Portanto, a energia potencial total de um sistema de n cargas é obtida mediante a soma da equação 5.5 sobre todas as possíveis combinações envolvendo pares de cargas, isto é,

$$\begin{aligned}
\mathbb{U} &= U_{1,2} + U_{1,3} + U_{2,3} + \cdots + U_{n,n-1} \\
\mathbb{U} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2Q_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \cdots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_{n-1}Q_n}{|\vec{r}_n - \vec{r}_{n-1}|}
\end{aligned}$$

ou

$$\mathbb{U} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_iQ_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Note que é preciso excluir da somatória termos que envolvem a interação da carga com ela mesma, do tipo

$$U_{i,i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_iQ_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_i|}$$

pois eles resultam numa contribuição infinita para a energia potencial. A somatória pode ser escrita numa forma mais simétrica, se lembrarmos que

$$U_{i,j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_iQ_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

$$
\begin{aligned}
U_{i,j} &= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_iQ_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}+\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_iQ_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_iQ_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}+\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_jQ_i}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|}\\
U_{i,j} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_iQ_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_jQ_i}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|}\right]
\end{aligned}
$$

e assim, a somatória agora pode ir desde 1 até n nos dois sinais de somatória, com a observação de que o caso $i=j$ deve ser excluído:

$$
\mathbb{U}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_iQ_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|} \tag{5.10}
$$

Note que a força que age sobre uma dada carga q em presença de outras cargas Q_i é obtida através de $\vec{F}=-\nabla U_Q$, onde U_Q é a energia potencial dada por uma das equações 5.5, 5.6 ou 5.7, e não a energia potencial elétrica total $\mathbb{U}$, pois em $\mathbb{U}$ estão combinadas todas as energias potenciais de todas as cargas, não aquelas referentes apenas a q e as Q_i. Este é um cuidado que deve ser tomado, pois de outro modo, corremos o risco de encontrar expressões totalmente erradas para a força elétrica sobre uma carga q. Voltaremos a tratar da energia potencial elétrica após a definição do potencial elétrico.

5.2 Potencial Elétrico

No capítulo anterior, definimos operacionalmente o campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}$ de uma carga, através da equação 4.1,

$$
\vec{\mathcal{E}}=\lim_{q_p\to 0}\frac{\vec{F}_P}{q_p}
$$

e com isso, ficamos independentes da carga de prova q_p. Da mesma forma, podemos definir uma grandeza chamada *potencial elétrico* $\mathbb{V}$, que é dada por

$$
\mathbb{V}=\lim_{q_p\to 0}\frac{U_p}{q_p} \tag{5.11}
$$

onde U_p é a energia potencial elétrica envolvendo a carga de prova q_p e as cargas geradoras Q_i, que podem ser discretas ou então formar uma distribuição

contínua de cargas com uma densidade ρ. Assim, utilizando a expressão 5.7 obtemos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV \tag{5.12}$$

O potencial elétrico é uma propriedade característica das cargas geradoras apenas, como é o campo elétrico. A unidade do potencial elétrico é o J/C, que recebeu o nome de volt (V) em homenagem a Alessandro Volta (1745-1827), inventor da pilha voltaica. Quando temos cargas pontuais, o potencial elétrico gerado por elas num ponto situado numa posição $\vec{r}$ é obtido através da equação 5.6, dividida pela carga q, ou seja

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \tag{5.13}$$

Note que o potencial elétrico gerado por uma única carga situada na posição $\vec{r}'$ é dado por

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{5.14}$$

Esse potencial é positivo se a carga é positiva, e negativo se a carga é negativa. O aumento de energia potencial elétrica, ao aproximarmos uma carga q da distribuição de cargas discreta ou contínua que gera o potencial $\mathbb{V}$, é obtido através de

$$U = q\mathbb{V}$$

que pode ser positivo ou negativo, dependendo da carga q. Se $\mathbb{V}$ for positivo, a energia potencial U será positiva se a carga de prova q for positiva; e ela será negativa se a carga q for negativa. Isso é fácil de compreender se considerarmos uma única carga pontual positiva, que gera um potencial elétrico positivo, e se lembrarmos que cargas de mesmo sinal se repelem e que cargas de sinais contrários se atraem. Assim, o trabalho realizado pela força elétrica para trazer uma carga positiva q do infinito até a posição $\vec{r}$ é negativo, pois o deslocamento é oposto à força. Mas o trabalho realizado pela força elétrica é feito à custa de uma variação oposta na energia potencial, e assim, a energia potencial torna-se positiva. Já quando a carga de prova q é negativa, a força elétrica e o deslocamento estão no mesmo sentido, o trabalho é positivo e o aumento na energia potencial é negativo. Quando a carga geradora do

potencial é negativa, o trabalho é positivo se a carga de prova é positiva, e portanto, a energia potencial é negativa. O trabalho é negativo se a carga de prova é negativa, e assim, a energia potencial é positiva.

Alternativamente, podemos definir o potencial elétrico num ponto como sendo o trabalho realizado pela força externa ao trazer, em equilíbrio, uma carga de prova q situada no infinito para a posição $\vec{r}_q$, dividido pela carga de prova q, estando esta carga sob a ação das forças elétricas produzidas por cargas geradoras Q_i situadas nas posições $\vec{r}_i$, isto é,

$$\mathbb{V} = \frac{W_{ext}}{q}$$

Como o trabalho realizado pelas forças elétricas tem sinal contrário ao do trabalho externo, e como a variação da energia potencial elétrica tem sinal oposto ao do trabalho realizado pelas forças elétricas, há uma compensação de sinais, de modo que a equação acima é numericamente equivalente à expressão 5.11. Entretanto, esta última realça o fato de que o potencial elétrico está associado a uma energia potencial elétrica, a qual, por sua vez, só pode ser definida em virtude do fato de que a força elétrica é conservativa. O trabalho externo é produzido por alguma força que não é necessariamente conservativa, de forma que não podemos associar uma energia potencial a essa força. Assim, a definição 5.11 nos parece ser fisicamente mais coerente, principalmente quando comparada com o conceito de *força eletromotriz*, que será visto quando estudarmos correntes elétricas e fontes de força eletromotriz, no capítulo 12 (volume II).

A energia potencial elétrica total de um sistema de cargas é dada pela equação 5.10,

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_iQ_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}Q_i\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

A segunda somatória não envolve a carga Q_i, e se a compararmos com a expressão 5.13 para o potencial elétrico gerado na posição $\vec{r}$ por cargas Q_j situadas nas posições $\vec{r}_j$,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$$

vemos que podemos escrever

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \mathbb{V}_i(\vec{r}_i)$$

e assim, a energia potencial elétrica total fica

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i \mathbb{V}_i \tag{5.15}$$

se a distribuição de cargas for discreta. Quando as cargas estão distribuídas de forma contínua num volume V, a soma torna-se uma integral, ou seja,

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}\,') \mathbb{V}(\vec{r}\,')\, dV \tag{5.16}$$

sendo $\mathbb{V}$ o potencial elétrico gerado pela própria densidade de cargas ρ. Se as cargas estiverem sobre superfícies ou sobre linhas, devemos adaptar a equação acima a estas situações. Note que o volume (ou área, ou trajeto) de integração deve ser suficientemente grande para conter toda a densidade de cargas.

Um resultado muito importante da combinação entre as equações 4.1, 5.8 e 5.11 é que, se dividirmos a penúltima pela carga de prova q_p, temos

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\nabla U \\ \frac{\vec{F}}{q_p} &= -\nabla \left(\frac{U}{q_p} \right) \\ \vec{\mathcal{E}} &= -\nabla \mathbb{V} \end{aligned} \tag{5.17}$$

ou seja, o potencial e o campo elétrico estão relacionados através da expressão acima. Além disso, como o operador ∇ tem dimensão de inverso de comprimento (L^{-1}), o campo elétrico também pode ser medido, no SI, na unidade V/m. Assim como a força elétrica, o campo elétrico é conservativo, e desta forma,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = 0 \tag{5.18}$$

que é a segunda lei de Maxwell da Eletrostática, nos meios sem dielétricos, escrita na forma diferencial [2]. A forma integral desta equação também é muito importante, e para obtê-la, vamos considerar a expressão 5.17 e fazer o produto escalar dessa equação com o elemento de arco $d\vec{\ell}$, isto é,

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = -\nabla \mathbb{V} \cdot d\vec{\ell}$$

O produto escalar no lado direito resulta em

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbb{V} \cdot d\vec{\ell} &= \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial z}\right] \cdot (dx\ \hat{\mathbf{i}} + dy\ \hat{\mathbf{j}} + dz\ \hat{\mathbf{k}}) \\
&= \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial z}dz \\
\nabla \mathbb{V} \cdot d\vec{\ell} &= d\mathbb{V}
\end{aligned}$$

e assim, quando passamos o sinal negativo para o lado do campo elétrico, obtemos

$$-\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = d\mathbb{V} \tag{5.19}$$

Esta expressão permite que calculemos a diferença de potencial elétrico entre dois pontos quaisquer, bastando para isso integrá-la desde um ponto até o outro. Considerando um desses pontos como sendo um ponto de referência $\vec{r}_{\text{ref}}$, se quisermos o potencial num ponto $\vec{r}$, precisamos integrar esta equação desde o ponto de referência $\vec{r}_{\text{ref}}$ até o ponto $\vec{r}$ no qual queremos o potencial, ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} d\mathbb{V} &= -\int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} \\
\mathbb{V}(\vec{r}) - \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) &= -\int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}
\end{aligned}$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} \tag{5.20}$$

[2] Aqui é preciso destacar que o campo elétrico na Eletrostática é conservativo. Quando o campo elétrico depende do tempo, a equação 5.18 precisa ser corrigida, como veremos oportunamente.

que é a segunda lei de Maxwell da Eletrostática em meios sem dielétricos, escrita na forma diferencial. Através desta equação podemos calcular o potencial elétrico de uma distribuição de cargas, se conhecermos o campo elétrico gerado por ela. Se o ponto de referência for colocado no infinito, então, por convenção, $\mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}} \to \infty) = 0$, e assim, o potencial fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

A utilidade do potencial elétrico está no fato de que ele é uma grandeza escalar. Portanto, a soma de dois potenciais elétricos gerados por duas cargas é simplesmente uma soma algébrica, e não uma soma vetorial, como no caso do campo elétrico. Assim, como o potencial e o campo elétrico estão relacionados através da equação 5.17,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V}$$

para um dado problema específico pode ser muito mais simples calcular o potencial elétrico e depois extrair o campo elétrico através do gradiente do potencial. Vejamos agora alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 5.1. *Considere o triângulo equilátero de cargas definido no exercício 4.2.*

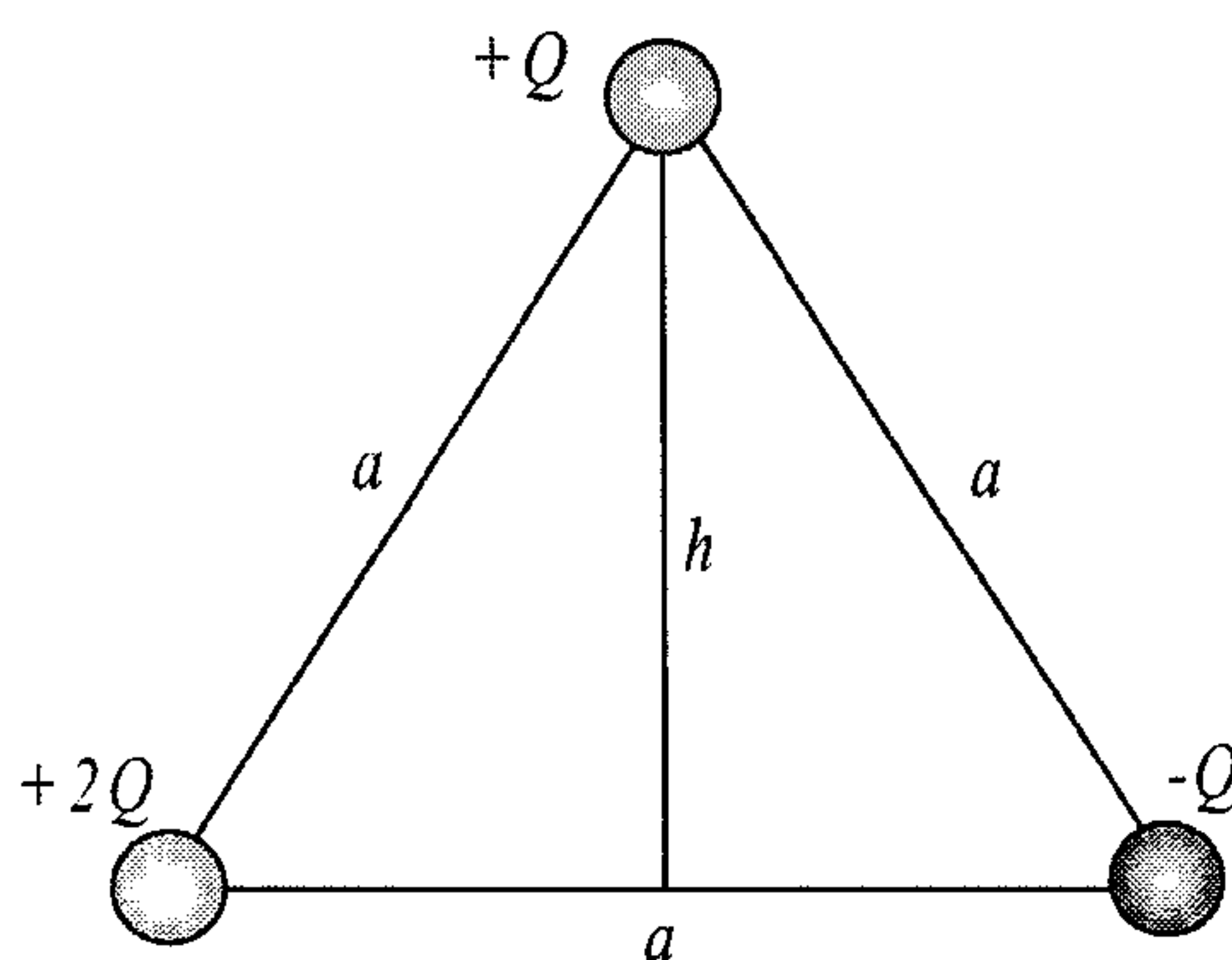



Figura 5.1: Um triângulo equilátero de lado a, formado por cargas $+Q$, $-Q$ e $+2Q$.

a) Calcule o potencial elétrico resultante sobre cada carga.

O potencial sobre cada carga é a soma dos potenciais gerados pelas outras duas cargas. Como a distância entre as cargas é a, o potencial é simplesmente

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{+Q} &= \mathbb{V}_{+2Q} + \mathbb{V}_{-Q}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Q}{a}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}(2-1)\\ \mathbb{V}_{+Q} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}, \qquad \text{sobre a carga } +Q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{-Q} &= \mathbb{V}_{+2Q} + \mathbb{V}_{+Q}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}(2+1)\\ \mathbb{V}_{-Q} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Q}{a}, \qquad \text{sobre a carga } -Q\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{+2Q} &= \mathbb{V}_{+Q} + \mathbb{V}_{-Q}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Q}{a}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}(1-1)\\ \mathbb{V}_{+2Q} &= 0, \qquad \text{sobre a carga } +2Q\end{aligned}$$

Veja que aqui não podemos calcular o campo elétrico através do gradiente negativo do potencial, pois obtivemos o potencial para pontos bem definidos no espaço, e não para um ponto $\vec{r}$ genérico.

b) Qual é a energia potencial elétrica total?

A energia potencial elétrica total é a soma das energias potenciais para todos os pares de cargas. Assim,

$$\mathbb{U} = U_{+Q,+2Q} + U_{+Q,-Q} + U_{-Q,+2Q}$$

$$\mathbb{U} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Q \times Q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q \times (-Q)}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-Q) \times 2Q}{a}$$

$$\mathbb{U} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{a}$$

Observe que poderíamos utilizar também a expressão 5.15, isto é,

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i \mathbb{V}_i$$

que resulta em

$$\begin{aligned}
\mathbb{U} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i \mathbb{V}_i \\
&= \frac{1}{2}\left[(+Q)\mathbb{V}_{+Q} + (-Q)\mathbb{V}_{-Q} + (+2Q)\mathbb{V}_{+2Q}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[Q\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a} - Q\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Q}{a} + 2Q \times 0\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{a} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Q^2}{a}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Q^2}{a} \\
\mathbb{U} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{a}
\end{aligned}$$

idêntica à obtida pela expressão anterior.

Exemplo 5.2. *Obtenha a energia potencial gravitacional e o potencial gravitacional através das equivalências apresentadas nos exemplos 3.5 e 4.3.*

As equivalências entre grandezas elétricas e gravitacionais são

$$Q \leftrightarrow M$$

$$\rho \leftrightarrow \rho_m$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow -G$$

Assim, a energia potencial elétrica é dada pela expressão 5.7,

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV$$

e a energia potencial gravitacional fica

$$U_g = -GM\int_V \frac{\rho_m(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV \tag{5.21}$$

Calculamos o potencial elétrico através da equação 5.12,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV$$

e, conseqüentemente, o potencial gravitacional é

$$\mathbb{G}(\vec{r}) = -G\int_V \frac{\rho_m(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV \tag{5.22}$$

Note que tanto a energia potencial gravitacional quanto o potencial gravitacional são negativos, já que não existe massa negativa. Para o campo gravitacional valem as relações

$$\vec{\mathcal{G}} = -\nabla\mathbb{G}$$

e

$$\nabla\times\vec{\mathcal{G}} = 0$$

pois o campo gravitacional também é conservativo.

Exemplo 5.3. *a) Calcule o potencial elétrico gerado pelo próton do átomo de hidrogênio a uma distância r.*

O potencial elétrico gerado pelo próton é dado pela equação 5.14, considerando que a carga do próton vale e, ou seja,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{r}$$

Observe que daqui podemos tirar o campo elétrico gerado pelo próton, através da equação 5.17,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla \mathbb{V}$$

que estabelece o campo elétrico como sendo

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} \right]$$
$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left[\frac{1}{r} \right]$$

O gradiente do termo entre colchetes, calculado na equação 5.9, vale

$$\nabla \left[\frac{1}{r} \right] = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

de modo que o campo elétrico fica

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{\vec{r}}{r^3} \right]$$
$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

que é o campo elétrico de uma carga pontual, orientado radialmente para fora, como deve ser o campo de uma carga positiva.

b) Qual é a energia potencial elétrica do sistema formado por um próton e um elétron separados por uma distância r, ou seja, qual a energia potencial elétrica do átomo de hidrogênio?

A energia potencial do átomo de hidrogênio é obtida através da equação 5.11, escrita na forma

$$U = q\mathbb{V}$$

Para o caso em questão, obtemos

$$U = (-e) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r}$$
$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

Note que a energia potencial é negativa, como deve ser para o caso de cargas de sinais opostos.

c) Se a distância entre o próton e o elétron, no átomo de hidrogênio, é de $5,3 \times 10^{-11}$ *m, qual é o potencial a que o elétron está sujeito e qual é a energia potencial do sistema?*

O potencial a que o elétron está submetido vale, utilizando a resposta do item (a),

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{r} \\ &= 9 \times 10^9 \times \frac{1,6 \times 10^{-19}}{5,3 \times 10^{-11}} \\ \mathbb{V} &= 27,2 \text{ V} \end{aligned}$$

Trata-se de um potencial razoavelmente grande, e a explicação deste fato está na proximidade entre o elétron e o próton. A energia potencial fica

$$\begin{aligned} U &= (-e)\mathbb{V} \\ &= -1,6 \times 10^{-19} \times 27,2 \\ U &= 4,4 \times 10^{-18} \text{ J} \end{aligned}$$

que é bastante pequena. O joule é uma unidade razoável quando calculamos valores de energias de problemas macroscópicos. No entanto, ele é muito grande para medir energias de sistemas microscópicos. Neste caso, existe outra unidade, que não é do SI, mas que pode ser utilizada sem problemas, chamada *elétron-volt* (eV). O elétron-volt é a energia que uma partícula com uma carga positiva com valor igual em módulo ao valor da carga do elétron adquire quando submetida a um potencial de 1 volt. Ou seja,

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ V}$$

ou

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Com esta definição, a energia potencial calculada acima fica simplesmente

$$\begin{aligned} U &= (-e)\mathbb{V} \\ &= -e\ 27,2 \\ U &= -27,2 \text{ eV} \end{aligned}$$

pois temos um elétron situado num potencial de 27,2 V.

Exemplo 5.4. *Considere a espira de cargas definida no exemplo 4.5 e apresentada na figura 4.5. Qual é o potencial elétrico no eixo da espira a uma distância z do seu centro?*

A espira pode ser vista na figura 5.2 abaixo.

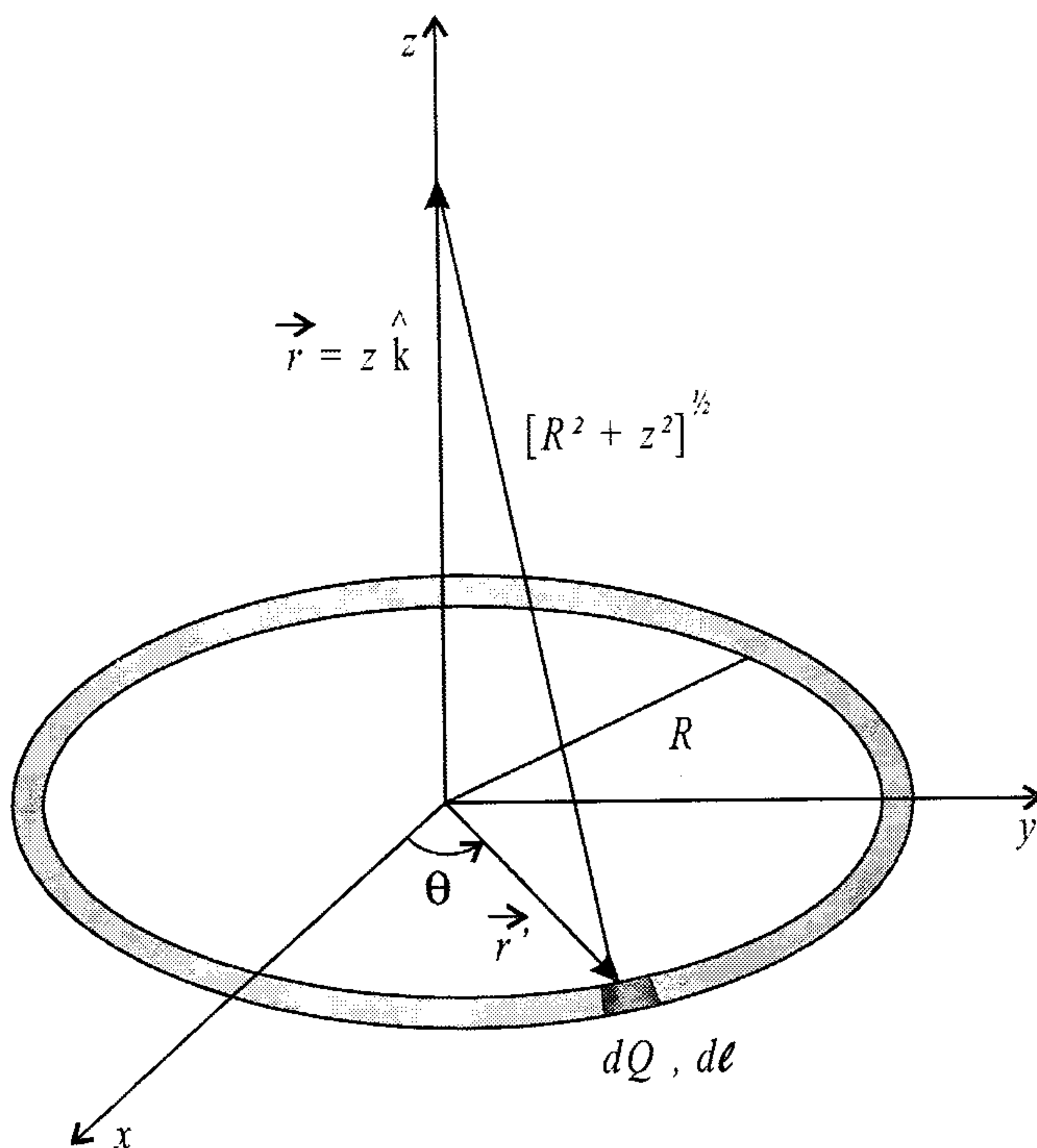



Figura 5.2: A espira metálica de carga positiva Q da figura 4.5.

Para esta distribuição de cargas, vamos utilizar a expressão 5.12,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV$$

e precisamos das seguintes coordenadas:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= z\,\hat{\mathbf{k}} \\
\vec{r}\,' &= R\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{j}} \\
\vec{r}-\vec{r}\,' &= z\,\hat{\mathbf{k}} - R\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} - R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{j}}
\end{aligned}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{z^2+R^2\cos^2\theta+R^2\,\text{sen}^2\,\theta} = \sqrt{z^2+R^2}$$

Além disso, a densidade de cargas é uma densidade linear, dada por

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R} = \frac{dQ}{d\ell}$$

O elemento $d\ell$ é

$$d\ell = R d\theta$$

e assim, o potencial fica

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_C \frac{\lambda\, d\ell}{\sqrt{z^2+R^2}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\int_0^{2\pi} R\, d\theta \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}(\theta)_0^{2\pi} \\
&= \frac{\overbrace{\lambda}^{\frac{Q}{2\pi R}}}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}2\pi \\
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{z^2+R^2}}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Veja que o potencial elétrico no centro da espira é obtido quando $z = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2}} \\
\mathbb{V}(0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}
\end{aligned}$$

O campo elétrico gerado pela espira pode ser obtido através do cálculo do gradiente de $\mathbb{V}$, isto é,

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}} &= -\nabla\mathbb{V} \\
\vec{\mathcal{E}} &= -\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]
\end{aligned}$$

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{Q\hat{\mathbf{k}}}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}$$
$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qz}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{k}}$$

que concorda com a expressão 4.11.

Exemplo 5.5. *Considere um disco metálico de raio R com uma carga negativa Q distribuída uniformemente sobre sua superfície, como mostra a figura 5.3.*

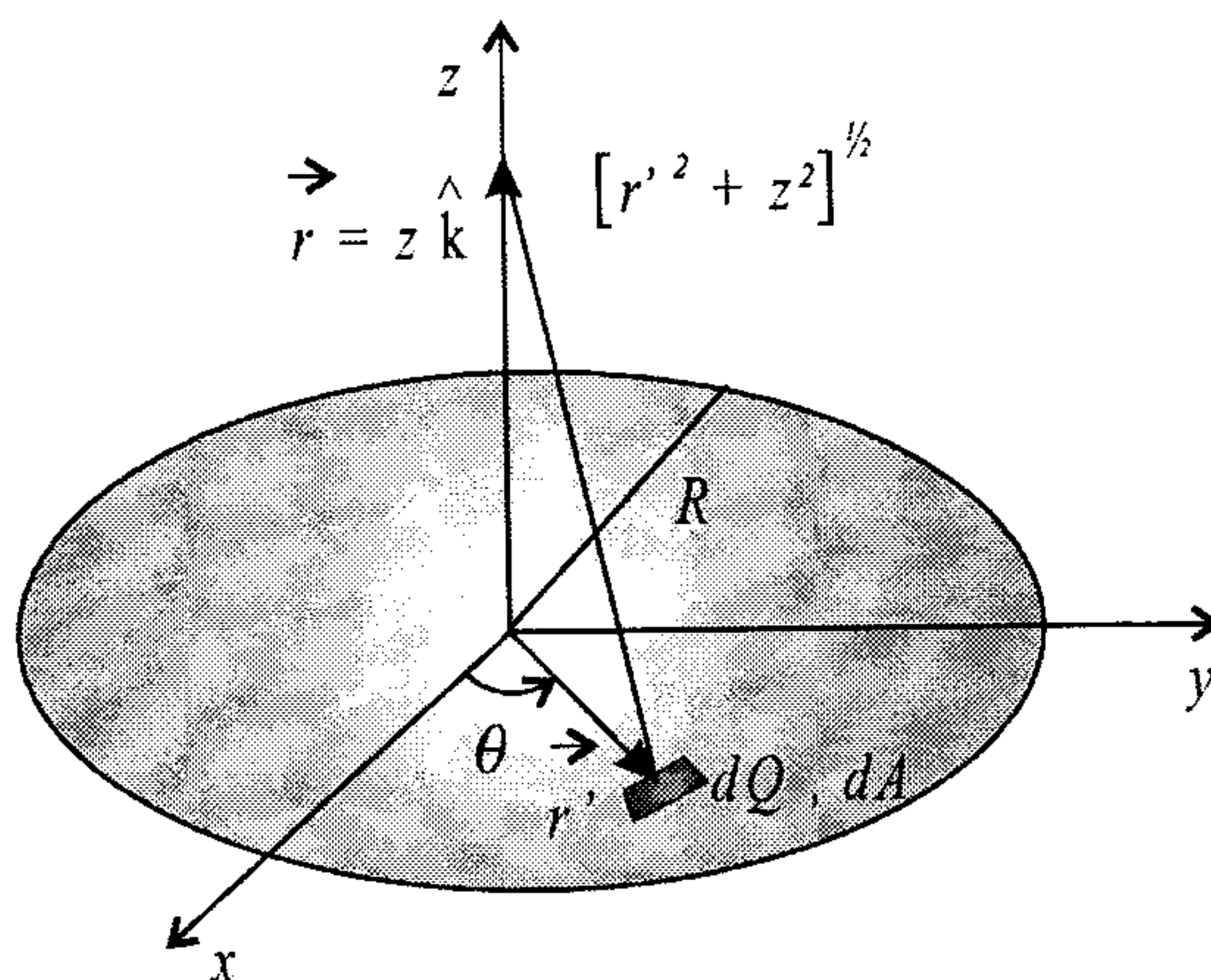



Figura 5.3: Um disco metálico com uma distribuição de cargas negativas sobre a sua superfície.

a) Qual é o potencial gerado por esta distribuição de cargas no eixo do disco, a uma distância z do centro do disco?

Neste caso, temos uma densidade superficial de cargas σ, dada por

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{dQ}{dA} = \frac{dQ}{r'dr'd\theta}$$

Além disso, temos

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= z\,\hat{\mathbf{k}} \\
\vec{r}\,' &= r'\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + r'\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{j}} \\
\vec{r} - \vec{r}\,' &= z\,\hat{\mathbf{k}} - r'\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} - r'\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{j}} \\
|\vec{r} - \vec{r}\,'| &= \sqrt{z^2 + r'^{\,2}\cos^2\theta + r'^{\,2}\,\mathrm{sen}^2\,\theta} = \sqrt{z^2 + r'^{\,2}}
\end{aligned}
$$

e o potencial elétrico é dado através da equação 5.12, ou seja,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,dV \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_A \frac{\sigma\,dA}{\sqrt{z^2 + r'^{\,2}}} \\
&= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{r'dr'd\theta}{\sqrt{z^2 + r'^{\,2}}} \\
&= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R \frac{r'dr'}{\sqrt{z^2 + r'^{\,2}}}\left(\theta\right)_0^{2\pi} \\
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R \frac{r'dr'}{\sqrt{z^2 + r'^{\,2}}}
\end{aligned}
$$

Para resolver esta integral, vamos utilizar a substituição

$$
\begin{aligned}
r' &= z\,\mathrm{tg}\,\alpha \\
dr' &= z\sec^2\alpha\,d\alpha
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

e assim, deixando os limites de integração como α_1 e α_2, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{z\,\mathrm{tg}\,\alpha\; z\sec^2\alpha\; d\alpha}{\sqrt{z^2 + z^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}} \\
&= \frac{z^2\sigma}{2\epsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mathrm{tg}\,\alpha\sec^2\alpha\; d\alpha}{z\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha}} \\
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathrm{tg}\,\alpha\sec\alpha\; d\alpha
\end{aligned}
$$

A integral é resolvida através de

$$
\begin{aligned}
u &= \sec\alpha \\
du &= \sec\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha\; d\alpha
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} du \\
&= \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sec\alpha\right)_{\alpha_1}^{\alpha_2} \\
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sec\alpha_2 - \sec\alpha_1\right]
\end{aligned}$$

Para encontrar $\sec\alpha_1$ e $\sec\alpha_2$, voltamos à substituição 5.24, ou seja,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r'}{z}$$

Como a tangente é dada pela razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente, temos que o cateto oposto vale r', enquanto o cateto adjacente vale z, e portanto, a hipotenusa é $\sqrt{z^2 + r'^2}$. Assim, obtemos, para os limites de integração,

$$\begin{aligned}
r' = 0 &\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{0}{z} = 0 \\
r' = R &\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{R}{z}
\end{aligned}$$

Queremos a secante, que é o inverso do cosseno, ou seja,

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_1 &= \frac{z}{z} = 1 \Rightarrow \sec\alpha_1 = 1 \\
\cos\alpha_2 &= \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \Rightarrow \sec\alpha_2 = \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{z}
\end{aligned}$$

e o potencial elétrico é

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sec\alpha_2 - \sec\alpha_1\right] \\
&= \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{z} - 1\right] \\
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left[\sqrt{z^2 + R^2} - z\right] \qquad (5.25)
\end{aligned}$$

Quando $z \gg R$, esta expressão pode ser aproximada, se considerarmos a expansão em série de Taylor do primeiro termo entre colchetes.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{z^2+R^2} &= \sqrt{z^2\left[1+\frac{R^2}{z^2}\right]} \\
&= z\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}} \\
&= z\left[1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}+\cdots\right] \\
\sqrt{z^2+R^2} &\cong z+\frac{R^2}{2z}, \qquad z \gg R
\end{aligned}
$$

e o potencial fica

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}) &\cong \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left[z+\frac{R^2}{2z}-z\right] \\
&\cong \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\frac{R^2}{2z} \\
\mathbb{V}(\vec{r}) &\cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z}, \qquad z \gg R
\end{aligned}
$$

Note que este potencial é o mesmo que o de uma carga Q pontual situada na origem. Isto já era esperado, porque, a uma distância muito grande do disco, ele se comporta como uma carga pontual. Quando estamos muito próximos ao disco, ou seja, $z \ll R$, podemos fazer também uma expansão, só que agora do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{z^2+R^2} &= \sqrt{R^2\left[1+\frac{z^2}{R^2}\right]} \\
&= R\sqrt{1+\frac{z^2}{R^2}} \\
&= R\left[1+\frac{1}{2}\frac{z^2}{R^2}+\cdots\right] \\
\sqrt{z^2+R^2} &\cong R+\frac{z^2}{2R}, \qquad z \ll R
\end{aligned}
$$

e o potencial torna-se

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}) &\cong \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left[R+\frac{z^2}{R}-z\right] \\
\mathbb{V}(\vec{r}) &\cong \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left[R-z+\frac{z^2}{2R}\right]
\end{aligned}
$$

Como $z \ll R$, podemos desprezar o termo em z^2 na expressão acima, e assim, obtemos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) \cong \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}(R - z), \qquad z \ll R$$

Observe que o potencial em $z = 0$, ou seja, no centro do disco, é dado por

$$\mathbb{V}(0) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R}$$

que é a metade do potencial gerado por um anel de raio R contendo a mesma carga Q. Por que ocorre isso?

b) Calcule o campo elétrico gerado por este disco no seu eixo.

Para calcular o campo elétrico, precisamos encontrar o gradiente negativo do potencial elétrico, dado pela equação 5.25,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left[\sqrt{z^2 + R^2} - z\right]$$

e assim,

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}} &= -\nabla\mathbb{V} \\
&= -\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\left\{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left[\sqrt{z^2 + R^2} - z\right]\right\} \\
&= -\frac{Q\,\hat{\mathbf{k}}}{2\pi\epsilon_0 R^2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\sqrt{z^2 + R^2} - z\right] \\
&= -\frac{Q\,\hat{\mathbf{k}}}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left[\frac{1}{2}\frac{2z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 1\right] \\
\vec{\mathcal{E}} &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right]\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned} \qquad (5.26)$$

Esta equação tem alguns limites interessantes, em particular aquele em que ocorre $z \ll R$. Neste caso, a fração no termo entre colchetes pode ser expandida em série de Taylor, ou seja,

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{z}{\sqrt{R^2\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} &= \frac{z}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{z^2}{R^2}}} \\
&= \frac{z}{R}\left[\sqrt{1+\frac{z^2}{R^2}}\right]^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{z}{R}\left[1-\frac{1}{2}\frac{z^2}{R^2}+\cdots\right] \\
&\cong \frac{z}{R}\left[1-\frac{1}{2}\frac{z^2}{R^2}\right] \\
\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} &\cong \frac{z}{R}-\frac{1}{2}\frac{z^3}{R^3}
\end{aligned}$$

Quando $z \ll R$, podemos desprezar o termo em z^3 na expressão acima, restando, assim,

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \cong \frac{z}{R}, \qquad z \ll R$$

de modo que o campo elétrico torna-se

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left[1-\frac{z}{R}\right]\hat{\mathbf{k}}, \qquad z \ll R$$

Quando $z \to 0$, o campo muito próximo à superfície do disco resula em

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\,\hat{\mathbf{k}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{k}}$$

que é idêntico ao campo produzido por um plano infinito dado pela expressão 4.22. Isto pode ser melhor entendido se lembrarmos que, quando estamos quase na superfície do disco, suas bordas estão comparativamente muito distantes, o que faz com que ele, sob este ponto de vista, seja praticamente infinito. Todavia, um disco infinito é idêntico a um plano infinito e, portanto, eles devem possuir o mesmo campo elétrico.

Exemplo 5.6. *Qual é o potencial elétrico gerado pela casca esférica metálica de raio R do exemplo 4.8, apresentada na figura 4.10?*

Para calcular o potencial elétrico desta casca metálica, podemos proceder de dois modos.

a) Primeiro modo, através da segunda lei de Maxwell.

Podemos obter o potencial elétrico para esta distribuição de cargas através do campo elétrico que foi calculado no exemplo 4.8, se empregarmos também a equação 5.20, que é a segunda lei de Maxwell na forma integral.

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

Aqui é preciso ter cuidado, pois existem duas regiões distintas, uma quando $r > R$, ou seja, fora da casca, e outra quando $r < R$, isto é, dentro da casca. Cada uma dessas regiões tem um campo elétrico diferente, e esses campos são dados pelas expressões 4.20 e 4.21, que podem ser sumarizadas em

$$\vec{\mathcal{E}} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}}, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases}$$

Como existem duas regiões distintas, a posição de referência para uma delas não é a mesma que a posição de referência para a outra. Assim, iniciamos com o cálculo do potencial na parte externa da casca, colocando a posição de referência no infinito, o que corresponde a um potencial de referência nulo. Portanto, lembrando que o comprimento de arco $d\vec{\ell}$, em coordenadas esféricas, é dado pela equação 1.48,

$$d\vec{\ell} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r \operatorname{sen}\theta d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

temos

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\vec{r}) &= \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} \\ &= -\int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \cdot [dr\,\hat{\mathbf{r}} + r d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r \operatorname{sen}\theta d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}] \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{dr}{r^2} \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right)_{\infty}^{\vec{r}} \\ \mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right) \end{aligned}$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}, \qquad r \geq R \tag{5.27}$$

que é igual ao potencial elétrico gerado por uma carga Q pontual situada na origem, dado pela expressão 5.14. Essa igualdade só ocorre quando estamos na região exterior à casca. Note que, sobre a casca, o potencial é

$$\mathbb{V}(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}$$

Para calcular o potencial dentro da casca, podemos colocar a referência na superfície da casca, cujo potencial, dado pela equação acima, é conhecido. Assim, lembrando que o campo dentro da casca é nulo, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \overbrace{\vec{\mathcal{E}}}^{0} \cdot d\vec{\ell} \\
&= \mathbb{V}(R) - \int_{R}^{\vec{r}} 0 \\
&= \mathbb{V}(R) \\
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}, \qquad r \leq R
\end{aligned} \tag{5.28}$$

e portanto, o potencial dentro da casca esférica é constante. Veja que o potencial elétrico neste caso é uma função contínua.

b) Segundo modo, através do cálculo direto.

O segundo modo de calcular o potencial elétrico devido à casca esférica é baseado na utilização da equação 5.12,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dV$$

considerando uma densidade superficial σ de cargas. Precisamos das grandezas $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$, que podem ser vistas na figura 5.4.

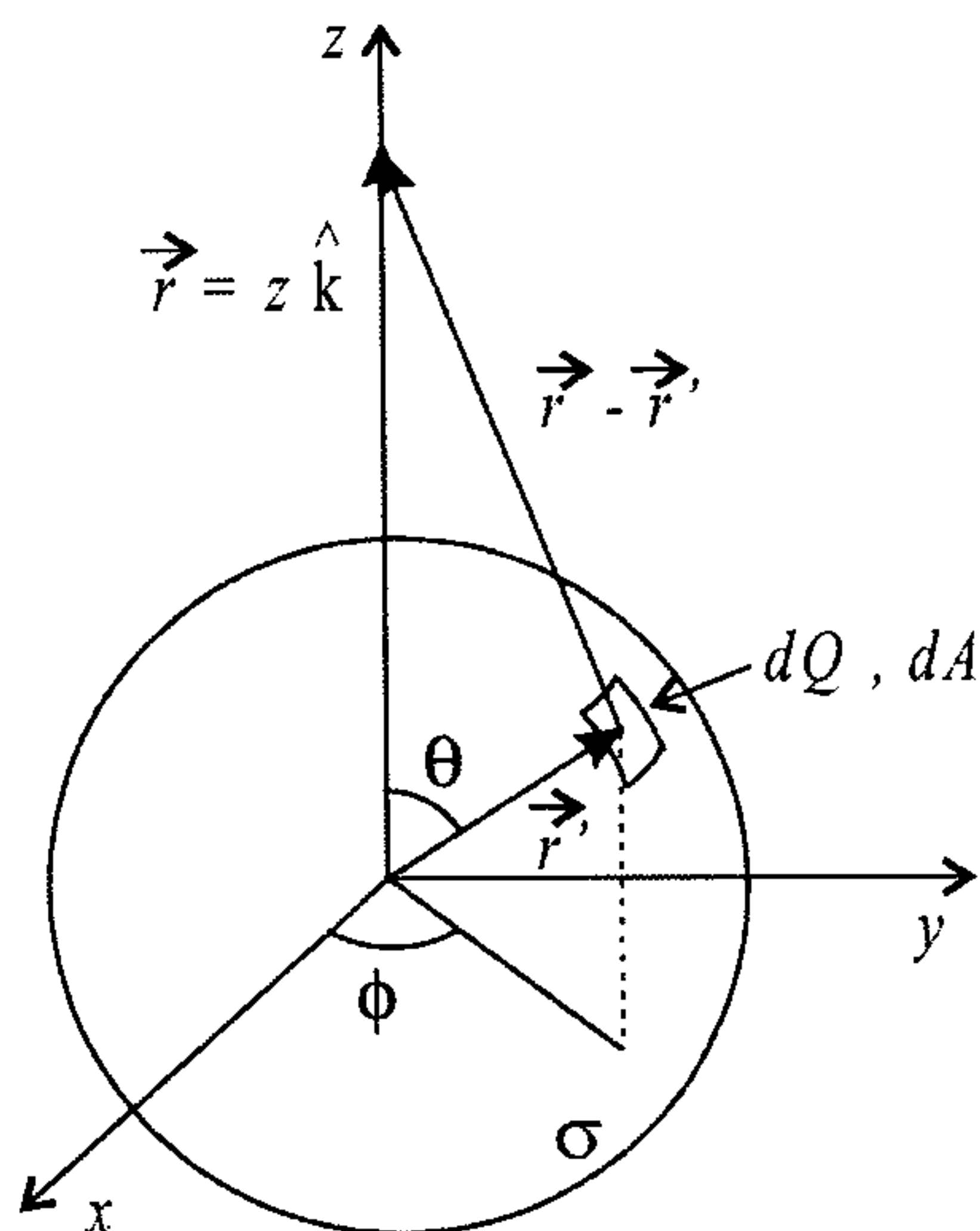



Figura 5.4: Casca esférica metálica com uma densidade de cargas σ, do exemplo 4.8.

Da figura, temos, lembrando que $|\vec{r}\,'| = R$,

$$\begin{aligned}
dA &= R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi \\
\vec{r} &= r\,\hat{\mathbf{k}} \\
\vec{r}\,' &= R \operatorname{sen}\theta \cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}} + R\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}} \\
\vec{r} - \vec{r}\,' &= (r - R\cos\theta)\,\hat{\mathbf{k}} - R\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} - R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}} \\
|\vec{r} - \vec{r}\,'| &= \sqrt{(r - R\cos\theta)^2 + R^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi + R^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\phi} \\
&= \sqrt{r^2 - 2rR\cos\theta + R^2\cos^2\theta + R^2\operatorname{sen}^2\theta(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi)} \\
&= \sqrt{r^2 - 2rR\cos\theta + R^2\cos^2\theta + R^2\operatorname{sen}^2\theta} \\
|\vec{r} - \vec{r}\,'| &= \sqrt{r^2 - 2rR\cos\theta + R^2}
\end{aligned}$$

de modo que o potencial fica

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}\,) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_A \frac{\sigma}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dA \\
\mathbb{V}(\vec{r}\,) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2\operatorname{sen}\theta\ d\theta d\phi}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\theta + R^2}}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\theta\ d\theta}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\theta + R^2}}(\phi)_0^{2\pi}$$
$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\theta\ d\theta}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\theta + R^2}}$$

Para resolver esta integral, precisamos fazer a seguinte substituição:

$$u = r^2 - 2rR\cos\theta + R^2$$
$$du = -2rR(-\operatorname{sen}\theta)\ d\theta = 2rR\operatorname{sen}\theta\ d\theta$$
$$\frac{du}{2rR} = \operatorname{sen}\theta\ d\theta$$

enquanto os extremos de integração ficam

$$\theta_1 = 0 \Rightarrow u_1 = r^2 - 2rR\overbrace{\cos 0}^{1} + R^2 = (r-R)^2$$
$$\theta_2 = \pi \Rightarrow u_2 = r^2 - 2rR\overbrace{\cos \pi}^{-1} + R^2 = (r+R)^2$$

e assim,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}\int_{u_1}^{u_2} \frac{\frac{du}{2rR}}{\sqrt{u}}$$
$$= \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 rR}\int_{u_1}^{u_2} u^{-\frac{1}{2}}du$$
$$= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}\left(u^{\frac{1}{2}}\right)_{u_1}^{u_2}$$
$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}\left[\sqrt{u_2} - \sqrt{u_1}\right]$$

Agora resta substituir as expressões para u_2 e u_1. No entanto, precisamos ainda separar a situação $r > R$, fora da esfera, da situação $r < R$, dentro da esfera. A equação acima é válida para ambos os casos, e a diferença está nos limites de integração. Para qualquer valor de r, temos

$$\sqrt{u_2} = \sqrt{(r+R)^2}$$
$$\sqrt{u_2} = r + R$$

Entretanto, para u_1 a situação é diferente, pois

$$\sqrt{u_1} = \sqrt{(r-R)^2}$$
$$\sqrt{u_1} = |r-R|$$

Quando $r > R$, o módulo é

$$|r-R| = r-R$$

mas quando $r < R$, o módulo é, na verdade,

$$|r-R| = -(r-R) = R-r$$

Vejamos como fica o potencial em cada caso. Quando $r > R$, temos a expressão

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}\left[r+R-(r-R)\right] \\
&= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}(2R) \\
&= \frac{\overbrace{\sigma}^{\frac{Q}{4\pi R^2}} R^2}{\epsilon_0 r} \\
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}, \qquad r \geq R
\end{aligned}$$

que concorda com a expressão 5.27. Quando $r < R$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}\left[r+R-(R-r)\right] \\
&= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}(2r) \\
&= \frac{\overbrace{\sigma}^{\frac{Q}{4\pi R^2}} R}{\epsilon_0} \\
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}, \qquad r \leq R
\end{aligned}$$

o que também está de acordo com a equação 5.28.

Exemplo 5.7. *Calcule o potencial elétrico gerado pelo fio infinito de cargas, com uma densidade λ, definido no exemplo 4.11 e nas figuras 4.4 e 4.13.*

Para calcular o potencial do fio, vamos precisar da segunda lei de Maxwell, equação 5.20, na forma integral,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

e também do campo elétrico gerado pelo fio, dado pela expressão 4.9,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Lembrando que o elemento de arco $d\vec{\ell}$ em coordenadas cilíndricas é dado pela expressão 1.46,

$$d\vec{\ell} = d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}$$

temos apenas que considerar uma referência apropriada. O fio infinito tem algumas peculiaridades. Então, vamos primeiro montar a integral.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} \\
&= \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \left[d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}\right] \\
&= \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \frac{d\rho}{\rho} \\
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln\rho\right]_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}}
\end{aligned}$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left[\frac{\rho}{\rho_{\text{ref}}}\right]$$

Desta equação, percebemos que, se considerarmos a referência no infinito o potencial ficará indefinido, pois obteremos o logaritmo de zero, que tende a $-\infty$. Assim, devemos colocar a referência noutro lugar, que pode ser a superfície do condutor. Como todo fio tem uma certa espessura, vamos considerar a referência em $\rho_{\text{ref}} = R$, sendo R o raio do fio. Então,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(R) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{R} \tag{5.29}$$

O resultado acima é interessante, pois o potencial tende a $\pm\infty$, dependendo do sinal da densidade de carga λ, quando $\rho \to \infty$, diferentemente do que ocorreu em todos os casos anteriores. Isto sugere que a energia potencial de um sistema formado por um fio infinito e uma carga tende a ser infinitamente positiva ou negativa à medida que as cargas vão se afastando, o que não parece ser fisicamente razoável, porque envolve uma quantidade infinita de energia. Esta constatação pode ser melhor entendida se considerarmos que, na realidade, todos os fios, sem exceção, são finitos, por maiores que sejam, que o resultado para o potencial de um fio finito não diverge, como se vê no exercício 5.2, e que, conseqüentemente, a energia potencial também não diverge. Sendo assim, de que adianta calcular o potencial de um sistema que na verdade não existe? De fato, todo fio é finito, mas, quando estamos numa região muito próxima ao fio, a distância deste ao ponto em que estamos pode ser comparativamente muito menor do que o seu tamanho, e neste caso, podemos aproximar o fio por um fio infinito, cujo potencial possui uma forma matemática mais simples. Esta aproximação se justifica nas proximidades do fio, na sua região central, mas nas regiões mais afastadas, ou nas próximas aos seus extremos, é preciso considerar o seu tamanho real.

Exemplo 5.8. *Calcule o potencial elétrico gerado pelo plano infinito de cargas do exemplo 4.12, figura 4.14.*

O campo elétrico do plano infinito de cargas é dado pela equação 4.22,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\hat{n}$$

e através da segunda lei de Maxwell na forma integral, que é

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

podemos calcular o seu potencial elétrico. Novamente, deixaremos a questão do ponto de referência para o final. Considerando que o plano de cargas está no plano xy, a normal $\hat{n}$ está na direção z, e na região $z \geq 0$ temos $\hat{n} = \hat{\mathbf{k}}$. O elemento de arco $d\vec{\ell}$ em retangulares é dado pela equação 1.44,

$$d\vec{\ell} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}$$

e assim, o potencial fica

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}\,) &= \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{k}} \cdot [dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}] \\
&= \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{z_{\text{ref}}}^{z} dz \\
&= \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \big(z\big)_{z_{\text{ref}}}^{z} \\
&= \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \big[z - z_{\text{ref}}\big] \\
\mathbb{V}(\vec{r}\,) &= \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z_{\text{ref}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z
\end{aligned}$$

Como no caso do fio infinito, no plano infinito de cargas não podemos considerar a posição de referência no infinito. A posição mais indicada é sobre a superfície do plano, em $z_{\text{ref}} = 0$, e assim, o potencial fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \mathbb{V}(0) - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$$

Como o potencial na referência é arbitrário, para simplificar, podemos considerá-lo como sendo nulo, ou seja, $\mathbb{V}(0) = 0$, de modo que o potencial do plano, na região $z \geq 0$, fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$$

Quando estamos na região $z \leq 0$, a normal ao plano é $\hat{n} = -\hat{\mathbf{k}}$, e o potencial fica, já considerando a referência em $z = 0$ e $\mathbb{V}(0) = 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}\,) &= -\int_0^{z} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{k}} \cdot [dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}] \\
&= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{z} dz \\
\mathbb{V}(\vec{r}\,) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z
\end{aligned}$$

Podemos reunir os dois resultados na expressão

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z| \tag{5.30}$$

que dá o campo do plano infinito a qualquer distância do plano. Da mesma forma que todos os fios são finitos, todos os planos também o são, e a aproximação acima só se justifica quando estamos muito próximos ao plano, de modo que seu tamanho é muito maior do que a distância do plano ao ponto onde estamos.

Exemplo 5.9. *Qual é a diferença de potencial entre os dois planos de cargas de densidades σ e $-\sigma$ da figura 4.16, apresentada no exemplo 4.14?*

A figura 4.16 está reproduzida em seguida, na figura 5.5.

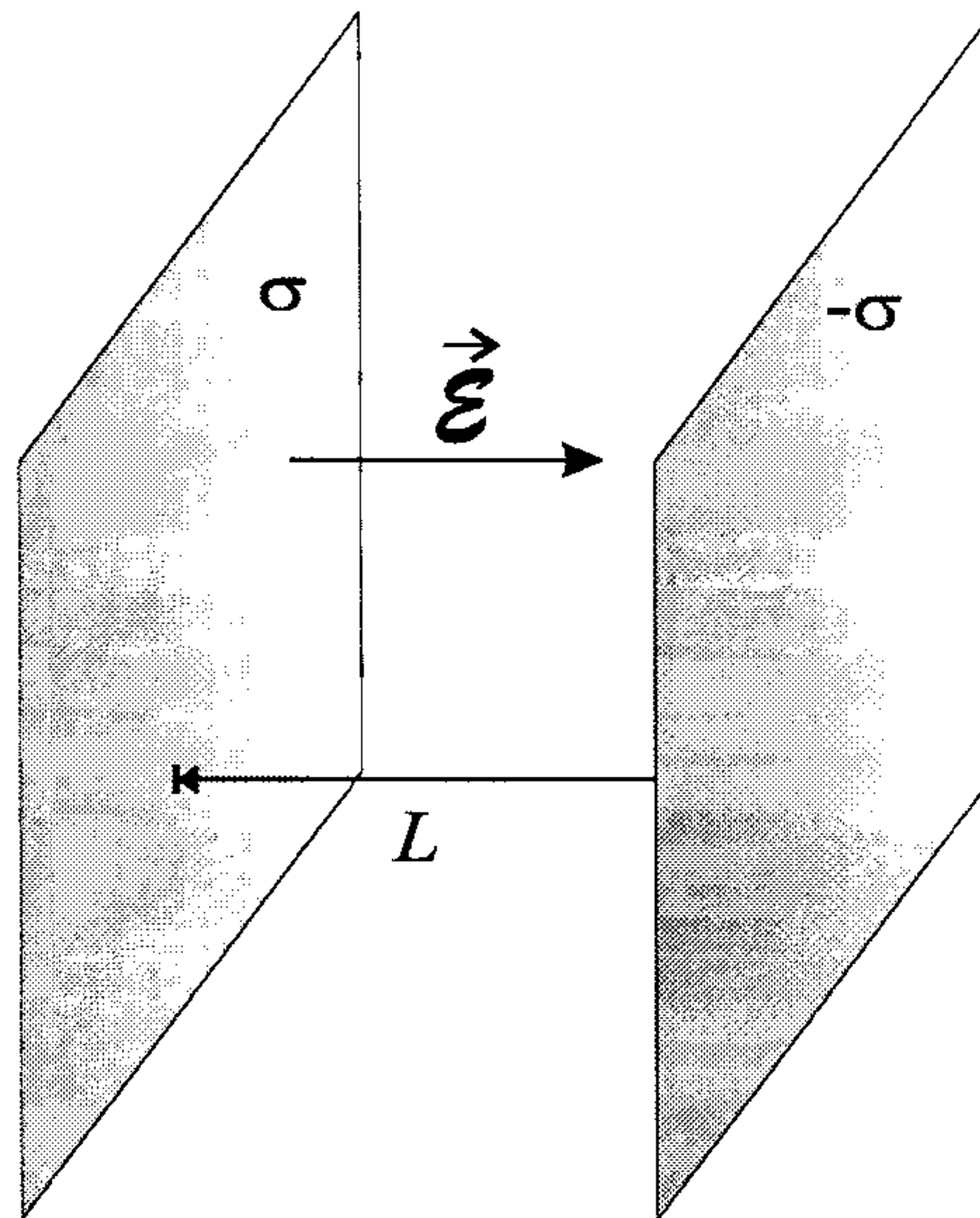



Figura 5.5: Dois planos infinitos paralelos, com densidades de carga σ e $-\sigma$.

O campo elétrico entre os planos é dado pela equação 4.24,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$$

e vamos considerar que os planos sejam paralelos ao plano xy. A diferença de potencial será dada pela equação 5.19, ou seja,

$$d\mathbb{V} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

que deve ser integrada desde um plano até o outro. Escolhendo como plano inicial o plano de densidade σ, cuja normal é $\hat{n} = \hat{\mathbf{k}}$, temos

$$\int_{\text{plano } \sigma}^{\text{plano } -\sigma} d\mathbb{V} = -\int_{\text{plano } \sigma}^{\text{plano } -\sigma} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\mathbb{V}_{\text{plano } -\sigma} - \mathbb{V}_{\text{plano } \sigma} = -\int \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} \cdot [dx\, \hat{\mathbf{i}} + dy\, \hat{\mathbf{j}} + dz\, \hat{\mathbf{k}}]$$

$$\Delta\mathbb{V} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^L dz$$

$$\Delta\mathbb{V} = -\frac{\sigma L}{\epsilon_0}$$

Como esta é a diferença de potencial entre o plano $-\sigma$ e o plano σ, o plano σ tem um potencial maior do que o plano $-\sigma$, ou seja,

$$\mathbb{V}_{\text{plano } \sigma} - \mathbb{V}_{\text{plano } -\sigma} = \frac{\sigma L}{\epsilon_0}$$

E considerando que a densidade superficial σ é a carga (positiva) do plano dividida por sua área, podemos escrever

$$\mathbb{V}_{\text{plano } \sigma} - \mathbb{V}_{\text{plano } -\sigma} = \Delta\mathbb{V} = \frac{QL}{\epsilon_0 A} \tag{5.31}$$

que dá a diferença de potencial entre os dois planos de densidade σ e $-\sigma$. Voltaremos a utilizar esta expressão quando falarmos de capacitores, no capítulo 11. Por ora, vamos tratar de outro assunto importante.

5.3 Potencial Elétrico de um Dipolo Elétrico

Na seção 4.5 definimos o dipolo elétrico, que é uma configuração particular de cargas elétricas pontuais formada por duas cargas de valores Q e $-Q$, separadas por uma distância $|\vec{d}|$, como mostra a figura 5.6, que é uma reprodução da figura 4.18. Esta configuração de cargas possui uma grandeza chamada momento de dipolo $\vec{p} = Q\vec{d}$ associada. Na seção 4.5 obtivemos o campo elétrico do dipolo elétrico, dado, exatamente, pela equação 4.26,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}_- - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{r}_- - \vec{d}|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}_-}{|\vec{r} - \vec{r}_-|^3} \right]$$

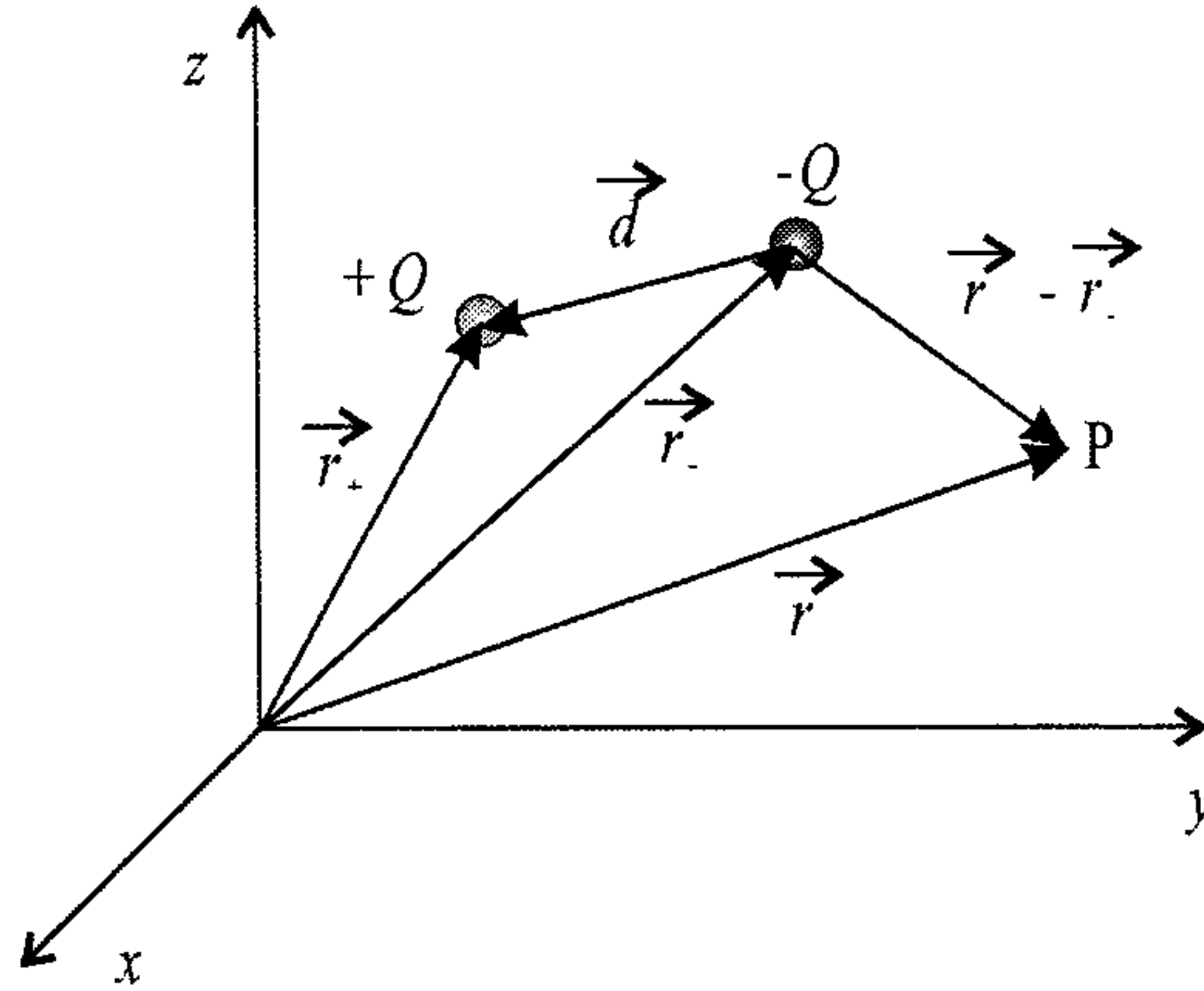



Figura 5.6: Um dipolo elétrico.

Quando o dipolo se torna pontual, o campo elétrico gerado por ele é fornecido pela equação 4.29,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3(\vec{r} - \vec{r}\,')\cdot\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^5}(\vec{r} - \vec{r}\,') - \frac{\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\right]$$

Agora, nosso objetivo é encontrar o potencial elétrico gerado pelo dipolo. Para tanto, precisamos somar os potenciais gerados por cada uma das cargas, ou seja, utilizando a expressão 5.13,

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{2}\frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{+Q}{|\vec{r} - \vec{r}_+|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Q}{|\vec{r} - \vec{r}_-|}$$

Como

$$\vec{r}_+ = \vec{r}_- + \vec{d}$$

o potencial fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_- - \vec{d}\,|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_-|}\right] \tag{5.32}$$

que é o potencial elétrico exato para qualquer dipolo. Se calcularmos o seu gradiente negativo, o resultado será a expressão 4.26 para o campo elétrico (veja o exercício 5.7). Quando o dipolo se torna pontual, podemos expandir a primeira fração do termo entre colchetes da expressão acima, como fizemos no caso do campo elétrico. Portanto, queremos expandir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}-\vec{d}|} &= |\vec{r}-\vec{r}_{-}-\vec{d}|^{-1} \\
&= \left[|\vec{r}-\vec{r}_{-}|^{2}-2(\vec{r}-\vec{r}_{-})\cdot\vec{d}+d^{2}\right]^{-\frac{1}{2}} \\
\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}-\vec{d}|} &= |\vec{r}-\vec{r}_{-}|^{-1}\left[1-\frac{2(\vec{r}-\vec{r}_{-})\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|^{2}}+\frac{d^{2}}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|}\right]^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Agora podemos utilizar a série de Taylor para expandir o termo entre colchetes até a primeira ordem em d, que fica

$$\left[1-\frac{2(\vec{r}-\vec{r}_{-})\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|^{2}}+\frac{d^{2}}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|^{2}}\right]^{-\frac{1}{2}} \cong 1+\frac{(\vec{r}-\vec{r}_{-})\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|^{2}}$$

e assim,

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}-\vec{d}\,|} \cong |\vec{r}-\vec{r}_{-}|^{-1}\left[1+\frac{(\vec{r}-\vec{r}_{-})\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|^{2}}\right]$$

Voltando à equação 5.32 do potencial do dipolo, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}-\vec{d}|}-\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|}\right] \\
&\cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|^{-1}\left[1+\frac{(\vec{r}-\vec{r}_{-})\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|^{2}}\right]-\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|}\right\} \\
&\cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|}\left[1+\frac{(\vec{r}-\vec{r}_{-})\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|^{2}}\right]-\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|}\right\} \\
&\cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|}+\frac{(\vec{r}-\vec{r}_{-})\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|^{3}}-\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|}\right] \\
&\cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_{-})\cdot\vec{d}}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|^{3}} \\
\mathbb{V}(\vec{r}) &\cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_{-})}{|\vec{r}-\vec{r}_{-}|^{3}}
\end{aligned}$$

e quando o dipolo é pontual, o potencial elétrico fica dado exatamente por

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_-)}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3} \tag{5.33}$$

Para verificar a expressão 4.29, vamos calcular o gradiente do potencial, ou seja,

$$\nabla\mathbb{V} = \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_-)}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\right]$$
$$\nabla\mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_-)}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\right]$$

ou

$$\nabla\mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right][\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_-)]$$
$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_-)]\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}$$

Para facilitar, definimos

$$\vec{r}-\vec{r}_- = X\,\hat{\mathbf{i}} + Y\,\hat{\mathbf{j}} + Z\,\hat{\mathbf{k}}$$

e as derivadas no primeiro termo do lado direito ficam, lembrando que $\vec{p}$ é uma constante,

$$\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right][\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_-)] =$$
$$\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial X} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial Y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial Z}\right][\vec{p}\cdot(X\,\hat{\mathbf{i}} + Y\,\hat{\mathbf{j}} + Z\,\hat{\mathbf{k}})]$$

ou

$$\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right][\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_-)] =$$
$$\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial X} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial Y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial Z}\right][p_xX + p_yY + p_zZ]$$

ou ainda,

$$\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right][\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_-)] = p_x\,\hat{\mathbf{i}}+p_y\,\hat{\mathbf{j}}+p_z\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right][\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_-)] = \vec{p}$$

O segundo termo do lado direito fica

$$\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3} = \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right][X^2+Y^2+Z^2]^{-\frac{3}{2}}$$

ou

$$\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3} = \left(-\frac{3}{2}\right)[X^2+Y^2+Z^2]^{-\frac{5}{2}}2X\,\hat{\mathbf{i}}$$
$$+\left(-\frac{3}{2}\right)[X^2+Y^2+Z^2]^{-\frac{5}{2}}2Y\,\hat{\mathbf{j}}+\left(-\frac{3}{2}\right)[X^2+Y^2+Z^2]^{-\frac{5}{2}}2Z\,\hat{\mathbf{k}}$$

ou ainda,

$$\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3} = -3[X^2+Y^2+Z^2]^{-\frac{5}{2}}[X\,\hat{\mathbf{i}}+Y\,\hat{\mathbf{j}}+Z\,\hat{\mathbf{k}}]$$
$$\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3} = -3\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5}$$

Reunindo os dois termos, o gradiente do potencial fica

$$\nabla\mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\vec{p}+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_-)]\left[-3\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5}\right]$$
$$\nabla\mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}-\frac{3\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_-)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5}(\vec{r}-\vec{r}\,')\right]$$

e o campo elétrico é

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_-)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5}(\vec{r}-\vec{r}\,')-\frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}_-|^3}\right]$$

concordando com a espressão 4.29.

Como também vimos na seção 4.5, um dipolo elétrico colocado num campo externo está sujeito a um torque que tende a orientá-lo na mesma direção que a do campo elétrico externo. Esse torque, ao girar o dipolo, realiza um trabalho positivo, e a energia gasta no processo deve vir do sistema

formado pelo campo externo e o dipolo. Assim, há uma *energia potencial de orientação* no sistema, que diminui de uma quantidade igual ao trabalho realizado pelo torque externo. Para calcular essa energia potencial de orientação, precisamos somar as energias potenciais de cada uma das cargas quando submetidas ao campo externo, ou seja,

$$\begin{aligned} U &= U_+ + U_- \\ &= Q\mathbb{V}_+ + (-Q)\mathbb{V}_- \\ U &= Q(\mathbb{V}_+ - \mathbb{V}_-) \end{aligned}$$

e assim, a energia potencial do dipolo é dada pela diferença de potencial entre as cargas positiva e negativa. Para calcular essa diferença de potencial, precisamos da equação 5.19,

$$d\mathbb{V} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

ou de sua forma integral

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{V}_-}^{\mathbb{V}_+} d\mathbb{V} &= -\int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} \\ \mathbb{V}_+ - \mathbb{V}_- &= -\int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} \end{aligned}$$

Se o campo elétrico for homogêneo, como na figura 5.7, então temos, de acordo com a figura,

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\,\hat{\mathbf{i}}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_+ - \mathbb{V}_- &= -\int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} \\ \mathbb{V}_+ - \mathbb{V}_- &= -\int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \mathcal{E}\,\hat{\mathbf{i}} \cdot [dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}} +] \\ &= -\mathcal{E} \int_{x_-}^{x_+} dx \\ \mathbb{V}_+ - \mathbb{V}_- &= -\mathcal{E}(x_+ - x_-) \end{aligned}$$

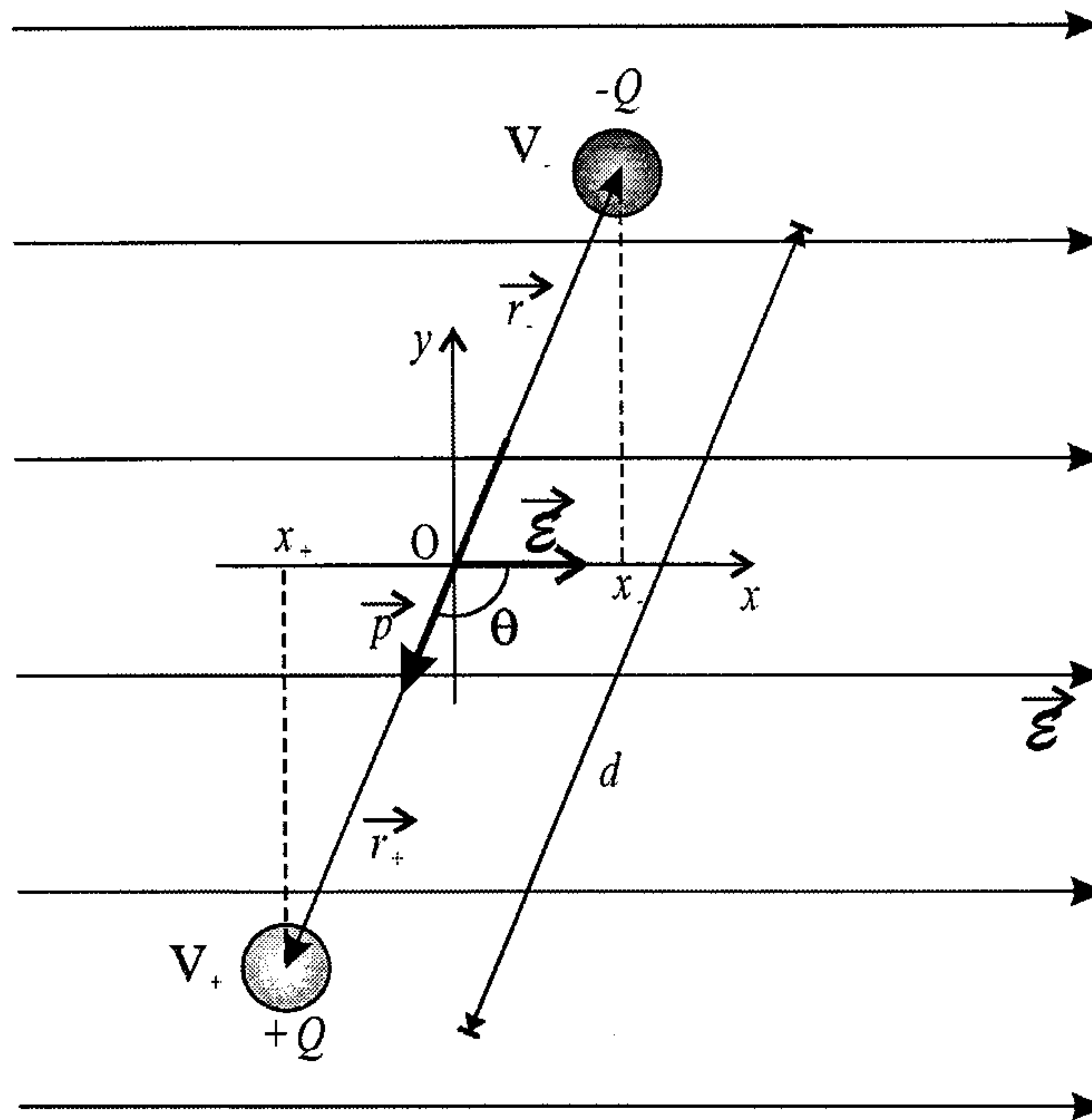



Figura 5.7: Potencial elétrico sobre um dipolo elétrico num campo externo uniforme.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\cos(\pi - \theta) &= \frac{x_-}{|r_-|} \\
-\cos\theta &= \frac{x_-}{\frac{d}{2}} \\
\cos\theta &= -\frac{2x_-}{d} \\
d\cos\theta &= -2x_- \\
x_- &= -\frac{d}{2}\cos\theta
\end{aligned}$$

e lembrando que x_+ é negativo,

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{|x_+|}{|r_-|}$$

$$-\cos\theta = \frac{-x_+}{\frac{d}{2}}$$
$$\cos\theta = \frac{2x_+}{d}$$
$$d\cos\theta = 2x_+$$
$$x_+ = \frac{d}{2}\cos\theta$$

Assim,

$$\mathbb{V}_+ - \mathbb{V}_- = -\mathcal{E}(x_+ - x_-)$$
$$\mathbb{V}_+ - \mathbb{V}_- = -\mathcal{E}\left[\frac{d}{2}\cos\theta - \left(-\frac{d}{2}\cos\theta\right)\right]$$
$$\mathbb{V}_+ - \mathbb{V}_- = -\mathcal{E}\left[\frac{d}{2}\cos\theta + \frac{d}{2}\cos\theta\right]$$
$$\mathbb{V}_+ - \mathbb{V}_- = -\mathcal{E}d\cos\theta$$

de modo que a energia potencial fica

$$U = Q(\mathbb{V}_+ - \mathbb{V}_-)$$
$$= Q(-\mathcal{E}d\cos\theta)$$
$$= -Qd\mathcal{E}\cos\theta$$
$$U = -p\mathcal{E}\cos\theta$$

e como θ é o ângulo entre $\vec{p}$ e $\vec{\mathcal{E}}$, podemos escrever a energia potencial como

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}} \tag{5.34}$$

Quando o dipolo está orientado no mesmo sentido e direção que o campo, sua energia é mínima e vale $U_{\min} = -p\mathcal{E}$. Quando o dipolo está perpendicular ao campo externo, sua energia potencial é nula, mas ela ainda é maior do que o valor mínimo, e portanto, o dipolo pode girar para diminuí-la ainda mais. A tendência do dipolo é sempre a de reduzir sua energia ao valor mínimo, mas a temperatura e a termodinâmica do sistema impedem que ele se alinhe perfeitamente com o campo, exceto quando $T = 0$. Nesta temperatura, como a entropia é nula, o dipolo pode atingir o estado de energia mínima.

Mesmo quando o campo externo não é homogêneo mas o dipolo é pequeno, a expressão 5.34 ainda é válida. Para provar isso, vamos partir da equação

$$U = Q(\mathbb{V}_+ - \mathbb{V}_-)$$

Os potenciais precisam ser avaliados em $\vec{r}+\vec{r}_+$ e $\vec{r}+\vec{r}_-$, sendo $\vec{r}$ a posição do centro do dipolo num sistema de referência qualquer, ou seja,

$$\mathbb{V}_+ = \mathbb{V}_+(\vec{r}+\vec{r}_+) = \mathbb{V}_+(\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2})$$
$$\mathbb{V}_- = \mathbb{V}_-(\vec{r}+\vec{r}_-) = \mathbb{V}_+(\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2})$$

pois

$$\vec{d} = 2\vec{r}_+ = -2\vec{r}_-$$

No entanto, se $\vec{d} \ll \vec{r}$, podemos expandir o potencial numa série de Taylor em torno de $\vec{r}$ e considerar apenas o primeiro termo em $\vec{d}$ (veja a expressão 2.9). Assim,

$$\mathbb{V}_+ = \mathbb{V}(\vec{r}) + \frac{\vec{d}}{2}\cdot\nabla\mathbb{V}(\vec{r})$$
$$\mathbb{V}_- = \mathbb{V}(\vec{r}) - \frac{\vec{d}}{2}\cdot\nabla\mathbb{V}(\vec{r})$$

e a energia potencial fica

$$\begin{aligned}
U &= Q(\mathbb{V}_+ - \mathbb{V}_-)\\
&= Q\left\{\mathbb{V}(\vec{r}) + \frac{\vec{d}}{2}\cdot\nabla\mathbb{V}(\vec{r}) - \left[\mathbb{V}(\vec{r}) - \frac{\vec{d}}{2}\cdot\nabla\mathbb{V}(\vec{r})\right]\right\}\\
&= Q\left[\mathbb{V}(\vec{r}) + \frac{\vec{d}}{2}\cdot\nabla\mathbb{V}(\vec{r}) - \mathbb{V}(\vec{r}) + \frac{\vec{d}}{2}\cdot\nabla\mathbb{V}(\vec{r})\right]\\
&= \overbrace{Q\vec{d}}^{\vec{p}}\cdot\overbrace{\nabla\mathbb{V}}^{-\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})}(\vec{r})\\
&= \vec{p}\cdot(-\vec{\mathcal{E}})\\
U &= -\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}
\end{aligned}$$

o que concorda com a expressão 5.34 anterior.

5.4 Linhas de Campo Elétrico e Superfícies Equipotenciais

Na seção 4.2 vimos o conceito de linhas de campo e também apresentamos as linhas de campo para os casos de uma carga pontual (figura 4.6), de um fio infinito (figura 4.7) e de um dipolo elétrico (figura 4.20 da seção 4.5). Em todos esses casos, as linhas de campo elétrico representam o campo elétrico gerado pelas cargas. Da mesma forma, o potencial elétrico de uma distribuição de cargas pode ser representado graficamente, de modo a facilitar a "visualização" do potencial. Fazemos isso mediante o uso de *superfícies equipotenciais*, que são as superfícies definidas no espaço quando o potencial tem um valor fixo $\mathbb{V}_0$. Para o caso da carga pontual, seu potencial elétrico é dado pela expressão 5.14,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Supondo que a carga está na origem, $\vec{r}\,' = 0$, e assim, temos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Para um valor fixo do potencial, digamos $\mathbb{V}_0$, obtemos

$$\mathbb{V}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0}$$

ou

$$r_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\mathbb{V}_0}$$

e portanto, as superfícies definidas por um potencial fixo são esferas cujos raios são dados pela equação acima. A figura 5.8 apresenta algumas superfícies equipotenciais para uma carga pontual, juntamente com as linhas de campo elétrico.

Para um fio infinito, o potencial elétrico é dado pela equação 5.29,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(R) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{R}$$

Q > 0

Q < 0

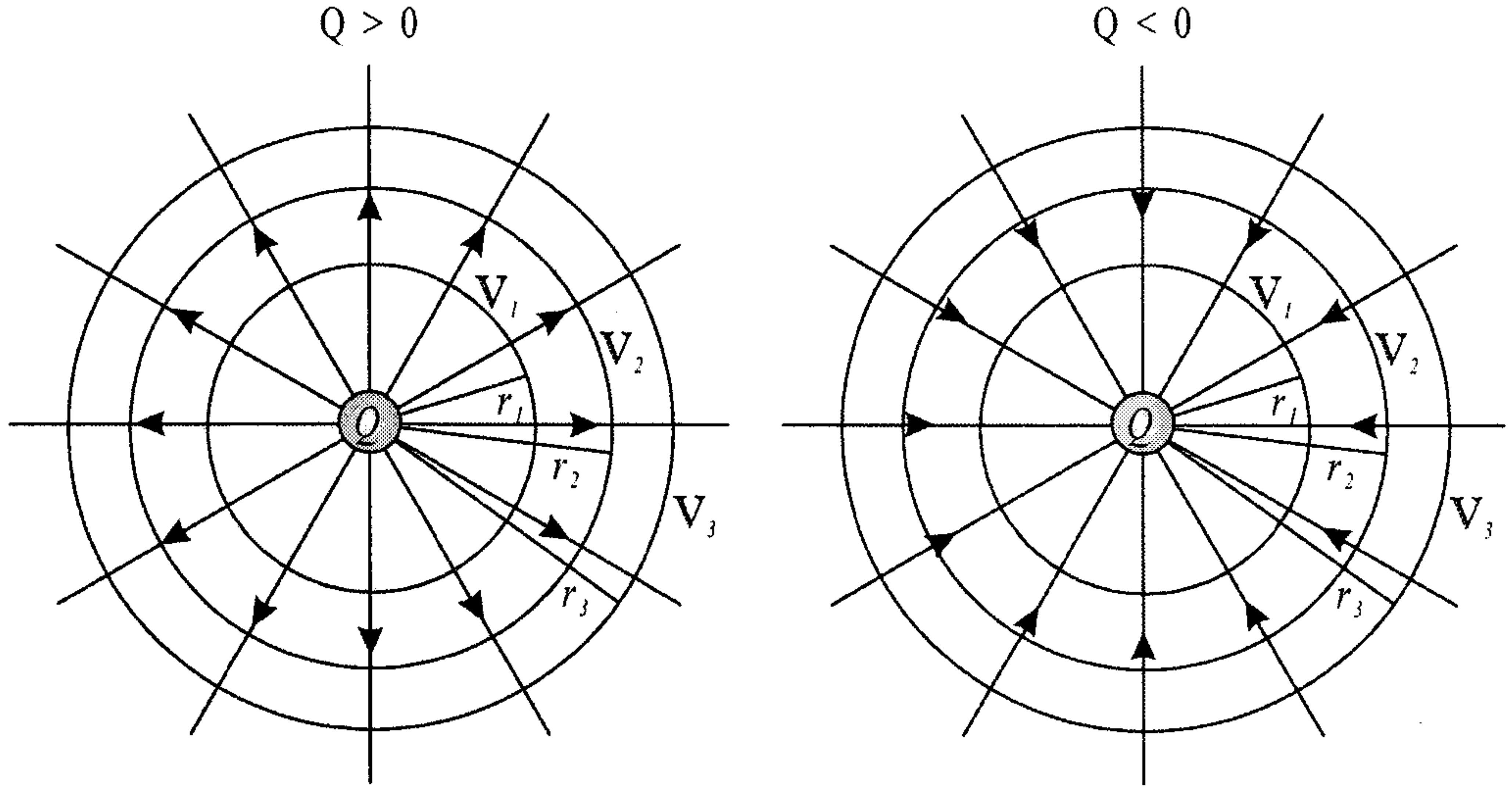



Figura 5.8: Superfícies equipotenciais esféricas para uma carga pontual, e as linhas de força do campo elétrico.

Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}_0 &= \mathbb{V}(R) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{\rho_0}{R} \\
\ln\frac{\rho_0}{R} &= \frac{2\pi\epsilon_0(\mathbb{V}(R) - \mathbb{V}_0)}{\lambda} \\
\frac{\rho_0}{R} &= \exp\left\{\frac{2\pi\epsilon_0(\mathbb{V}(R) - \mathbb{V}_0)}{\lambda}\right\} \\
\rho_0 &= R\exp\left\{\frac{2\pi\epsilon_0(\mathbb{V}(R) - \mathbb{V}_0)}{\lambda}\right\}
\end{aligned}
$$

e as superfícies equipotenciais são cilindros infinitos de raios definidos pela expressão acima, pois todos os termos do lado direito são constantes. A figura 5.9 mostra algumas superfícies equipotenciais, juntamente com as linhas de campo elétrico.

Uma propriedade interessante das superfícies equipotenciais decorre da equação 5.19,

$$-\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = d\mathbb{V}$$

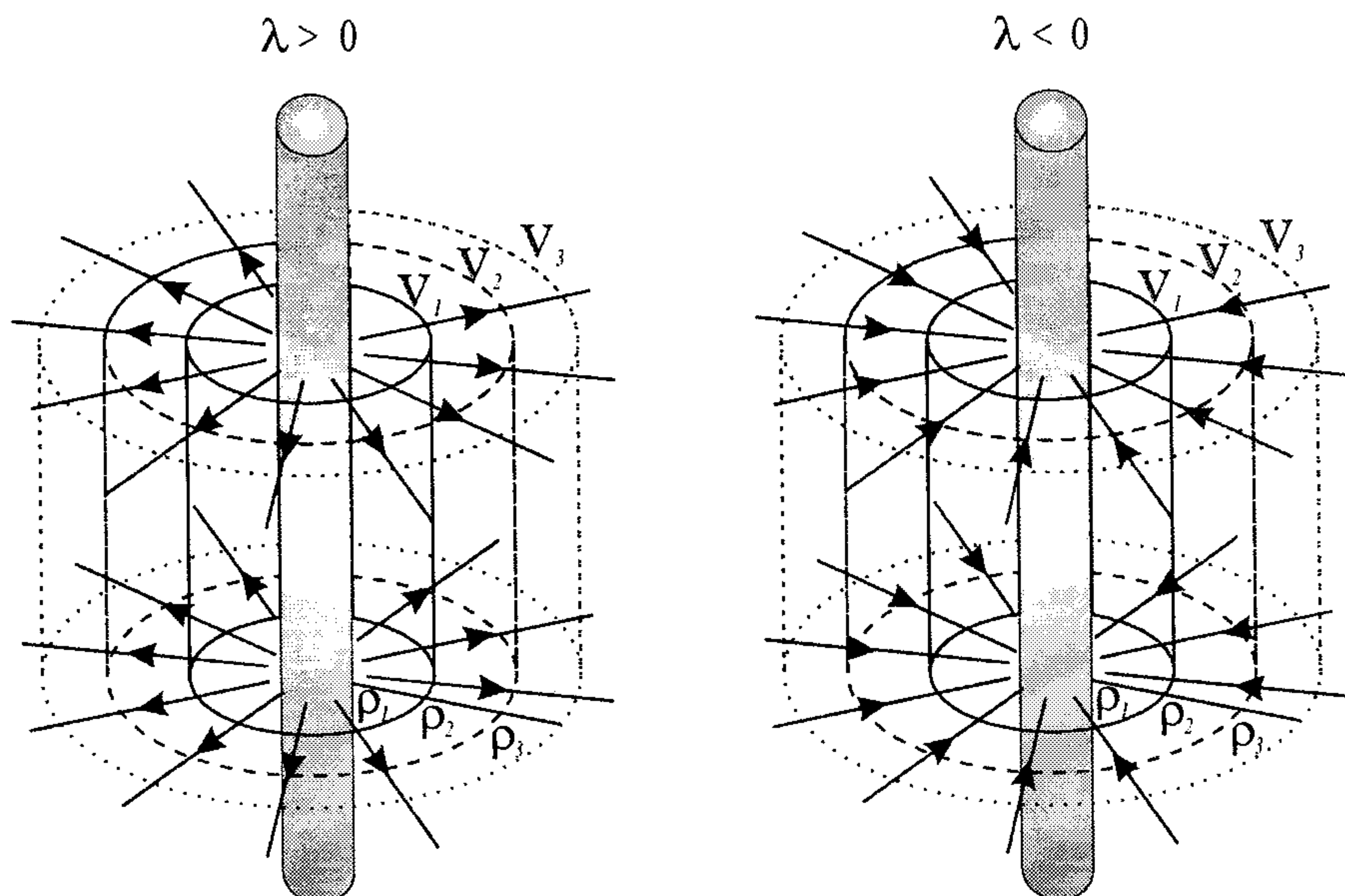



Figura 5.9: Superfícies equipotenciais cilíndricas para um fio infinito.

Considerando que numa superfície equipotencial $\mathbb{V}$ é constante, $d\mathbb{V} = 0$, e desse modo,

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

onde $d\vec{\ell}$ é um segmento de arco sobre a superfície equipotencial. Nem $\vec{\mathcal{E}}$ nem $d\vec{\ell}$ são sempre nulos, o que significa que $\vec{\mathcal{E}} \perp d\vec{\ell}$, ou seja, o campo elétrico é sempre normal à superfície equipotencial. Como as linhas de campo representam o campo elétrico, elas também são perpendiculares à superfície equipotencial em todos os pontos. E como o campo elétrico está relacionado ao potencial por

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V}$$

sendo o gradiente de uma função um vetor que está na direção da maior taxa de variação dessa função, as linhas de campo representam as "trajetórias" em que o potencial elétrico apresenta as maiores taxas de variação.

Outra situação importante ocorre com condutores de qualquer formato em equilíbrio. A superfície do condutor é sempre uma superfície equipotencial,

pois o campo elétrico na superfície de um condutor em equilíbrio é normal à superfície, como vimos no exemplo 4.15, e ele é dado por

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{n}$$

onde $\hat{n}$ é a normal à superfície. Assim, se $d\vec{\ell}$ é um segmento qualquer tangente à superfície do condutor, $\vec{\mathcal{E}} \perp d\vec{\ell}$ e $d\mathbb{V} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = 0$, de modo que o potencial é constante sobre o condutor.

As figuras 5.8 e 5.9 são semelhantes aos mapas de contorno usados em Topografia, Geografia e Meteorologia para o mapeamento de relevos, de regiões com pressões iguais (isóbaras), ou de regiões com temperaturas iguais (isotermas). Esses mapas normalmente apresentam cores diferentes para valores de potencial, altura, pressão ou temperatura diferentes, no sentido de facilitar a interpretação dessas grandezas.

5.5 Mãos à Obra: Gerador de Van de Graaff

As experiências envolvendo potenciais elétricos precisam de uma quantidade grande de cargas elétricas, muito maior do que as que são obtidas mediante processos de eletrização por atrito de pentes ou bastões, por exemplo. Vamos precisar de um dispositivo chamado *gerador de Van de Graaff*, mostrado esquematicamente na figura 5.10, que consegue acumular uma grande quantidade de cargas e que, com isso, gera potenciais elétricos elevados.

Conforme mostra a figura 5.10, um gerador de Van de Graaff consiste em um condutor de forma esférica, semelhante a um capacete, oco e suspenso por apoios bastante isolantes, para que a carga não se perca para a Terra. Por dentro do condutor oco passa uma correia de material isolante, que está em contato com uma ponteira metálica fixada ao condutor. Essa correia é posta em movimento por um motor elétrico rotativo. Na parte mais baixa da correia existe uma ponteira e uma placa, metálicas, e a correia fica entre esses condutores, que são submetidos a uma diferença de potencial que pode ser bastante elevada (cerca de 10000 V). Entre os condutores ocorrem descargas elétricas semelhantes a pequenos raios [3], e uma parcela das cargas nessas

---

[3] As propriedades de descargas através de pontas serão estudadas no capítulo 6.

descargas passa para a correia, que as transporta para cima. Como a correia está em contato com o condutor oco através da ponteira na parte superior, as cargas se movem até alcançar a superfície externa do condutor, e elas se acumulam nessa região até um certo limite, a partir do qual ocorrem descargas para a Terra ou para outros condutores. Se o condutor esférico estiver bem isolado do solo, a carga acumulada pode ser bastante grande, gerando um potencial da ordem de milhões de volts. O gerador de Van de Graaff, como exposto acima, é utilizado como acelerador de partículas carregadas em virtude dos elevados potenciais que ele pode gerar. Estes resultam em campos elétricos e, conseqüentemente, em forças elétricas de grande intensidade sobre as partículas, produzindo acelerações e velocidades altas, o que é interessante para o estudo de colisões entre partículas subatômicas carregadas. Geradores desse tipo podem ter cerca de 15 m de altura, e o diâmetro do condutor oco tem em torno de alguns metros.

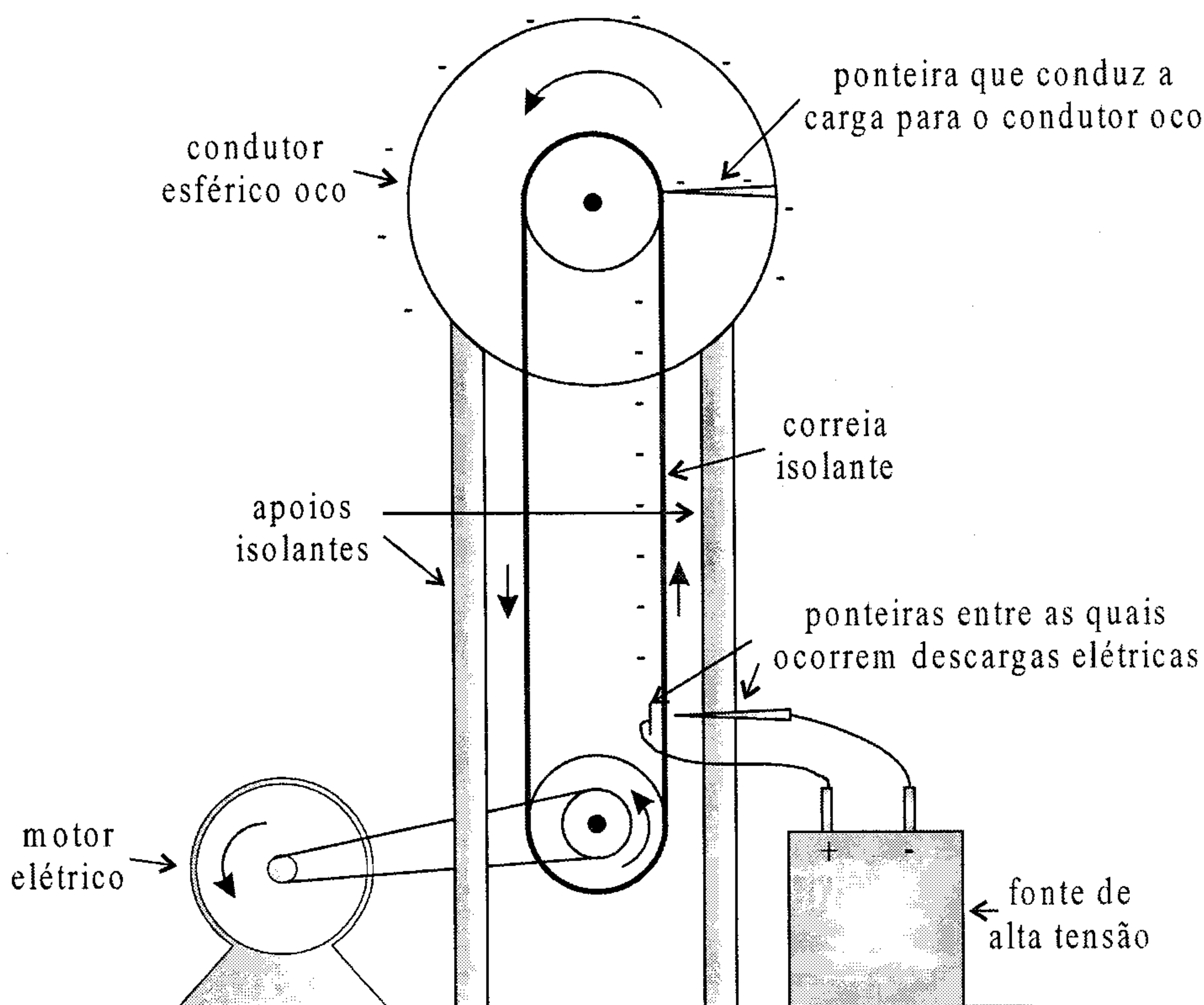



Figura 5.10: Um esquema de um gerador de Van de Graaff.

Para demonstrações em laboratórios de ensino, é comum construir geradores cuja correia é movimentada manualmente, com o auxílio de uma manivela, e não com um motor elétrico. Além disso, ao invés de usar uma fonte de alta tensão, basta encostar uma ponteira aterrada na correia, que se eletriza por atrito. O gerador mede cerca de 1 m e o condutor esférico tem aproximadamente 20 cm de diâmetro. Com estas condições, a diferença de potencial pode chegar à ordem de 10000 V, o que já é suficiente para experiências bastante interessantes. Nesta seção vamos estudar uma delas, e no capítulo 6 veremos outras, que precisam da teoria desenvolvida naquele capítulo.

5.5.1 Gerador de Van de Graaff e Linhas de Campo Elétrico

Para esta experiência você vai precisar do seguinte.

1. Um gerador de Van de Graaff.
2. Duas bolinhas de isopor ou cortiça.
3. Papel-alumínio.
4. Fita adesiva.
5. Um recipiente plástico com óleo (de cozinha, por exemplo).
6. Dois fios condutores metálicos com as pontas desencapadas.
7. Sementes de grama.
8. Duas placas metálicas planas que possam ser colocadas dentro do recipiente.
9. Se for possível, dois cilindros metálicos ocos, sem as bases, e duas caixas retangulares ocas, também sem as bases. Se quiser, você pode utilizar outras formas geométricas, como triângulos, pentágonos, etc. Procure conseguir materiais de vários tamanhos, para que uns possam ser colocados dentro dos outros.
10. Eletroscópio ou pêndulo eletrostático.

Para realizar as experiências, despeje no recipiente plástico um pouco de óleo e depois espalhe as sementes de grama sobre a superfície do óleo. Em seguida, fixe um dos fios, com a fita adesiva, na superfície externa do condutor

esférico oco do gerador de Van de Graaff, e o outro fio na ponteira aterrada do gerador. Então, envolva as duas bolinhas de isopor com o papel-alumínio e fixe-as em cada uma das pontas livres dos fios, de forma que o metal dos fios encoste no papel-alumínio. Prontas estas duas ponteiras esféricas, coloque-as dentro do óleo no recipiente, como mostra a figura 5.11, e ligue o Van de Graaff.

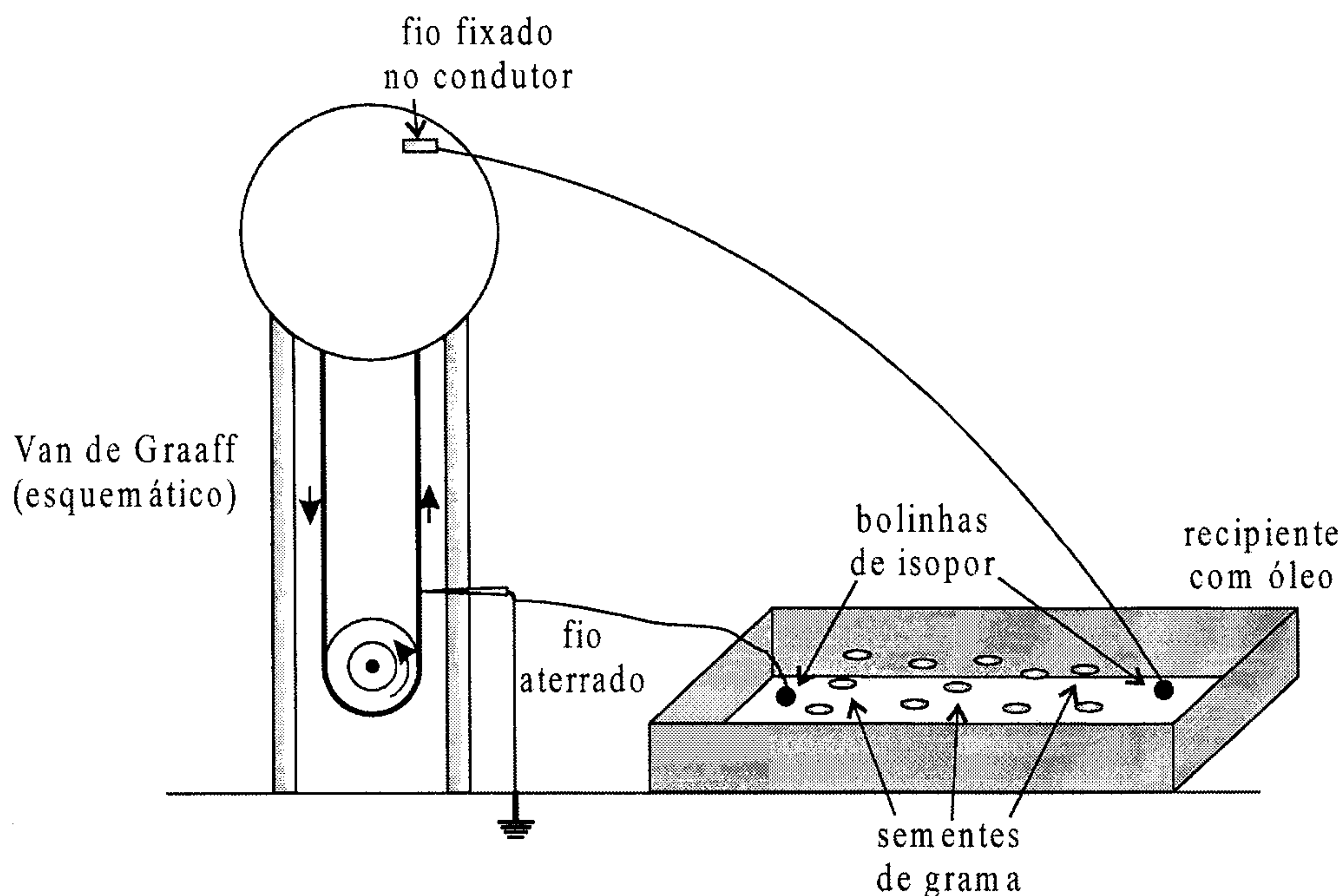



Figura 5.11: Esquema da experiência com linhas de campo envolvendo o gerador de Van de Graaff.

Após um certo tempo de carregamento (você deve verificar, com o eletroscópio ou o pêndulo eletrostático, se o condutor esférico do Van de Graaff está carregado), o Van de Graaff produz uma diferença de potencial alta, que aparece entre as duas bolinhas de isopor, e um campo elétrico se estabelece entre elas. Esse campo elétrico vai fazer com que as sementes de grama se orientem, e você ficará com uma configuração semelhante à das linhas de campo entre duas cargas de sinais opostos, apresentada na figura 4.6. Procure variar a distância entre as bolinhas e veja o que ocorre com as sementes. Depois, substitua as bolinhas pelas duas placas metálicas e observe as linhas

de campo neste caso. Repita a experiência com uma placa e uma bolinha. Se você tiver outros condutores de outros formatos, realize as experiências com todas as combinações possíveis, verificando inclusive o que ocorre quando um condutor é colocado dentro do outro. Realize as experiências com materiais isolantes, utilizando placas de plástico e tirando o papel-alumínio das bolinhas de isopor. Depois de todas as experiências, responda ao seguinte.

- Se você souber de que são feitas a correia e a ponteira metálica que encosta na correia, descubra o sinal da carga adquirida pelo Van de Graaff.

- O que você observa quando as duas bolinhas estão no óleo? O que ocorre quando a distância entre elas é modificada? Quando as bolinhas estão sem o papel-alumínio, o que muda? Tente desenhar as superfícies equipotenciais neste caso.

- Como é a configuração do campo elétrico entre as duas placas? Faça um desenho das linhas de campo e das superfícies equipotenciais. O que muda quando a distância entre as placas é alterada? E quando as placas são de material isolante?

- Desenhe a configuração do campo elétrico e das superfícies equipotenciais para o caso de uma placa metálica e uma bolinha. Verifique o que ocorre quando a distância entre elas muda, e também quando uma delas ou ambas são trocadas por material isolante.

- Se você tiver outros condutores de outros formatos, desenhe as linhas de campo elétrico e as superfícies equipotenciais para todas as combinações que você fez. Verifique a influência da distância entre os condutores, e também o fato de o material ser condutor ou isolante. Além disso, verifique a existência da blindagem eletrostática, colocando um condutor dentro do outro.

- Se um segundo Van de Graaff estiver disponível, realize as esperiências novamente, agora fazendo combinações com quatro formas de condutores e isolantes. Em todos os casos, desenhe as equipotenciais e linhas de campos. Estas experiências podem ser repetidas com quantos Van de Graaff estiverem disponíveis, produzindo os mais diferentes arranjos de cargas, campos e potenciais elétricos.

- Utilizando as duas placas metálicas como ponteiras no óleo, pense no que ocorre quando um cilindro oco metálico é colocado entre as placas. Desenhe as linhas de campo e as equipotenciais que você espera que apareçam e depois verifique experimentalmente a sua suposição. Faça isso para vários tipos de condutores e isolantes entre ponteiras de formas diferentes.

5.6 Exercícios

5.1 Considere um quadrado de lado ℓ formado por cargas Q, $2Q$, $-Q$ e Q. Calcule o potencial elétrico no centro do quadrado. Obtenha também a energia potencial elétrica total do sistema.

5.2 Calcule o potencial elétrico gerado por um fio condutor finito, de densidade de cargas λ, como mostra a figura 3.11 do exemplo 3.8.

5.3 Um pentágono de lado a tem quatro cargas em seus vértices, de valores Q, $2Q$, $-Q$ e $\frac{Q}{2}$, nesta ordem. Qual é o potencial elétrico no centro do pentágono? Qual é o valor da carga q que deve ser colocada no quinto vértice de modo a fazer com que o potencial elétrico no centro do pentágono seja nulo?

5.4 Uma esfera de raio R tem a seguinte densidade de carga:

$$\rho = \rho_0(1 - e^{-\frac{r}{R}}) \qquad r \leq R$$

Calcule o potencial e o campo elétrico dentro e fora da esfera.

5.5 Obtenha o potencial elétrico gerado por um plano retangular finito de lados a e b, com uma densidade superficial homogênea σ, a uma distância $\vec{r}$ do centro do plano.

5.6 Considerando que um gerador de Van de Graaff tem um condutor esférico de raio 25 cm e que ele produz um potencial de 12000 V a 12 mm da superfície esférica, ache a carga contida nele, considerando que ela se distribua de forma homogênea pela calota esférica do condutor.

5.7 Partindo da expressão 5.32 para o potencial elétrico de um dipolo, obtenha o campo elétrico 4.26 desse dipolo.

5.8 Considere dois planos infinitos paralelos entre si, com densidades superficiais σ e -2σ, separados por uma distância d. Calcule o potencial e o campo elétrico gerados por eles em todas as regiões do espaço.

5.9 Uma esfera de raio R contém uma carga Q distribuída de forma homogênea sobre seu volume. Calcule o potencial e o campo elétrico gerados por essa esfera em todo o espaço. Desenhe as superfícies equipotenciais.

5.10 No exercício anterior, a carga Q vale $4,5 \times 10^{-5}$ C, e a esfera tem 10 cm de raio. Uma carga $q = -2,3 \times 10^{-6}$ C, situada a 35 cm do centro C da esfera, é trazida para uma posição a 15 cm de C. Calcule o trabalho elétrico realizado neste processo. É necessário saber as posições vetoriais ocupadas pela carga antes e depois do deslocamento? Por quê?

Capítulo 6

Potenciais Elétricos, II: Equação de Laplace

No capítulo anterior vimos os conceitos fundamentais envolvendo potenciais elétricos em meios condutores ou no vácuo e calculamos esta grandeza para algumas distribuições de cargas. Entretanto, essas distribuições têm certas simetrias que facilitam muito os cálculos, ou então, nos concentramos apenas em certos pontos do espaço em que as equações podem ser facilmente resolvidas, como, por exemplo, o eixo do disco ou do anel de cargas. Se quisermos determinar o potencial gerado pelo disco ou anel em qualquer ponto do espaço, não apenas no eixo, precisamos resolver uma integral extremamente complicada e, em alguns casos, até mesmo impossível de efetuar. Para estas situações existe um outro modo de encontrar o potencial elétrico para um certo problema, que consiste em resolver uma equação diferencial parcial chamada *equação de Poisson*, quando existem densidades de cargas livres, ou *equação de Laplace*, quando as densidades de cargas livres são nulas. Neste último caso, podem existir cargas induzidas, e o problema é estabelecido com condições de contorno dadas pelos valores dos potenciais em um ou mais dos condutores que formam a configuração do sistema elétrostático em estudo. Vejamos então a dedução destas equações.

6.1 Equações de Poisson e de Laplace

Podemos obter a equação de Poisson mediante a combinação da expressão 4.14, que é a primeira lei de Maxwell da Eletrostática escrita na forma diferencial, para meios sem dielétricos,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

com a equação 5.17, que relaciona o campo elétrico com o gradiente negativo do potencial elétrico,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla \mathbb{V}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot (-\nabla \mathbb{V}) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ -\nabla \cdot \nabla \mathbb{V} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

ou

$$\nabla^2 \mathbb{V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{6.1}$$

que é a equação de Poisson. O operador ∇^2, chamado Laplaciano, é dado em coordenadas retangulares pela expressão 1.57 [1],

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

A equação de Poisson estabelece a relação existente entre uma certa distribuição de cargas $\rho(\vec{r})$ conhecida e o potencial elétrico gerado por ela. No entanto, pode ocorrer que numa certa região em que estamos interessados para um dado problema a densidade de cargas seja nula. Neste caso, as condições de contorno do problema são dadas através da fixação dos valores dos potenciais nas superfícies de alguns dos condutores, e não através do conhecimento prévio das distribuições de cargas $\rho(\vec{r})$. É claro que esses potenciais são

[1] Veja o apêndice B para a dedução do Laplaciano em coordenadas retangulares, cilíndricas e esféricas.

gerados por cargas, mas estas estão situadas fora da região de interesse para o sistema eletrostático em questão. Assim, neste caso, a equação de Poisson se transforma na equação de Laplace, pois $\rho(\vec{r}) = 0$, isto é,

$$\nabla^2 \mathbb{V} = 0 \tag{6.2}$$

que é a equação diferencial de Laplace, que vamos resolver para alguns casos relevantes. Antes, porém, precisamos considerar a questão da unicidade das soluções obtidas para as equações de Poisson e de Laplace.

6.2 Unicidade da Solução das Equações de Poisson e de Laplace

A equação de Poisson 6.1,

$$\nabla^2 \mathbb{V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

estabelece uma equação diferencial para o potencial elétrico $\mathbb{V}$, numa região do espaço de volume V, delimitada por uma superfície fechada S. Essa equação diferencial precisa de condições auxiliares, que normalmente são condições de contorno, para que a solução ou soluções sejam completamente determinadas. Isto origina a seguinte questão: dadas as condições de contorno em número suficiente, a equação de Poisson, e a equação de Laplace, que é um caso particular daquela, têm apenas uma solução, ou pode haver mais soluções? Para responder a esta pergunta, precisamos considerar dois teoremas importantes.

O primeiro teorema diz respeito à possibilidade de sobrepor duas ou mais soluções da equação de Laplace 6.2,

$$\nabla^2 \mathbb{V} = 0$$

para formar a solução geral. Ele é enunciado da seguinte forma:

Teorema 6.1. *Se $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$, ..., $\mathbb{V}_n$ forem soluções linearmente independentes da equação de Laplace 6.2, então a solução geral é a soma de todas as soluções, com coeficientes apropriados, ou seja,*

$$\mathbb{V} = a_1 \mathbb{V}_1 + a_2 \mathbb{V}_2 + \cdots + a_n \mathbb{V}_n \tag{6.3}$$

Demonstração. A demonstração deste teorema é bastante simples. Vamos tomar o Laplaciano da equação 6.3, isto é,

$$\nabla^2 \mathbb{V} = \nabla^2 \big(a_1 \mathbb{V}_1 + a_2 \mathbb{V}_2 + \cdots + a_n \mathbb{V}_n \big)$$
$$\nabla^2 \mathbb{V} = a_1 \nabla^2 \mathbb{V}_1 + a_2 \nabla^2 \mathbb{V}_2 + \cdots + a_n \nabla^2 \mathbb{V}_n$$

Como $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$, ..., $\mathbb{V}_n$ são soluções da equação de Laplace, temos

$$\nabla^2 \mathbb{V}_1 = 0 \qquad \nabla^2 \mathbb{V}_2 = 0 \qquad \nabla^2 \mathbb{V}_n = 0$$

e assim,

$$\nabla^2 \mathbb{V} = a_1.0 + a_2.0 + \cdots + a_n.0$$
$$\nabla^2 \mathbb{V} = 0$$

de modo que $\mathbb{V}$ satisfaz a equação de Laplace. As constantes a_n devem ser escolhidas de modo a reproduzir as condições de contorno dadas.

□

Portanto, este teorema nos diz que a soma das soluções linearmente independentes da equação de Laplace, multiplicadas por um coeficiente apropriado, produz uma solução geral. Isto leva à seguinte questão: quantas soluções gerais existem, ou, de outro modo, para um dado problema com condições de contorno fixadas, a determinação dos coeficientes a_n é única, ou podem ocorrer várias possibilidades? A resposta a esta pergunta é dada pelo teorema da unicidade, apresentado a seguir.

Teorema 6.2. *Sejam $\mathbb{V}_a$ e $\mathbb{V}_b$ duas soluções gerais da equação de Poisson 6.1,*

$$\nabla^2 \mathbb{V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Essas soluções podem ser escritas, mediante a utilização do princípio da superposição, como

$$\mathbb{V}_a = \sum_{i=1}^{n} a_n \mathbb{V}_i$$

e

$$\mathbb{V}_b = \sum_{i=1}^{n} b_n \mathbb{V}_i$$

Se essas soluções satisfazem as mesmas condições de contorno, numa mesma região de volume V, delimitada por uma superfície S, então, necessariamente, $\mathbb{V}_a$ e $\mathbb{V}_b$ diferem, no máximo, por uma constante numérica aditiva.

Demonstração. Antes de iniciarmos a prova do teorema, devemos definir os três tipos de condição de contorno que um problema pode apresentar. Quando um problema estabelece condições de contorno especificando apenas o potencial elétrico $\mathbb{V}$ sobre algumas superfícies, temos condições de contorno de *Dirichlet.* Se a grandeza que é definida nas condições de contorno é a componente do campo elétrico normal às superfícies ($\vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}$), e não o potencial elétrico, elas são chamadas de condições de contorno de *Neumann.* Como o campo elétrico é o gradiente negativo do potencial, é comum utilizar a notação

$$-\vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n} = \nabla \mathbb{V} \cdot \hat{n} = \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial n}$$

para indicar este tipo de condição. Por fim, se as condições de contorno são estabelecidas em termos de $\mathbb{V}$ em algumas superfícies e mediante $\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial n}$ em outras, elas são chamadas de condições de contorno *mistas* ou de *Cauchy.* Vamos nos concentrar principalmente em problemas envolvendo as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann, por que eles são mais simples do que os que envolvem as condições de contorno de Cauchy [2].

Voltando à demonstração, sejam duas soluções gerais $\mathbb{V}_a$ e $\mathbb{V}_b$, ambas satisfazendo a equação de Poisson e as mesmas condições de contorno numa região de volume V, delimitada por uma superfície S. Definindo uma nova solução através de

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_a - \mathbb{V}_b$$

vemos que

$$\nabla^2 \mathbb{V} = \nabla^2 \mathbb{V}_a - \nabla^2 \mathbb{V}_b$$

[2] Os problemas que envolvem condições de Cauchy podem ser bastante complicados, já que o potencial elétrico e o campo elétrico não são grandezas independentes uma da outra. Assim, não é raro um problema com condições de Cauchy ser inconsistente.

$$\nabla^2\mathbb{V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla^2\mathbb{V} = 0$$

e assim, $\mathbb{V}$ satisfaz a equação de Laplace dentro de V. Nesta região, independentemente de as condições de contorno para $\mathbb{V}_a$ ou $\mathbb{V}_b$ serem condições de Dirichlet, Neumann ou Cauchy, elas são as mesmas, e para $\mathbb{V}$, que é a subtração das duas, elas se reduzem a $\mathbb{V}_{\text{superfícies}} = 0$, no caso de condições de Dirichlet, $\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial n}\big|_{\text{superfícies}} = 0$, no caso de condições de Neumann, ou então a uma combinação das duas, se forem condições de Cauchy.

A primeira identidade de Green, equação 1.61, estabelece que

$$\int_V \left(\Psi\nabla^2\Phi + \nabla\Phi\cdot\nabla\Psi\right) dV = \oint_S \Phi\nabla\Psi\cdot\hat{n}\,dA$$

Vamos aplicá-la para as seguintes funções: $\Phi = \Psi = \mathbb{V}$, ou seja,

$$\int_V \left(\mathbb{V}\nabla^2\mathbb{V} + \nabla\mathbb{V}\cdot\nabla\mathbb{V}\right) dV = \oint_S \mathbb{V}\,\nabla\mathbb{V}\cdot\hat{n}\,dA$$

Como $\mathbb{V}$ satisfaz a equação de Laplace, temos

$$\int_V |\nabla\mathbb{V}|^2\, dV = \oint_S \mathbb{V}\frac{\partial\,\mathbb{V}}{\partial n}\, dA$$

Agora, como as condições de contorno para $\mathbb{V}$ são ou $\mathbb{V}_{\text{superfícies}} = 0$ ou $\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial n}\big|_{\text{superfícies}} = 0$, a integral do lado direito se anula, já que ela é feita sobre as superfícies das condições de contorno. Portanto,

$$\int_V |\nabla\mathbb{V}|^2\, dV = 0$$

Como $|\nabla\mathbb{V}|^2$ é uma grandeza não-negativa, para que sua integral se anule é necessário que $\nabla\mathbb{V} = 0$, ou seja, $\mathbb{V}$ deve ser uma constante dentro de V.

Se as condições de contorno são de Dirichlet, então, sobre as superfícies, temos $\mathbb{V} = 0$. Como $\mathbb{V}$ é uma constante, o que foi demonstrado acima, em toda a região V devemos ter $\mathbb{V} = 0$. E como $\mathbb{V} = \mathbb{V}_a - \mathbb{V}_b$, isso significa que $\mathbb{V}_a = \mathbb{V}_b$, de modo que a solução é única.

Quando as condições de contorno são de Neumann, sobre as superfícies temos $\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial n} = \nabla\mathbb{V}\cdot\hat{n} = 0$, o que está de acordo com o fato de que $\mathbb{V}$ é uma constante em V e que, conseqüentemente, seu gradiente é nulo. Neste caso, temos $\mathbb{V} = \mathbb{V}_0$, e como $\mathbb{V} = \mathbb{V}_a - \mathbb{V}_b$, achamos

$$\mathbb{V}_a = \mathbb{V}_b + \mathbb{V}_0$$

ou seja, as soluções diferem por uma constante aditiva. Entretanto, como o potencial elétrico depende de que um potencial de referência seja estabelecido, apenas diferenças de potencial fazem sentido físico, do mesmo modo que apenas diferenças de energia são importantes.

Vale lembrar, por exemplo, que, ao levantarmos um corpo do chão até uma altura h, podemos colocar a referência da energia potencial gravitacional no chão, no ponto à altura h, ou em qualquer outro ponto, já que o trabalho realizado terá sempre o mesmo valor.

Assim, podemos incluir a constante $\mathbb{V}_0$ em $\mathbb{V}_a$ ou $\mathbb{V}_b$, de forma que, essencialmente, $\mathbb{V}_a = \mathbb{V}_b$. Novamente, a solução é única.

Por fim, quando as condições de contorno são mistas, ou de Cauchy, a equação

$$\int_V |\nabla \mathbb{V}|^2 \, dV = 0$$

ainda permanece, de forma que $\nabla \mathbb{V} = 0$, o que significa que $\mathbb{V}$ é novamente uma constante dentro do volume V. Como em algumas superfícies as condições de Cauchy fazem com que $\mathbb{V} = 0$, isso indica que em todo o volume V devemos ter $\mathbb{V} = 0$. Portanto, recaímos no caso das condições de contorno de Dirichlet, e observamos que a solução é única. Desse modo, demonstramos todos os casos possíveis, bem como o teorema.

□

Concluindo, o teorema 6.2 estabelece que, após encontrarmos uma solução geral para um dado problema eletrostático numa região de volume V, delimitado pela superfície S e sujeito a condições de contorno de Dirichlet, Neumann ou Cauchy, ele está resolvido, uma vez que esta solução geral é a sua única solução. Esta verificação será importante para o estudo das soluções da equação de Laplace nos sistemas de coordenadas mais importantes, o que é feito a seguir.

6.3 Equação de Laplace em Coordenadas Retangulares

A resolução da equação de Laplace em coordenadas retangulares é muito simples. Vamos estudar os casos de duas e três dimensões, que são bastante relevantes.

6.3.1 Equação de Laplace em Coordenadas Retangulares Bidimensionais

Vamos começar, resolvendo a equação de Laplace em coordenadas retangulares em duas dimensões, pois este caso é o mais simples dos que tem um interesse prático. Por exemplo, um cabo de transmissão retangular, longo e achatado, pode ser aproximado por um problema bidimensional em coordenadas retangulares. A equação de Laplace em coordenadas retangulares em duas dimensões é

$$\nabla^2 \mathbb{V} = \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial y^2} = 0$$

e para resolver essa equação diferencial parcial, vamos tentar usar o método de separação de variáveis, supondo que a solução seja dada pelo produto de duas funções, uma para cada variável independente, ou seja,

$$\mathbb{V}(x, y) = X(x)Y(y) \tag{6.4}$$

o que resulta na equação diferencial

$$\frac{\partial^2 [X(x)Y(y)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [X(x)Y(y)]}{\partial y^2} = 0$$

ou

$$Y(y)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial x^2} + Y(y)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial y^2} + X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0$$

As derivadas das funções em relação às variáveis das quais elas dependem se transformam em derivadas ordinárias, enquanto as derivadas em relação às variáveis das quais elas não são funções são nulas, e assim,

$$Y(y)\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x)\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0$$

Dividimos tudo por $X(x)Y(y)$ [3] e separamos o termo em Y, ou seja,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$$

O lado direito desta equação depende, no máximo, de y, enquanto o lado esquerdo depende, no máximo, de x. Portanto, para que ambos sejam iguais, eles devem ser uma constante, que tomaremos como sendo $-k^2$.

Para ficar mais claro, vamos considerar que o lado esquerdo resulte na função mais simples de x, excetuando uma constante, que é o próprio x. Neste caso, temos

$$x = \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}$$

o que é impossível, pois o lado direito depende, no máximo, de y e não pode ser igual a x. Considerando agora o lado direito como sendo y, que é a função de y mais simples, excetuando a constante, ficamos com

$$\frac{x}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = y$$

o que também é impossível, pois o lado esquerdo depende, no máximo, de x. Portanto, somente uma constante numérica permite que os dois lados sejam iguais.

Com as considerações anteriores, obtemos a expressão

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2$$

que origina duas equações,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k^2$$

e

$$-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2$$

as quais ficam

[3] Note que nem $X(x)$ nem $Y(y)$ são identicamente nulos, caso contrário teríamos $\mathbb{V} = X(x)Y(y) = 0$ em todo o espaço, que é uma solução trivial sem grande interesse físico.

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k^2X = 0 \tag{6.5a}$$

e

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - k^2Y = 0 \tag{6.5b}$$

Ambas são equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes e elas são resolvidas, quando $k \neq 0$, através da substituição $X, Y = Ae^{mx,y}$, o que resulta numa equação chamada *equação característica*. A primeira tem a equação característica

$$m^2 + k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm ik$$

e ela origina as soluções

$$m = ik \Rightarrow X = Ae^{ikx}$$
$$m = -ik \Rightarrow X = Be^{-ikx}$$

que podem ser combinadas para dar a solução geral

$$X(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

ou, de outra forma, através da relação de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \tag{6.6}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} X(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ &= A\big[\cos kx + i\,\text{sen}\,kx\big] + B\big[\cos(-kx) + i\,\text{sen}(-kx)\big] \\ &= A\cos kx + Ai\,\text{sen}\,kx + B\cos kx - Bi\,\text{sen}\,kx \\ &= \overbrace{(A+B)}^{a}\cos kx + \overbrace{(A-B)i}^{b}\,\text{sen}\,kx \\ X(x) &= a\cos kx + b\,\text{sen}\,kx \end{aligned} \tag{6.7}$$

Para a segunda, temos a equação característica

$$m^2 - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm k$$

de modo que as soluções são

$$m = k \Rightarrow Y = Ce^{ky}$$
$$m = -k \Rightarrow Y = De^{-ky}$$

as quais formam a solução geral

$$Y(y) = Ce^{ky} + De^{-ky}$$

ou então, utilizando a definição das funções hiperbólicas

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \tag{6.8a}$$

$$\operatorname{senh}\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \tag{6.8b}$$

temos [4]

$$e^{\theta} = \cosh\theta + \operatorname{senh}\theta$$
$$e^{-\theta} = \cosh\theta - \operatorname{senh}\theta$$

e assim,

$$\begin{aligned} Y(y) &= Ce^{ky} + De^{-ky} \\ &= C\big[\cosh ky + \operatorname{senh} ky\big] + D\big[\cosh(-ky) + \operatorname{senh}(-ky)\big] \\ &= C\cosh ky + C\operatorname{senh} ky + D\cosh ky - \operatorname{senh} ky \end{aligned}$$

$$Y(y) = \overbrace{(C+D)}^{c}\cosh ky + \overbrace{(C-D)}^{d}\operatorname{senh} ky$$

---

[4] Somando as equações 6.8a e 6.8b, obtemos

$$\cosh\theta + \operatorname{senh}\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} + \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$
$$\cosh\theta + \operatorname{senh}\theta = e^{\theta}$$

Subtraindo as equações 6.8a e 6.8b, extraímos

$$\cosh\theta - \operatorname{senh}\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} - \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$
$$\cosh\theta - \operatorname{senh}\theta = e^{-\theta}$$

ou

$$Y(y) = c\cosh ky + d\,\text{senh}\,ky \tag{6.9}$$

e reunindo as soluções 6.7 e 6.9, obtemos a solução 6.10 para $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{k\neq 0}(x,y) &= X(x)Y(y)\\ \mathbb{V}_{k\neq 0}(x,y) &= \left[a\cos kx + b\,\text{sen}\,kx\right]\cdot\left[c\cosh ky + d\,\text{senh}\,ky\right]\end{aligned} \tag{6.10}$$

Quando $k = 0$, as equações diferenciais 6.5 tornam-se

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 0$$

e

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

que podem ser integradas, resultando em

$$\begin{aligned}\frac{d^2X}{dx^2} &= 0\\ \int_{B_0}^{x} \frac{d}{dx}\left[\frac{dX}{dx}\right] dx &= \int_{B_0}^{x} 0\ dx\\ \frac{dX}{dx} - \overbrace{\frac{dX(B_0)}{dx}}^{b_0} &= 0\\ \frac{dX}{dx} &= b_0\\ \int_{A_0}^{x} \frac{dX}{dx}\ dx &= \int_{A_0}^{x} b_0\ dx\\ X(x) - \overbrace{X(A_0)}^{a_0'} &= b_0x - b_0A_0\\ X(x) &= \overbrace{a_0' - b_0A_0}^{a_0} + b_0x\\ X_0(x) &= a_0 + b_0x\end{aligned} \tag{6.12}$$

e

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

$$\int_{D_0}^{y} \frac{d}{dy}\left[\frac{dY}{dy}\right] dy = \int_{D_0}^{y} 0\ dy$$

$$\frac{dY}{dy} - \overbrace{\frac{dY(D_0)}{dy}}^{d_0} = 0$$

$$\frac{dY}{dy} = d_0$$

$$\int_{C_0}^{y} \frac{dY}{dy}\ dy = \int_{C_0}^{y} d_0\ dy$$

$$Y(y) - \overbrace{Y(C_0)}^{c_0'} = d_0 y - d_0 C_0$$

$$Y(y) = \overbrace{c_0' - d_0 C_0}^{c_0} + d_0 y$$

$$Y_0(y) = c_0 + d_0 y \tag{6.13}$$

As soluções 6.12 e 6.13 podem ser combinadas, resultando em

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{k=0}(x,y) &= X_0 Y_0 \\ &= [a_0 + b_0 x][c_0 + d_0 y] \\ \mathbb{V}_{k=0}(x,y) &= a_0 c_0 + a_0 d_0 y + b_0 c_0 x + b_0 d_0 xy \end{aligned}$$

Podemos incorporar as constantes em a_0, b_0, c_0 e d_0, ou seja,

$$\mathbb{V}_{k=0}(x,y) = a_0 + b_0 x + c_0 y + d_0 xy \tag{6.14}$$

e a solução geral do problema é formada pela soma das equações 6.10 e 6.14,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(x,y) = {} & a_0 + b_0 x + c_0 y + d_0 xy \\ & + \left[a \cos kx + b \operatorname{sen} kx\right]\left[c \cosh ky + d \operatorname{senh} ky\right] \end{aligned} \tag{6.15}$$

que é a solução geral da equação de Laplace para o problema bidimensional do potencial elétrico em coordenadas retangulares. As constantes a_0, b_0, c_0, d_0, a, b, c, d e k são obtidas através das condições de contorno para cada problema específico.

Exemplo 6.1. *Como exemplo, vamos estudar um sistema formado por uma região retangular, de largura L e muito comprida, delimitada pelas seguintes condições de contorno:*

$$\mathbb{V}(0,y) = 0 \qquad \mathbb{V}(L,y) = 0$$
$$\mathbb{V}(x,0) = \Phi(x) \qquad \mathbb{V}(x,y \to \infty) \to 0$$

Estas condições poderiam representar uma linha de transmissão muito longa e estreita, de espessura desprezível quando comparada com as outras dimensões. Utilizando as condições de contorno dadas, vamos obter as constantes da solução geral do potencial 6.15. A primeira condição nos diz que

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(0,y) &= 0 \\ a_0 + b_0.0 + c_0.0 + d_0.0 + \big[a\cos k.0 + b\,\text{sen}\,k.0\big]\big[c\cosh ky + d\,\text{senh}\,ky\big] &= 0 \\ a_0 + a\big[c\cosh ky + d\,\text{senh}\,ky\big] &= 0 \end{aligned}$$

Para que a expressão acima seja verdadeira, a_0 e a devem ser nulos, e assim,

$$\mathbb{V} = b_0x + c_0y + d_0xy + b\,\text{sen}\,kx\big[c\cosh ky + d\,\text{senh}\,ky\big]$$

Podemos incorporar a constante b nas constantes c e d, ou seja,

$$\mathbb{V} = b_0x + c_0y + d_0xy + \text{sen}\,kx\big[C\cosh ky + D\,\text{senh}\,ky\big]$$

A segunda condição nos fornece

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(L,y) &= 0 \\ b_0L + c_0y + d_0Ly + \text{sen}\,kL\big[C\cosh ky + D\,\text{senh}\,ky\big] &= 0 \\ b_0L + (c_0 + d_0L)y + \text{sen}\,kL\big[C\cosh ky + D\,\text{senh}\,ky\big] &= 0 \end{aligned}$$

Para que a expressão acima seja possível, b_0 e o termo entre parênteses devem se anular, assim como o seno, isto é,

$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ c_0 + d_0L &= 0 \Rightarrow c_0 = -Ld_0 \\ \text{sen}\,kL &= 0 \end{aligned}$$

e para que o seno se anule, é preciso que o ângulo seja um múltiplo inteiro de π, ou seja,

$$\begin{aligned} kL &= n\pi \\ k_n &= \frac{n\pi}{L} \end{aligned}$$

Portanto, agora temos os valores possíveis para k, que depende de n. A solução geral fica

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_n &= -d_0 L y + d_0 x y + \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\left[C_n \cosh\frac{n\pi y}{L} + D_n \operatorname{senh}\frac{n\pi y}{L}\right]\\ \mathbb{V}_n &= d_0 y(x-L) + \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\left[C_n \cosh\frac{n\pi y}{L} + D_n \operatorname{senh}\frac{n\pi y}{L}\right]\end{aligned}$$

o que significa que há uma solução do potencial para cada valor de n.

Quando $y \to \infty$, $\mathbb{V} \to 0$. Por causa disso, $d_0 = 0$, e portanto, precisamos reescrever as funções hiperbólicas em termos das exponenciais, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_n &= \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\left[C_n \cosh\frac{n\pi y}{L} + D_n \operatorname{senh}\frac{n\pi y}{L}\right]\\ &= \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\left[C_n \frac{e^{k_n y} + e^{-k_n y}}{2} + D_n \frac{e^{k_n y} - e^{-k_n y}}{2}\right]\\ &= \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\left[\overbrace{\frac{C_n + D_n}{2}}^{A_n} e^{k_n y} + \overbrace{\frac{C_n - D_n}{2}}^{B_n} e^{-k_n y}\right]\\ \mathbb{V}_n &= \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\left[A_n e^{k_n y} + B_n e^{-k_n y}\right]\end{aligned}$$

e agora, quando $y \to \infty$, a exponencial positiva diverge, enquanto a negativa vai a zero. Assim, é preciso anular o coeficiente A_n da exponencial positiva. Com isto, a solução fica

$$\mathbb{V}_n = B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\frac{n\pi y}{L}}$$

A solução geral é a soma de todas as soluções possíveis, e assim temos, lembrando que $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{V} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}_n\\ \mathbb{V} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\frac{n\pi y}{L}}\end{aligned} \tag{6.16}$$

Por fim, a última condição nos dá

$$\mathbb{V}(x, 0) = \Phi(x)$$

ou

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \, e^{-\frac{n\pi \times 0}{L}}$$
$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \tag{6.17}$$

Observando a expressão acima, vemos que ela é uma expansão da função $\Phi(x)$ em uma série de Fourier em senos, discutida na seção 2.2 do capítulo 2. Uma função $f(x')$ qualquer definida no intervalo $0 \leq x \leq \pi$ pode ser escrita como (veja a expressão 2.23)

$$f(x') = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx' \tag{6.18}$$

sendo que os coeficientes b_n são obtidos através da equação 2.24,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x') \operatorname{sen} nx' \, dx' \tag{6.19}$$

No nosso caso, a função $\Phi(x)$ é definida no intervalo $0 \leq x \leq L$, e comparando as expressões 6.17 e 6.18, vemos que

$$x' = \frac{\pi x}{L}$$

e portanto, na integral em 6.19, temos

$$dx' = \frac{\pi}{L} \, dx$$
$$x' = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$x' = \pi \Rightarrow x = L$$

de modo que a integral que fornece os coeficientes B_n fica

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{L} \Phi(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \, \frac{\pi}{L} \, dx$$
$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^{L} \Phi(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \, dx \tag{6.20}$$

Se Φ é na verdade uma constante, $\Phi(x) = \Phi_0$, e a integral pode ser resolvida, ou seja,

$$
\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \Phi_0 \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= \frac{2\Phi_0}{L}\int_0^L \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= \frac{2\Phi_0}{L}\left[-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L \\
&= -\frac{2\Phi_0}{n\pi}\left[\cos n\pi - 1\right] \\
B_n &= \frac{2\Phi_0}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]
\end{aligned}
$$

Quando n é par, o cosseno vale 1, e se ele for ímpar, seu valor é -1. Portanto,

$$
B_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \dfrac{4\Phi_0}{n\pi}, & n \text{ ímpar} \end{cases} \tag{6.21}
$$

e a solução geral para o potencial fica

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\frac{n\pi y}{L}} \\
&= \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4\Phi_0}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\frac{n\pi y}{L}}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{V} = \frac{4\Phi_0}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\frac{n\pi y}{L}} \tag{6.22}
$$

A expressão em série acima pode ser somada para resultar numa função conhecida. Para tanto, vemos que, pela relação de Euler 6.6,

$$
e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta
$$

e assim, as partes real e imaginária de $e^{i\theta}$ resultam em

$$
\begin{aligned}
\Re(e^{i\theta}) &= \cos\theta \\
\Im(e^{i\theta}) &= \operatorname{sen}\theta
\end{aligned}
$$

e podemos reescrever a equação 6.22 como

$$\mathbb{V} = \frac{4\Phi_0}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{1}{n} \Im(e^{i\frac{n\pi x}{L}})\ e^{-\frac{n\pi y}{L}}$$

$$\mathbb{V} = \Im\left[\frac{4\Phi_0}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{i\frac{n\pi x}{L}}\ e^{-\frac{n\pi y}{L}}\right]$$

$$\mathbb{V} = \Im\left[\frac{4\Phi_0}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{in\pi}{L}(x+iy)}\right]$$

Definindo

$$X = e^{\frac{i\pi}{L}(x+iy)}$$

obtemos

$$\mathbb{V} = \Im\left[\frac{4\Phi_0}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{X^n}{n}\right]$$

Agora, temos a condição

$$\sum_{n=0}^{\infty} X^n = \frac{1}{1-X}$$

que é a soma da série geométrica (veja a seção 2.3). Integrando os dois lados desta equação, obtemos

$$\int_0^X \sum_{n=0}^{\infty} X^n\ dX = \int_0^X \frac{1}{1-X}\ dX$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^X X^n\ dX = -\ln(1-X)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n} = -\ln(1-X)$$

que, sendo muito parecida com a série do potencial, contém tanto termos pares como ímpares. Precisamos retirar os termos pares da série acima. Lembrando, da equação 2.5, que

$$\ln(1+X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}X^n}{n} = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \cdots$$

vemos que, ao somar as duas séries, temos

$$\ln(1+X) - \ln(1-X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}X^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n}$$

ou

$$\ln\frac{1+X}{1-X} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^{n+1}+1]X^n}{n}$$

e quando n é par, a fração na somatória se anula. Portanto,

$$\ln\frac{1+X}{1-X} = \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{2X^n}{n}$$

$$\ln\frac{1+X}{1-X} = 2\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{X^n}{n}$$

A soma acima é exatamente a série do potencial que procuramos, e assim,

$$\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{X^n}{n} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+X}{1-X}$$

de forma que o potencial fica

$$\mathbb{V} = \Im\left[\frac{4\Phi_0}{\pi}\frac{1}{2}\ln\frac{1+X}{1-X}\right]$$

$$\mathbb{V} = \frac{2\Phi_0}{\pi}\Im\left[\ln\frac{1+X}{1-X}\right]$$

Para encontrar o logaritmo de um número complexo, o escrevemos na forma polar, isto é,

$$X = |X|e^{i\alpha}$$

sendo α a fase do número complexo. Assim,

$$\begin{aligned}\ln X &= \ln\left[|X|e^{i\alpha}\right] \\ &= \ln|X| + \ln e^{i\alpha} \\ \ln X &= \ln|X| + i\alpha\end{aligned}$$

Observe que a parte imaginária do logaritmo de um número complexo é a fase do número. Precisamos, portanto, encontrar a fase de

$$\ln\frac{1+X}{1-X}$$

A tangente da fase de um número complexo está relacionada com as partes real e imaginária, através de

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Im(X)}{\Re(X)}$$

e desse modo, precisamos encontrar as partes real e imaginária do número dentro do logaritmo. Para fazer isso, multiplicamos o número pelo complexo conjugado do denominador, ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{1+X}{1-X} &= \frac{1+X}{1-X}\frac{1-X^*}{1-X^*} \\ &= \frac{1+X-X^*-|X|^2}{|1-X|^2} \\ \frac{1+X}{1-X} &= \frac{1-|X|^2+\left(X-X^*\right)}{|1-X|^2}\end{aligned}$$

Entretanto, se $X = a + bi$,

$$\begin{aligned}X - X^* &= a + bi - (a - bi) \\ &= a + bi - a + bi \\ &= 2bi \\ X - X^* &= 2i\Im(X)\end{aligned}$$

e assim,

$$\frac{1+X}{1-X} = \frac{1-|X|^2+2i\Im(X)}{|1-X|^2}$$

Dessa forma,

$$\Re\left[\frac{1+X}{1-X}\right] = \frac{1-|X|^2}{|1-X|^2}$$
$$\Im\left[\frac{1+X}{1-X}\right] = \frac{2\Im(X)}{|1-X|^2}$$

Sendo β o ângulo de fase de $\frac{1+X}{1-X}$, obtemos

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2\Im(X)}{1-|X|^2}$$

e o resultado no logaritmo de $\frac{1+X}{1-X}$ é justamente este ângulo, ou seja,

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\Im(X)}{1-|X|^2}\right)$$

Como

$$X = e^{\frac{i\pi}{L}(x+iy)}$$

temos

$$\begin{aligned} X &= e^{\frac{i\pi}{L}(x+iy)} \\ &= e^{\frac{i\pi x}{L}-\frac{\pi y}{L}} \\ &= e^{\frac{i\pi x}{L}} e^{-\frac{\pi y}{L}} \\ &= e^{-\frac{\pi y}{L}}\left[\cos\frac{\pi x}{L} + i\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}\right] \\ X &= e^{-\frac{\pi y}{L}}\cos\frac{\pi x}{L} + ie^{-\frac{\pi y}{L}}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} \end{aligned}$$

e

$$|X|^2 = e^{-\frac{2\pi y}{L}}$$
$$\Im(X) = e^{-\frac{\pi y}{L}}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}$$

Assim, o ângulo fica

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\Im(X)}{1-|X|^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\beta &= \operatorname{arctg}\left(\frac{2e^{-\frac{\pi y}{L}}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L}}{1-e^{-\frac{2\pi y}{L}}}\right)\\
&= \operatorname{arctg}\left(\frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L}}{e^{\frac{\pi y}{L}}-e^{-\frac{\pi y}{L}}}\right)\\
&= \operatorname{arctg}\left(\frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L}}{2\,\mathrm{senh}\,\frac{\pi y}{L}}\right)\\
\beta &= \operatorname{arctg}\left(\frac{\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L}}{\mathrm{senh}\,\frac{\pi y}{L}}\right)
\end{aligned}$$

e o potencial elétrico torna-se, finalmente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V} &= \frac{2\Phi_0}{\pi}\overbrace{\Im\left[\ln\frac{1+X}{1-X}\right]}^{\beta}\\
\mathbb{V} &= \frac{2\Phi_0}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L}}{\mathrm{senh}\,\frac{\pi y}{L}}\right)
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Agora, é simples verificar que todas as condições de contorno dadas são obedecidas.

Vejamos explicitamente. Quando $x = 0$, o seno no numerador é nulo e o arco cuja tangente é zero é $\beta = 0$. Portanto,

$$\mathbb{V}(0, y) = 0$$

Quando $x = L$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(L, y) &= \frac{2\Phi_0}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{\pi L}{L}}{\mathrm{senh}\,\frac{\pi y}{L}}\\
&= \frac{2\Phi_0}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\overbrace{\mathrm{sen}\,\pi}^{0}}{\mathrm{senh}\,\frac{\pi y}{L}}\\
\mathbb{V}(L, y) &= 0
\end{aligned}$$

Quando $y \to \infty$, o seno hiperbólico diverge no denominador, e o resultado é que a fração tende a zero. Portanto, novamente o potencial se anula. Por fim, quando $y = 0$, $\mathrm{senh}\,0 = 0$, e a fração tende para infinito. No entanto, o arco cuja tangente tende a ∞ é $\beta = \frac{\pi}{2}$, e assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(x,0) &= \frac{2\Phi_0}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}}{\operatorname{senh}0} \\
&= \frac{2\Phi_0}{\pi}\operatorname{arctg}\infty \\
&= \frac{2\Phi_0}{\pi}\frac{\pi}{2} \\
\mathbb{V}(x,0) &= \Phi_0
\end{aligned}$$

que é a quarta e última condição de contorno.

O campo elétrico é obtido através de

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V} = -\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial x} - \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial y}$$

Lembrando que a derivada do arco tangente é

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(u) = \frac{u'}{1+u^2}$$

obtemos, para a parte em $\hat{\mathbf{i}}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_x &= -\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial x} \\
&= -\frac{2\Phi_0}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}}{\operatorname{senh}\frac{\pi y}{L}}\right) \\
&= -\frac{2\Phi_0}{\pi}\frac{\pi}{L}\frac{\dfrac{\cos\frac{\pi x}{L}}{\operatorname{senh}\frac{\pi y}{L}}}{1+\left[\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}}{\operatorname{senh}\frac{\pi y}{L}}\right]^2} \\
\mathcal{E}_x &= -\frac{2\Phi_0}{L}\frac{\cos\frac{\pi x}{L}\operatorname{senh}\frac{\pi y}{L}}{\operatorname{senh}^2\frac{\pi y}{L}+\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{L}}
\end{aligned}$$

e para a parte em $\hat{\mathbf{j}}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_y &= -\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial y} \\
\mathcal{E}_y &= -\frac{2\Phi_0}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}}{\operatorname{senh}\frac{\pi y}{L}}\right)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_y = -\frac{2\Phi_0}{\pi}\frac{\pi}{L}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}\cosh\frac{\pi y}{L}}{\operatorname{senh}^2\frac{\pi y}{L}}}{1+\left[\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}}{\operatorname{senh}\frac{\pi y}{L}}\right]^2}$$

$$\mathcal{E}_y = -\frac{2\Phi_0}{L}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}\cosh\frac{\pi y}{L}}{\operatorname{senh}^2\frac{\pi y}{L}+\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{L}}$$

de modo que o campo elétrico torna-se

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{2\Phi_0}{L(\operatorname{senh}^2\frac{\pi y}{L}+\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{L})}\left[\cos\frac{\pi x}{L}\operatorname{senh}\frac{\pi y}{L}\,\hat{\mathbf{i}}+\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}\cosh\frac{\pi y}{L}\,\hat{\mathbf{j}}\right] \quad (6.24)$$

6.3.2 Equação de Laplace em Coordenadas Retangulares Tridimensionais

Vimos, na subseção anterior, a equação de Laplace em coordenadas retangulares em duas dimensões e também um exemplo de aplicação. Agora, vamos resolver o problema geral em três dimensões. Neste caso, a equação de Laplace fica

$$\nabla^2\mathbb{V} = \frac{\partial^2\mathbb{V}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbb{V}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbb{V}}{\partial z^2} = 0$$

e novamente vamos tentar usar o método de separação de variáveis para resolver esta equação diferencial parcial. Supondo uma solução do tipo

$$\mathbb{V} = X(x)Y(y)Z(z)$$

obtemos

$$\nabla^2\mathbb{V} = 0$$

$$\frac{\partial^2[X(x)Y(y)Z(z)]}{\partial x^2}+\frac{\partial^2[X(x)Y(y)Z(z)]}{\partial y^2}+\frac{\partial^2[X(x)Y(y)Z(z)]}{\partial z^2} = 0$$

ou

$$\begin{aligned}
&Y(y)Z(z)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)Z(z)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial x^2} + X(x)Y(y)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial x^2} \\
&\quad + Y(y)Z(z)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial y^2} + X(x)Z(z)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + X(x)Y(y)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial y^2} \\
&\quad + Y(y)Z(z)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial z^2} + X(x)Z(z)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial z^2} + X(x)Y(y)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0
\end{aligned}$$

As derivadas das funções em relação às variáveis das quais elas dependem se transformam em derivadas ordinárias, enquanto as derivadas em relação às variáveis das quais elas não são funções se anulam, e o resultado é

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2} + +XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

Agora dividimos tudo por $X(x)Y(y)Z(z)$, ou seja,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

e separamos a parte em Z,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$$

O lado esquerdo da equação acima depende, no máximo, de x e y, enquanto o lado direito depende, no máximo, de z. Para que sejam iguais, é preciso que ambos sejam uma constante, que chamaremos de $-k^2$, para facilitar os cálculos. Assim, temos as equações

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2$$

e

$$-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k^2$$

Vamos resolver esta última primeiro, porque ela já está separada. Ela pode ser reescrita como

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = k^2 Z$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$$

e sua equação característica, quando $k \neq 0$, é

$$m^2 - k^2 = 0 \Rightarrow m = \pm k$$

As soluções são

$$\begin{aligned} m = k &\Rightarrow Z = fe^{kz} \\ m = -k &\Rightarrow Z = ge^{-kz} \end{aligned}$$

e elas formam a solução geral

$$Z_{k\neq 0}(z) = fe^{kz} + ge^{-kz} \tag{6.25}$$

que pode, como no caso da solução para y em duas dimensões, ser transformada em senos e cossenos hiperbólicos, isto é,

$$Z_{k\neq 0}(z) = f \cosh kz + g \operatorname{senh} kz$$

Quando $k = 0$, a equação diferencial fica

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

que pode ser integrada, para dar

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= 0 \\ \int_{G_0}^{z} \frac{d}{dz}\left[\frac{dZ}{dz}\right] dz &= \int_{G_0}^{z} 0 \; dz \\ \frac{dZ}{dz} - \overbrace{\frac{dZ(G_0)}{dz}}^{g_0} &= 0 \\ \int_{F_0'}^{z} \frac{dZ}{dz}\, dz &= \int_{F_0'}^{z} g_0 \; dz \\ Z(z) - Z(F_0') &= g_0 z - g_0 F_0' \\ Z(z) &= \overbrace{Z(F_0') - g_0 F_0'}^{f_0} + g_0 z \end{aligned}$$

ou

$$Z_{k=0}(z) = f_0 + g_0 z \tag{6.26}$$

Vamos agora resolver a outra equação diferencial, ou seja,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2$$

Neste caso, isolamos o termo em X e passamos o termo em Y para o outro lado.

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k^2 - \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$$

Esta equação também está separada e ela deve ser uma constante, que chamaremos de $-\ell^2$. Portanto, temos novamente duas equações, ou seja,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\ell^2$$

e

$$-k^2 - \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\ell^2$$

Vamos resolver a equação para X, que fica

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \ell^2 X = 0$$

Esta equação tem como equação característica

$$m^2 + \ell^2 = 0 \Rightarrow m = \pm i\ell$$

e a solução é formada pelas funções

$$m = i\ell \Rightarrow X = ae^{i\ell x}$$
$$m = -i\ell \Rightarrow X = be^{-i\ell x}$$

que formam a solução geral

$$X_{\ell\neq 0}(x) = ae^{i\ell x} + be^{-i\ell x}$$

que pode ser escrita, em termos de senos e cossenos, através da relação de Euler 6.6, de modo que ela fica

$$X_{\ell\neq 0}(x) = a\cos \ell x + b \operatorname{sen} \ell x \tag{6.27}$$

Quando $\ell = 0$, a equação diferencial para X torna-se

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 0$$

cuja solução, à semelhança dos casos anteriores, é

$$X_{\ell=0}(x) = a_0 + b_0 x \tag{6.28}$$

A equação diferencial para Y é

$$-k^2 - \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\ell^2$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} -k^2Y - \frac{d^2Y}{dy^2} &= -\ell^2 Y \\ \therefore \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + k^2Y &= \ell^2 Y \\ \frac{d^2Y}{dy^2} + (k^2 - \ell^2)Y &= 0 \end{aligned}$$

Vamos definir

$$\lambda^2 = k^2 - \ell^2$$

e a equação diferencial fica

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0$$

cuja equação característica resulta em [5]

[5] Aqui, assumimos que $\lambda^2 > 0$. Se este não for o caso, definimos um $(\lambda')^2 = -\lambda^2$, as raízes da equação característica tornam-se reais, e a solução para Y fica semelhante à solução para Z, em termos de senos e cossenos hiperbólicos ou de exponenciais reais.

$$m^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow m = \pm i\lambda$$

e a solução é formada pelas funções

$$m = i\lambda \Rightarrow Y = ce^{i\lambda y}$$
$$m = -i\lambda \Rightarrow Y = de^{-i\lambda y}$$

que formam a solução geral

$$Y_{\lambda \neq 0}(y) = ce^{i\lambda y} + de^{-i\lambda y}$$

ou

$$Y_{\lambda \neq 0}(y) = c \cos \lambda y + d \operatorname{sen} \lambda y \tag{6.29}$$

Quando $\lambda = 0$, a equação diferencial para Y torna-se

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

com a solução conhecida

$$Y_{\lambda=0}(y) = c_0 + d_0 y \tag{6.30}$$

A solução geral do problema em três dimensões é formada pela combinação das equações para X, Y e Z obtidas acima. Quando $k = \ell = \lambda = 0$, a solução é formada pelas equações 6.26, 6.28 e 6.30:

$$\mathbb{V}_{0,0} = \left[a_{0,0} + b_{0,0}x\right]\left[c_{0,0} + d_{0,0}y\right]\left[f_{0,0} + g_{0,0}z\right] \tag{6.31}$$

Quando $\ell = 0$ e $k \neq 0$, $\lambda^2 = k^2$ e $\lambda = \pm k$. A solução é formada pelas equações 6.25, 6.28 e 6.29:

$$\mathbb{V}_{k,0} = \left[a_{k,0} + b_{k,0}x\right]\left[c_{k,0} \cos ky + d_{k,0} \operatorname{sen} ky\right]\left[f_{k,0}e^{kz} + g_{k,0}e^{-kz}\right] \tag{6.32}$$

Se $k = 0$ e $\ell \neq 0$, $\lambda^2 = -\ell^2$, de modo que $\lambda = \pm i\ell$. Assim, a solução para o potencial é formada pelas equações 6.26, 6.27 e 6.29, sendo que esta última precisa ser reescrita em termos de exponenciais reais. Então,

$$\mathbb{V}_{0,\ell} = \left[a_{0,\ell} \cos \ell x + b_{0,\ell} \operatorname{sen} \ell x\right]\left[c_{0,\ell}e^{\ell y} + d_{0,\ell}e^{-\ell y}\right]\left[f_{0,\ell} + g_{0,\ell}z\right] \tag{6.33}$$

Quando $k = \ell \neq 0$, $\lambda = 0$, e a solução é dada pelas equações 6.25, 6.27 e 6.30:

$$\mathbb{V}_{k,k} = \left[a_{k,k} \cos kx + b_{k,k} \operatorname{sen} kx\right]\left[c_{k,k} + d_{k,k} y\right]\left[f_{k,k} e^{kz} + g_{k,k} e^{-kz}\right] \tag{6.34}$$

E por fim, quando $k \neq \ell$, $k \neq 0$ e $\ell \neq 0$, a solução é formada pelas expressões 6.25, 6.27 e 6.29:

$$\mathbb{V}_{k,\ell} = \left[a_{k,\ell} \cos \ell x + b_{k,\ell} \operatorname{sen} \ell x\right]\left[c_{k,\ell} \cos \lambda y + d_{k,\ell} \operatorname{sen} \lambda y\right]\left[f_{k,\ell} e^{kz} + g_{k,\ell} e^{-kz}\right] \tag{6.35}$$

A solução geral é a soma de todas as soluções possíveis, ou seja,

$$\mathbb{V}(x, y, z) = \mathbb{V}_{0,0} + \mathbb{V}_{k,0} + \mathbb{V}_{0,\ell} + \mathbb{V}_{k,k} + \mathbb{V}_{k,\ell}$$

As constantes que aparecem nas expressões acima dependem das condições de contorno de cada problema específico para serem determinadas. Vejamos um exemplo bastante relevante.

Exemplo 6.2. *Considere uma caixa condutora na forma de um paralelepípedo de lados α, β e γ, que delimita um volume fechado no espaço, livre de cargas, como mostra a figura 6.1.*

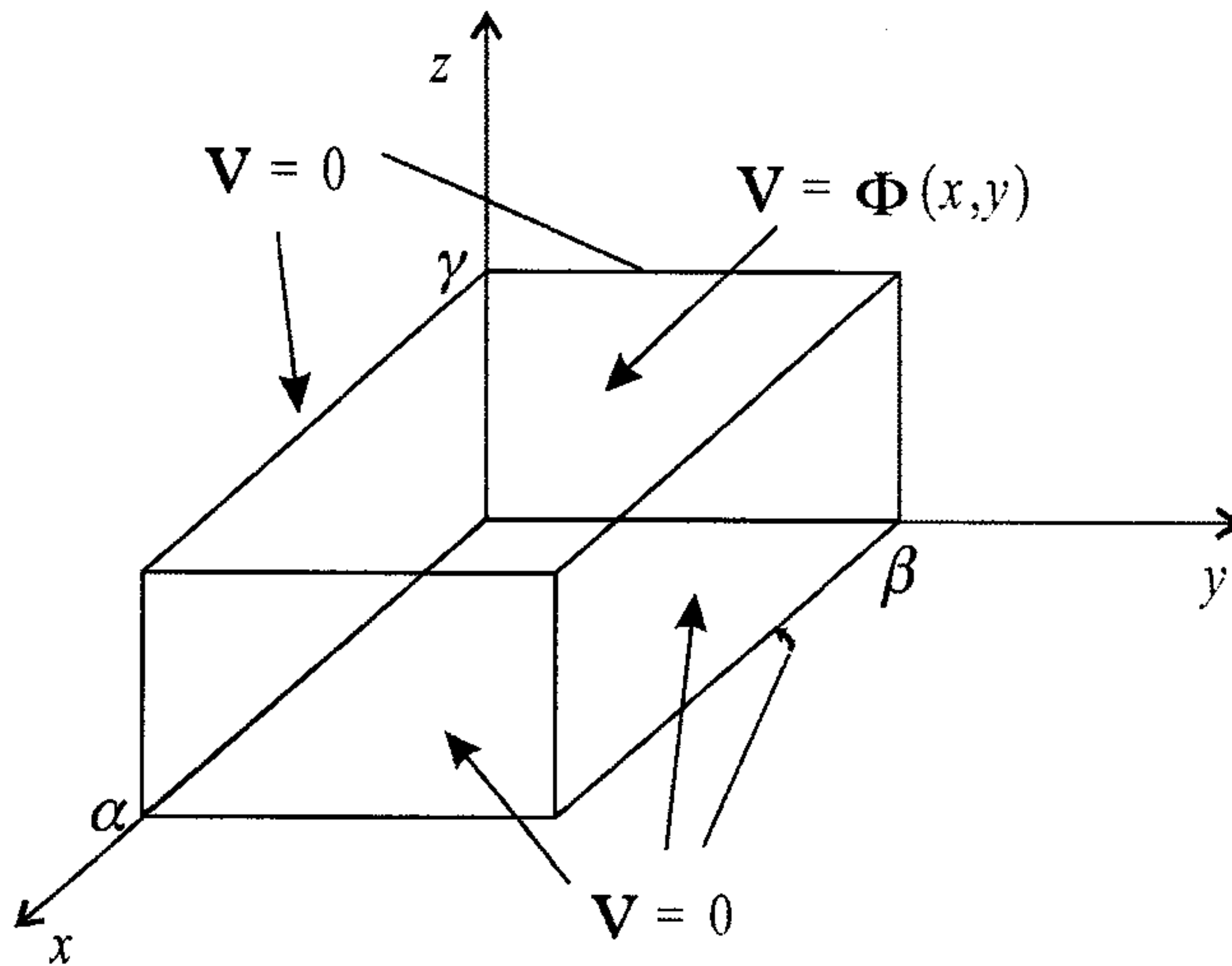



Figura 6.1: Uma aproximação para um forno de microondas caseiro.

Esta configuração poderia ser uma aproximação simples para um forno de microondas caseiro. Vamos considerar as seguintes condições de contorno, para facilitar o problema:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(0,y,z) &= 0 \qquad & \mathbb{V}(\alpha,y,z) &= 0 \\ \mathbb{V}(x,0,z) &= 0 \qquad & \mathbb{V}(x,\beta,z) &= 0 \\ \mathbb{V}(x,y,0) &= 0 \qquad & \mathbb{V}(x,y,\gamma) &= \Phi(x,y) \end{aligned}$$

Queremos encontrar o potencial elétrico dentro desta caixa.

Com a primeira condição dada para $x = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(0,y,z) = \mathbb{V}_{0,0}(0,y,z) + \mathbb{V}_{k,0}(0,y,z) + \mathbb{V}_{0,\ell}(0,y,z) \\ + \mathbb{V}_{k,k}(0,y,z) + \mathbb{V}_{k,\ell}(0,y,z) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(0,y,z) = {} & \left[a_{0,0} + b_{0,0}.0\right]\left[c_{0,0} + d_{0,0}y\right]\left[f_{0,0} + g_{0,0}z\right] \\ & + \left[a_{k,0} + b_{k,0}.0\right]\left[c_{k,0}\cos ky + d_{k,0}\,\mathrm{sen}\, ky\right]\left[f_{k,0}e^{kz} + g_{k,0}e^{-kz}\right] \\ & + \left[a_{0,\ell}\cos 0 + b_{0,\ell}\,\mathrm{sen}\, 0\right]\left[c_{0,\ell}e^{\ell y} + d_{0,\ell}e^{-\ell y}\right]\left[f_{0,\ell} + g_{0,\ell}z\right] \\ & + \left[a_{k,k}\cos 0 + b_{k,k}\,\mathrm{sen}\, 0\right]\left[c_{k,k} + d_{k,k}y\right]\left[f_{k,k}e^{kz} + g_{k,k}e^{-kz}\right] \\ & + \left[a_{k,\ell}\cos 0 + b_{k,\ell}\,\mathrm{sen}\, 0\right]\left[c_{k,\ell}\cos \lambda y + d_{k,\ell}\,\mathrm{sen}\,\lambda y\right]\left[f_{k,\ell}e^{kz} + g_{k,\ell}e^{-kz}\right] = 0 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} & a_{0,0}\left[c_{0,0}+d_{0,0}y\right]\left[f_{0,0}+g_{0,0}z\right] + a_{k,0}\left[c_{k,0}\cos ky + d_{k,0}\,\mathrm{sen}\, ky\right]\left[f_{k,0}e^{kz}+g_{k,0}e^{-kz}\right] \\ & + a_{0,\ell}\left[c_{0,\ell}e^{\ell y} + d_{0,\ell}e^{-\ell y}\right]\left[f_{0,\ell} + g_{0,\ell}z\right] + a_{k,k}\left[c_{k,k} + d_{k,k}y\right]\left[f_{k,k}e^{kz} + g_{k,k}e^{-kz}\right] \\ & + a_{k,\ell}\left[c_{k,\ell}\cos\lambda y + d_{k,\ell}\,\mathrm{sen}\,\lambda y\right]\left[f_{k,\ell}e^{kz} + g_{k,\ell}e^{-kz}\right] = 0 \end{aligned}$$

Para que a expressão acima seja verdadeira para qualquer valor de x, y, z, k e ℓ, devemos ter $a_{k,\ell} = 0,\ \forall\ k, \ell$. Assim, ficamos com

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(x,y,z) = {} & b_{0,0}x\left[c_{0,0} + d_{0,0}y\right]\left[f_{0,0} + g_{0,0}z\right] \\ & + b_{k,0}x\left[c_{k,0}\cos ky + d_{k,0}\,\mathrm{sen}\, ky\right]\left[f_{k,0}e^{kz} + g_{k,0}e^{-kz}\right] \\ & + b_{0,\ell}\,\mathrm{sen}\,\ell x\left[c_{0,l}e^{\ell y} + d_{0,\ell}e^{-\ell y}\right]\left[f_{0,\ell} + g_{0,\ell}z\right] \\ & + b_{k,k}\,\mathrm{sen}\, kx\left[c_{k,k} + d_{k,k}y\right]\left[f_{k,k}e^{kz} + g_{k,k}e^{-kz}\right] \\ & + b_{k,\ell}\,\mathrm{sen}\,\ell x\left[c_{k,\ell}\cos\lambda y + d_{k,\ell}\,\mathrm{sen}\,\lambda y\right]\left[f_{k,\ell}e^{kz} + g_{k,\ell}e^{-kz}\right] \end{aligned}$$

Vamos usar agora a condição para $y = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(x,0,z) &= b_{0,0}x\left[c_{0,0} + d_{0,0}.0\right]\left[f_{0,0} + g_{0,0}z\right]\\ &+ b_{k,0}x\left[c_{k,0}\cos 0 + d_{k,0}\,\text{sen}\,0\right]\left[f_{k,0}e^{kz} + g_{k,0}e^{-kz}\right]\\ &+ b_{0,\ell}\,\text{sen}\,\ell x\left[c_{0,\ell}e^{0} + d_{0,\ell}e^{0}\right]\left[f_{0,\ell} + g_{0,\ell}z\right]\\ &+ b_{k,k}\,\text{sen}\,kx\left[c_{k,k} + d_{k,k}.0\right]\left[f_{k,k}e^{kz} + g_{k,k}e^{-kz}\right]\\ &+ b_{k,\ell}\,\text{sen}\,\ell x\left[c_{k,\ell}\cos 0 + d_{k,\ell}\,\text{sen}\,0\right]\left[f_{k,\ell}e^{kz} + g_{k,\ell}e^{-kz}\right] = 0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&b_{0,0}xc_{0,0}\left[f_{0,0} + g_{0,0}z\right] + b_{k,0}xc_{k,0}\left[f_{k,0}e^{kz} + g_{k,0}e^{-kz}\right]\\ &+ b_{0,\ell}\,\text{sen}\,\ell x\left[c_{0,\ell} + d_{0,\ell}\right]\left[f_{0,\ell} + g_{0,\ell}z\right] + b_{k,k}\,\text{sen}\,kxc_{k,k}\left[f_{k,k}e^{kz} + g_{k,k}e^{-kz}\right]\\ &+ b_{k,\ell}\,\text{sen}\,\ell xc_{k,\ell}\left[f_{k,\ell}e^{kz} + g_{k,\ell}e^{-kz}\right] = 0\end{aligned}$$

e para que a expressão acima seja correta para quaisquer valores de x, y, z, k e ℓ, devemos ter $c_{0,0} = c_{k,0} = c_{k,k} = c_{k,\ell} = 0$ e $c_{0,\ell} = -d_{0,\ell}$. O potencial fica

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(x,y,z) &= b_{0,0}xd_{0,0}y\left[f_{0,0} + g_{0,0}z\right] + b_{k,0}xd_{k,0}\,\text{sen}\,ky\left[f_{k,0}e^{kz} + g_{k,0}e^{-kz}\right]\\ &+ b_{0,\ell}\,\text{sen}\,\ell xc_{0,\ell}\left[e^{\ell y} - e^{-\ell y}\right]\left[f_{0,\ell} + g_{0,\ell}z\right] + b_{k,k}\,\text{sen}\,kxd_{k,k}y\left[f_{k,k}e^{kz} + g_{k,k}e^{-kz}\right]\\ &+ b_{k,\ell}\,\text{sen}\,\ell xd_{k,\ell}\,\text{sen}\,\lambda y\left[f_{k,\ell}e^{kz} + g_{k,\ell}e^{-kz}\right]\end{aligned}$$

Podemos substituir o produto de constantes por uma única constante e também utilizar a definição do seno hiperbólico dada na equação 6.8b. A expressão para o potencial fica

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(x,y,z) &= b_{0,0}xy\left[f_{0,0} + g_{0,0}z\right] + b_{k,0}x\,\text{sen}\,ky\left[f_{k,0}e^{kz} + g_{k,0}e^{-kz}\right]\\ &+ b_{0,\ell}\,\text{sen}\,\ell x\,\text{senh}\,\ell y\left[f_{0,\ell} + g_{0,\ell}z\right] + b_{k,k}\,\text{sen}\,kx\;y\left[f_{k,k}e^{kz} + g_{k,k}e^{-kz}\right]\\ &+ b_{k,\ell}\,\text{sen}\,\ell x\,\text{sen}\,\lambda y\left[f_{k,\ell}e^{kz} + g_{k,\ell}e^{-kz}\right]\end{aligned}$$

Em seguida, utilizamos a segunda condição para y, em $y = \beta$,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(x,\beta,z) &= b_{0,0}x\beta\left[f_{0,0} + g_{0,0}z\right] + b_{k,0}x\,\text{sen}\,k\beta\left[f_{k,0}e^{kz} + g_{k,0}e^{-kz}\right]\\ &+ b_{0,\ell}\,\text{sen}\,\ell x\,\text{senh}\,\ell\beta\left[f_{0,\ell} + g_{0,\ell}z\right] + b_{k,k}\,\text{sen}\,kx\;\beta\left[f_{k,k}e^{kz} + g_{k,k}e^{-kz}\right]\\ &+ b_{k,\ell}\,\text{sen}\,\ell x\,\text{sen}\,\lambda\beta\left[f_{k,\ell}e^{kz} + g_{k,\ell}e^{-kz}\right] = 0\end{aligned}$$

Para que esta expressão seja válida sempre, é preciso que $b_{0,0} = b_{0,\ell} = b_{k,k} = 0$. Além disso, ou $b_{k,0} = 0$ ou $\operatorname{sen} k\beta = 0$. Neste caso, escolhemos a primeira opção, porque ela, na verdade, terá que ser considerada de qualquer forma quando formos utilizar a segunda condição para x, em $x = \alpha$. Portanto, $b_{k,0} = 0$. Por fim, devemos ter $\operatorname{sen} \lambda\beta = 0$, pois, se escolhermos $b_{k,\ell} = 0$, a solução será a solução trivial $\mathbb{V} = 0$, que não é interessante fisicamente. Se $\operatorname{sen} \lambda\beta = 0$, o argumento do seno deve ser um múltiplo inteiro de π, ou seja,

$$\lambda\beta = n\pi$$
$$\lambda_n = \frac{n\pi}{\beta}$$

e a solução para o potencial fica

$$\mathbb{V}(x, y, z) = b_{k,l} \operatorname{sen} \ell x \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{\beta} \left[f_{k,\ell} e^{kz} + g_{k,\ell} e^{-kz}\right]$$

A segunda condição para x, em $x = \alpha$, nos dá

$$\mathbb{V}(\alpha, y, z) = b_{k,\ell} \operatorname{sen} \ell\alpha \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{\beta} \left[f_{k,\ell} e^{kz} + g_{k,\ell} e^{-kz}\right] = 0$$

que só é possível se $\operatorname{sen} \ell\alpha = 0$. Neste caso, o argumento do seno deve ser um múltiplo inteiro de π, isto é,

$$\ell\alpha = m\pi$$
$$\ell_m = \frac{m\pi}{\alpha}$$

de modo que o potencial fica

$$\mathbb{V}(x, y, z) = b_{k,\ell} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{\beta} \left[f_{k,\ell} e^{kz} + g_{k,\ell} e^{-kz}\right]$$

A primeira condição para z, em $z = 0$, nos fornece

$$\mathbb{V}(x, y, 0) = b_{k,\ell} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{\beta} \left[f_{k,\ell} + g_{k,\ell}\right] = 0$$

e para que esta expressão seja correta, devemos ter $g_{k,\ell} = -f_{k,\ell}$. Assim, obtemos

$$\mathbb{V}(x, y, z) = b_{k,\ell} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{\beta} \left[f_{k,\ell} e^{kz} - f_{k,\ell} e^{-kz}\right]$$

$$\mathbb{V}(x,y,z) = b_{k,\ell} f_{k,\ell} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{\beta} \left[e^{kz} - e^{-kz} \right]$$

$$\mathbb{V}(x,y,z) = \overbrace{2b_{k,\ell} f_{k,\ell}}^{a_{k,\ell}} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{\beta} \operatorname{senh} kz$$

$$\mathbb{V}(x,y,z) = a_{k,\ell} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{\beta} \operatorname{senh} kz$$

onde incorporamos todas as constantes em $a_{k,\ell}$. Como

$$\lambda^2 = k^2 - \ell^2$$

temos

$$k^2 = \lambda^2 + \ell^2$$

$$= \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2$$

$$k_{m,n} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2}$$

Já que ℓ e λ são funções de m e n, podemos reescrever o potencial como

$$\mathbb{V}_{m,n}(x,y,z) = a_{m,n} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{\beta} \operatorname{senh} k_{m,n} z$$

e assim, existe uma solução para o potencial para cada valor de m e n. A solução geral é a soma de todas as soluções, ou seja,

$$\mathbb{V}(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}_{m,n}(x,y,z)$$

$$\mathbb{V}(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{\beta} \operatorname{senh} k_{m,n} z$$

Por último, temos a condição para z em $z = \gamma$,

$$\mathbb{V}(x,y,\gamma) = \Phi(x,y)$$

$$\Phi(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{\beta} \operatorname{senh} k_{m,n} \gamma$$

Esta expressão é uma expansão da função $\Phi(x,y)$ em uma série dupla de senos, em x e y. Ela pode ser identificada com a série dupla de Fourier em senos, definida pela equação 2.30, que é

$$f(x',y') = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,n} \operatorname{sen} mx' \operatorname{sen} ny'$$

onde os $b_{m,n}$ são obtidos através da expressão 2.31,

$$b_{m,n} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x',y') \operatorname{sen} mx' \operatorname{sen} ny' \; dy'dx'$$

se considerarmos $x' \to \frac{\pi x}{\alpha}$, $y' \to \frac{\pi y}{\beta}$, $f(x',y') = \Phi(x,y)$ e $a_{m,n} \operatorname{senh} k_{m,n}\gamma = b_{m,n}$. Com estas identificações, e observando que os limites de integração tornam-se

$$x' = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad\qquad x' = \pi \Rightarrow x = \alpha$$
$$y' = 0 \Rightarrow y = 0 \qquad\qquad y' = \pi \Rightarrow y = \beta$$

obtemos, para os coeficientes $a_{m,n}$,

$$a_{m,n} = \frac{1}{\operatorname{senh} k_{m,n}\gamma}\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\alpha}\int_0^{\beta} \Phi(x,y) \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{\alpha} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{\beta}\; \frac{\pi}{\alpha}\frac{\pi}{\beta}\, dydx$$

$$a_{m,n} = \frac{4}{\alpha\beta \operatorname{senh} k_{m,n}\gamma}\int_0^{\alpha}\int_0^{\beta} \Phi(x,y) \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{\alpha} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{\beta}\, dydx \qquad (6.36)$$

e assim, o potencial elétrico fica

$$\mathbb{V}(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{\alpha} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{\beta} \operatorname{senh} k_{m,n}z \qquad (6.37)$$

onde os coeficientes $a_{m,n}$ são obtidos através da expressão 6.36.

Vamos encontrar os coeficientes para o caso simples em que $\Phi(x,y) = V_0$, ou seja, uma constante. Os coeficientes $a_{m,n}$, dados pela expressão 6.36, ficam

$$a_{m,n} = \frac{4}{\alpha\beta \operatorname{senh} k_{m,n}\gamma}\int_0^{\alpha}\int_0^{\beta} V_0 \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{\alpha} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{\beta}\, dydx$$

$$a_{m,n} = \frac{4V_0}{\alpha\beta \operatorname{senh} k_{m,n}\gamma}\int_0^{\alpha}\int_0^{\beta} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{\alpha} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{\beta}\, dydx$$

$$
\begin{aligned}
a_{m,n} &= \frac{4V_0}{\alpha\beta \operatorname{senh} k_{m,n}\gamma} \int_0^\alpha \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{\alpha}\, dx \left[\frac{-\cos \frac{n\pi y}{\beta}}{\frac{n\pi}{\beta}} \right]_0^\beta \\
&= -\frac{4V_0 \left[\cos n\pi - 1\right]}{n\pi\alpha \operatorname{senh} k_{m,n}\gamma} \int_0^\alpha \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{\alpha}\, dx \\
&= -\frac{4V_0 \left[\cos n\pi - 1\right]}{n\pi\alpha \operatorname{senh} k_{m,n}\gamma} \left[\frac{-\cos \frac{m\pi x}{\alpha}}{\frac{m\pi x}{\alpha}} \right]_0^\alpha \\
a_{m,n} &= \frac{4V_0 \left[\cos m\pi - 1\right]\left[\cos n\pi - 1\right]}{mn\pi^2 \operatorname{senh} k_{m,n}\gamma}
\end{aligned}
$$

Entretanto, quando m ou n são pares, $\cos m\pi = \cos n\pi = 1$, e $a_{m,n} = 0$. Restam apenas os termos que têm m e n ambos ímpares, e podemos escrever

$$
a_{2m+1,2n+1} = \frac{4V_0\left[-1-1\right]\left[-1-1\right]}{(2m+1)(2n+1)\pi^2 \operatorname{senh} k_{2m+1,2n+1}\gamma}
$$

ou então,

$$
a_{2m+1,2n+1} = \frac{16V_0}{(2m+1)(2n+1)\pi^2 \operatorname{senh} k_{2m+1,2n+1}\gamma}
$$

O potencial elétrico dado pela equação 6.37 fica

$$
\mathbb{V}(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{\beta} \operatorname{senh} k_{m,n} z
$$

ou

$$
\mathbb{V}(x,y,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{16V_0 \operatorname{senh} k_{2m+1,2n+1} z}{(2m+1)(2n+1)\pi^2 \operatorname{senh} k_{2m+1,2n+1}\gamma} \times \operatorname{sen} \frac{(2m+1)\pi x}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi y}{\beta} \right\}
$$

ou ainda,

$$
\mathbb{V}(x,y,z) = \frac{16V_0}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\operatorname{senh} k_{2m+1,2n+1} z}{(2m+1)(2n+1) \operatorname{senh} k_{2m+1,2n+1}\gamma} \times \operatorname{sen} \frac{(2m+1)\pi x}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi y}{\beta} \right\} \tag{6.38}
$$

A expressão 6.38 acima é o potencial elétrico dentro da caixa em forma de paralelepípedo apresentada na figura 6.1, quando uma das faces da caixa está submetida a um potencial constante V_0. O campo elétrico dentro da caixa, que é o gradiente negativo dessa equação, é deixado como exercício (veja o exercício 6.1).

Suponha agora que o potencial elétrico numa das faces, ao invés de ser uma constante V_0, oscile no tempo de uma forma dada por $V(t) = V_0 \cos \omega t$. Neste caso, a parte espacial da expressão 6.38 ficará a mesma, mas o termo V_0 antes da somatória deve ser trocado por $V_0 \cos \omega t$. Isso faz com que o potencial elétrico seja oscilante no tempo, com a freqüência ω. Como o campo elétrico é o gradiente negativo desse potencial, o campo elétrico também oscila no tempo, com a mesma freqüência ω, apontando ora num sentido, ora no outro.

A caixa paralelepipédica é o nosso modelo para um forno de microondas. Sendo assim, dentro dela será colocado algum alimento, que deve ser aquecido. Qualquer tipo de alimento, não importa qual, contém água, cuja proporção varia de acordo com o tipo de alimento. Na seção 4.5, vimos que a água possui um momento de dipolo intrínseco que, por sinal, é um dos maiores valores de momento de dipolo para todas as substâncias. Além disso, na seção 4.6 estudamos o torque que um campo elétrico externo gera sobre um dipolo elétrico e vimos que o dipolo tende a alinhar seu momento de dipolo no mesmo sentido que o do campo elétrico. Assim, se o campo elétrico externo for oscilante, o dipolo também oscilará, e ele formará um oscilador harmônico amortecido, porque cada molécula de água está ligada, de alguma forma, aos outros constituintes dos alimentos, o que age como uma espécie de coeficiente de atrito. Dessa forma, o campo elétrico oscilante transfere energia para os dipolos da água, que, ao vibrarem, perdem uma parcela dessa energia, na forma de um fluxo de calor, para as moléculas ou átomos dos outros constituintes dos alimentos. Essa energia aparece como um aumento nas energias cinéticas de vibração, rotação ou translação dessas moléculas, o que, macroscopicamente, é interpretado como um aumento de temperatura, e então, o alimento aquece e cozinha. Para maximizar a transferência de energia do campo elétrico para os dipolos da água, a freqüência ω de oscilação do potencial e do campo elétrico é escolhida de tal forma que ela seja muito próxima à freqüência natural do dipolo da água, de modo que o dipolo entra em ressonância com o campo elétrico.

Os outros constituintes dos alimentos também podem ser formados por substâncias que têm momentos de dipolo, intrínsecos ou induzidos. No entanto, a transferência de energia diretamente

do campo elétrico para eles é muito menor do que a que ocorre para a água. Como a água existe em todos os alimentos, é bastante simples construir o forno de forma que a ressonância se dê apenas com a água. Por outro lado, não seria tão simples ajustar a freqüência de oscilação do campo externo para cada tipo de alimento, para que a ressonância ocorra com esta ou aquela substância. Outro fato relevante é o grande valor do momento de dipolo da água, o que contribui para a eficiência dos fornos de microondas. Um detalhe importante e que deve ser comentado é o fato de que não se pode colocar objetos metálicos dentro do forno. Os metais são condutores e, ao colocarmos um condutor no interior de um forno de microondas, perturbamos completamente o potencial elétrico nesta região, pois isso equivale a acrescentar novas condições de contorno ao problema. Essa perturbação no potencial elétrico produz efeitos indesejáveis, podendo inclusive destruir o forno. Recentemente, foi sugerido que, se fossem colocados apenas pós metálicos, a perturbação seria suficientemente pequena, de modo que o forno de microondas poderia agir como um alto-forno industrial, sendo assim possível produzir ligas metálicas de uma forma mais eficiente e barata. As experiências iniciais realizadas comprovaram esta suposição, e algumas ligas foram produzidas.

Esta é uma explicação, em linhas gerais, do funcionamento do forno de microondas. Existem outros detalhes técnicos, como o fato de que é desejável concentrar o campo elétrico na região central do forno, por exemplo, que não são relevantes para a nossa discussão atual. No entanto, é importante compreender fisicamente os processos envolvidos.

Outra questão que deve ser comentada é que, no início do problema, supusemos que havia apenas uma face da caixa com um potencial diferente de zero. Isto não precisa ser assim, de modo que podemos ter todas as seis faces com potenciais estabelecidos em qualquer valor. Para resolver este problema, nos valemos do fato de que o potencial obedece ao princípio de superposição. Desse modo, para obter a solução do problema, consideramos uma face de cada vez, estando as outras no potencial nulo, e depois somamos as soluções parciais obtidas, o que resulta no potencial total dentro da caixa. Este caso é visto no exercício 6.2.

6.4 Equação de Laplace em Coordenadas Polares

Em duas dimensões, além do sistema de coordenadas retangulares, temos também o sistema de coordenadas polares, e vamos resolver a equação de Laplace nestas coordenadas. Neste caso, as coordenadas são ρ e θ, e o Laplaciano é obtido através da equação B.10, considerando $z = 0$ nesta equação,

isto é,

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

A equação de Laplace fica

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = 0$$

ou, multiplicando-a por ρ^2,

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2\mathbb{V}}{\partial\theta^2} = 0$$

Vamos supor que o potencial seja dado por

$$\mathbb{V}(\rho,\theta) = \mathfrak{R}(\rho)\vartheta(\theta)$$

Com esta substituição, a equação de Laplace fica

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\left[\mathfrak{R}(\rho)\vartheta(\theta)\right]}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2\left[\mathfrak{R}(\rho)\vartheta(\theta)\right]}{\partial\theta^2} = 0$$

ou

$$\rho\vartheta(\theta)\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathfrak{R}(\rho)}{d\rho}\right) + \mathfrak{R}(\rho)\frac{d^2\vartheta(\theta)}{d\theta^2} = 0$$

Dividindo esta expressão por $\mathfrak{R}(\rho)\vartheta(\theta)$ e separando o termo em θ, temos

$$\frac{\rho}{\mathfrak{R}}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathfrak{R}}{d\rho}\right) = -\frac{1}{\vartheta}\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}$$

O lado direito dessa expressão depende, no máximo, de θ, enquanto o lado esquerdo é função, no máximo, de ρ. Assim, elas estão separadas através da constante μ^2, isto é,

$$\frac{\rho}{\mathfrak{R}}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathfrak{R}}{d\rho}\right) = -\frac{1}{\vartheta}\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} = \mu^2$$

que dá origem às equações

$$\frac{\rho}{\mathfrak{R}}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathfrak{R}}{d\rho}\right) = \mu^2$$

e

$$-\frac{1}{\vartheta}\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} = \mu^2$$

ou

$$\rho^2\frac{d^2\mathfrak{R}}{d\rho^2} + \rho\frac{d\mathfrak{R}}{d\rho} - \mu^2\mathfrak{R} = 0$$

e

$$\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} + \mu^2\vartheta = 0$$

Esta última equação tem coeficientes constantes e sua equação característica é

$$p^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow p = \pm i\mu$$

que gera as soluções

$$p = i\mu \Rightarrow \vartheta(\theta) = Ae^{i\mu\theta}$$
$$p = -i\mu \Rightarrow \vartheta(\theta) = Be^{-i\mu\theta}$$

Se, para um problema específico, θ puder assumir qualquer valor, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e precisamos considerar a unicidade do potencial elétrico com relação a este ângulo. Quando damos uma volta completa no ângulo θ, a situação física não muda, o que significa que é preciso que as soluções para a parte em θ do potencial respeitem esta condição. Portanto, é necessário que

$$e^{\pm i\mu\theta}\Big|_0 = e^{\pm i\mu\theta}\Big|_{2\pi}$$
$$e^{\pm i\mu.0} = e^{\pm i\mu 2\pi}$$
$$1 = \cos 2\pi\mu \pm i \operatorname{sen} 2\pi\mu$$

Esta equação só é satisfeita se μ for um número inteiro. Assim, quando θ é ilimitado, a unicidade do potencial elétrico determina que μ seja inteiro. Quando θ não é ilimitado, μ não precisa necessariamente ser inteiro.

A solução para a parte em θ é

$$\vartheta_\mu(\theta) = A_\mu e^{i\mu\theta} + B_\mu e^{-i\mu\theta}.$$

que pode ainda ser escrita, em termos de senos e cossenos, como

$$\vartheta_\mu(\theta) = A_\mu \cos \mu\theta + B_\mu \operatorname{sen} \mu\theta \tag{6.39}$$

que vale para qualquer μ, exceto $\mu = 0$. Neste caso, a equação diferencial fica

$$\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} = 0$$

nossa velha conhecida, que pode ser facilmente resolvida através de duas integrações, ou seja,

$$\vartheta_0(\theta) = A_0 + B_0\theta \tag{6.40}$$

Note que, quando θ é ilimitado, B_0 é necessariamente nulo. Vamos resolver agora a equação diferencial em ρ, que é

$$\rho^2 \frac{d^2\mathfrak{R}}{d\rho^2} + \rho\frac{d\mathfrak{R}}{d\rho} - \mu^2\mathfrak{R} = 0$$

Trata-se de uma equação de Cauchy-Euler [6] que pode ser resolvida através da substituição $\rho = e^t$ ou $t = \ln \rho$. Com esta substituição, obtemos

$$\frac{d\mathfrak{R}}{d\rho} = \frac{dt}{d\rho}\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{d\mathfrak{R}}{dt}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathfrak{R}}{d\rho^2} &= \frac{d}{d\rho}\left[\frac{d\mathfrak{R}}{d\rho}\right] = \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{d\mathfrak{R}}{dt}\right] = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\frac{d\mathfrak{R}}{dt}\right] - \frac{1}{\rho^2}\frac{d\mathfrak{R}}{dt} \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{dt}{d\rho}\frac{d}{dt}\left[\frac{d\mathfrak{R}}{dt}\right] - \frac{1}{\rho^2}\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} - \frac{1}{\rho^2}\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} - \frac{d\mathfrak{R}}{dt}\right]\end{aligned}$$

Utilizando estas substituições, a equação fica

---

[6] Veja, por exemplo, *Equações Diferenciais Aplicadas à Física.*

$$\rho^2 \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{d^2\Re}{dt^2} - \frac{d\Re}{dt}\right] + \rho\frac{1}{\rho}\frac{d\Re}{dt} - \mu^2\Re = 0$$
$$\frac{d^2\Re}{dt^2} - \frac{d\Re}{dt} + \frac{d\Re}{dt} - \mu^2\Re = 0$$
$$\frac{d^2\Re}{dt^2} - \mu^2\Re = 0$$

que é uma equação com coeficientes constantes, cuja equação característica é

$$p^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow p = \pm\mu$$

a qual gera as soluções

$$p = \mu \Rightarrow \Re = Ce^{\mu t}$$
$$p = -\mu \Rightarrow \Re = De^{-\mu t}$$

de modo que a solução geral, em t, é

$$\Re_\mu(t) = C_\mu e^{\mu t} + D_\mu e^{-\mu t}$$

ou, voltando para $\rho = e^t$, obtemos

$$\Re_\mu(\rho) = C_\mu \rho^\mu + D_\mu \rho^{-\mu} \tag{6.41}$$

que vale para $\mu \neq 0$. Quando $\mu = 0$, a equação diferencial pode ser escrita como

$$\frac{\rho}{\Re}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\Re}{d\rho}\right) = 0$$

ou

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\Re}{d\rho}\right) = 0$$

que pode ser integrada, resultando em

$$\int_{d_0}^{\rho} \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\Re}{d\rho}\right) d\rho = \int_{d_0}^{\rho} 0\, d\rho$$

$$\rho\frac{d\Re}{d\rho} - \overbrace{d_0\frac{d\Re(d_0)}{d\rho}}^{D_0} = 0$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\Re}{d\rho}\,d\rho = \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{D_0}{\rho}\,d\rho$$

$$\Re(\rho) - \Re(\rho_0) = D_0\ln\rho - D_0\ln\rho_0$$

$$\Re(\rho) = \overbrace{\Re(\rho_0)}^{C_0} + D_0\ln\frac{\rho}{\rho_0}$$

ou

$$\Re_0(\rho) = C_0 + D_0\ln\frac{\rho}{\rho_0} \tag{6.42}$$

Note que, nas soluções 6.41 e 6.42, quando a origem ($\rho = 0$) faz parte do domínio do problema, todos os coeficientes D_μ são nulos, desde que não haja nenhuma carga na origem. Se a origem não faz parte do problema, então os D_μ podem ser não-nulos. Em particular, lembrando o exemplo 5.7 e a expressão 5.29

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(R) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{\rho}{R}$$

para o potencial elétrico gerado por um fio infinito, vemos que o termo logarítmico que aparece na equação 6.42 pode ser associado a um fio de densidade linear de cargas dada por

$$\lambda = -2\pi\epsilon_0 D_0$$

o que nos permite dizer que termos logarítmicos num potencial elétrico em coordenadas cilíndricas ou polares são a "assinatura" de fios infinitos. Assim, sempre que falarmos em fios infinitos, devemos lembrar de termos logarítmicos no potencial elétrico, e vice-versa, da mesma forma que termos proporcionais ao inverso da distância, em coordenadas esféricas, estão associados a cargas pontuais e são a "assinatura" da carga. Cada distribuição espacial de cargas tem sua própria "impressão digital" e, se começarmos a observar estas propriedades, a resolução dos problemas de Eletromagnetismo fica muito facilitada, bastando uma análise física do problema, sem excessos matemáticos.

Voltando à resolução da equação de Laplace em coordenadas polares, temos a seguinte solução geral, formada pela combinação das equações 6.39 a 6.42:

$$\mathbb{V}(\rho,\theta) = [A_0 + B_0\theta][C_0 + D_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0}] + \sum_{\mu\neq 0} [A_\mu \cos\mu\theta + B_\mu \operatorname{sen}\mu\theta]\left[C_\mu \rho^\mu + D_\mu \rho^{-\mu}\right] \quad (6.43)$$

O principal interesse em resolver a equação de Laplace em coordenadas polares está no fato de que podemos utilizá-la para estudar o potencial nas proximidades da junção entre dois condutores que formam uma região aproximadamente plana, como veremos a seguir.

Exemplo 6.3. *Ache o potencial elétrico próximo ao "canto" plano definido pelos dois condutores da figura 6.2. Os condutores estão mantidos num potencial V_0 fixo.*

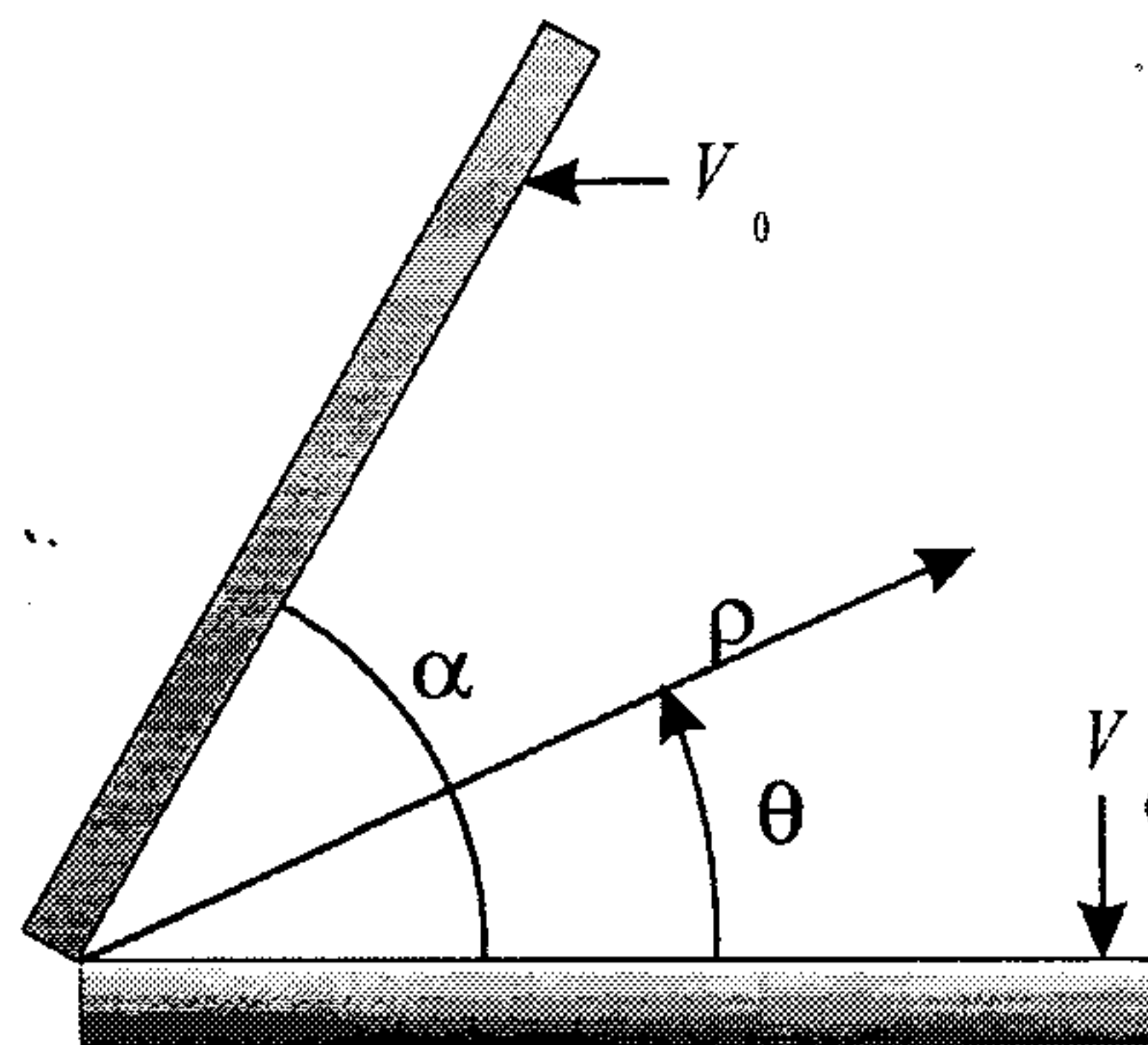



Figura 6.2: Região de junção entre dois condutores planos, definindo uma aresta ou "canto" de ângulo de abertura α.

Neste problema, a coordenada θ está no domínio $0 \leq \theta \leq \alpha$. Além disso, é preciso ressaltar o fato de que esta figura está muito ampliada. Na verdade, a região da junção em que estamos interessados tem dimensões da ordem de milímetros ou menos, ou seja, estamos realmente bem próximos à aresta. O potencial em $\theta = 0$ e $\theta = \alpha$ vale V_0, e a origem faz parte de região de interesse. Sendo assim, temos as condições de contorno

$$\begin{cases} \mathbb{V}(\rho, 0) = V_0 \\ \mathbb{V}(\rho, \alpha) = V_0 \end{cases}$$

Como $\rho = 0$ faz parte da solução, na equação 6.43 precisamos fazer as constantes D_0 e D_μ iguais a zero, pois senão o potencial divergirá em $\rho = 0$, o que não é permitido, porque não há cargas livres nesta região. Portanto, o potencial fica

$$\mathbb{V}(\rho, \theta) = A_0 + B_0\theta + \sum_{\mu \neq 0} [A_\mu \cos \mu\theta + B_\mu \operatorname{sen} \mu\theta]\rho^\mu$$

onde incorporamos as constantes C_0 e C_μ às outras. A condição para o potencial em $\theta = 0$ fornece a expressão

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\rho, \theta) &= V_0 \\ A_0 + B_0.0 + \sum_{\mu \neq 0} [A_\mu \cos 0 + B_\mu \operatorname{sen} 0]\rho^\mu &= V_0 \end{aligned}$$

ou

$$A_0 + \sum_{\mu \neq 0} A_\mu \rho^\mu = V_0$$

que é satisfeita se

$$\begin{aligned} A_0 &= V_0 \\ A_\mu &= 0, \qquad \forall \mu \neq 0 \end{aligned}$$

Com estas condições, o potencial torna-se

$$\mathbb{V}(\rho, \theta) = V_0 + B_0\theta + \sum_{\mu \neq 0} B_\mu \operatorname{sen} \mu\theta \rho^\mu$$

A outra condição, em $\theta = \alpha$, nos dá a equação

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\rho, \alpha) &= V_0 \\ V_0 + B_0\alpha + \sum_{\mu \neq 0} B_\mu \operatorname{sen} \mu\alpha\, \rho^\mu &= V_0 \\ B_0\alpha + \sum_{\mu \neq 0} B_\mu \operatorname{sen} \mu\alpha\, \rho^\mu &= 0 \end{aligned}$$

que é satisfeita se

$$B_0 = 0$$
$$\operatorname{sen} \mu\alpha = 0$$

Se o seno de um ângulo é nulo, este deve ser um múltiplo inteiro de π, ou seja,

$$\mu\alpha = n\pi \Rightarrow \mu = \frac{n\pi}{\alpha}$$

de modo que o potencial fica

$$\mathbb{V}(\rho, \theta) = V_0 + \sum_{n=1} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi\theta}{\alpha} \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}$$

Para determinar os coeficientes B_n, precisaríamos conhecer o comportamento do potencial em alguma outra região, como, por exemplo, nas regiões mais afastadas do canto. No entanto, estamos interessados no comportamento geral do potencial perto do canto e não nos detalhes específicos de um dado problema. Assim, não nos preocuparemos em encontrar a forma explícita dos B_n. Além disso, as potências de ρ são positivas e, como estamos interessados na região próxima à origem, $\rho \ll 1$, de modo que apenas os primeiros termos da série são importantes, em particular o primeiro termo cujo coeficiente B_n seja não-nulo. Assim, considerando que B_1 não é zero, o potencial muito próximo à aresta vale, aproximadamente,

$$\mathbb{V}(\rho, \theta) \simeq V_0 + B_1 \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}}$$

O campo elétrico nesta região próxima à origem é obtido através do gradiente negativo do potencial, ou seja, utilizando a expressão B.7 com $z = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}} &= -\nabla\mathbb{V} \\
&= -\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial\rho} - \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial\theta} \\
&= -B_1\frac{\pi}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \hat{\boldsymbol{\rho}} - B_1\frac{\pi}{\alpha} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \\
\vec{\mathcal{E}} &= -\frac{B_1\pi}{\alpha}\rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\left[\operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\alpha} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos \frac{\pi\theta}{\alpha} \hat{\boldsymbol{\theta}}\right]
\end{aligned}$$

É possível calcular a densidade de cargas induzidas através do resultado do exemplo 4.15, em que o campo na superfície de qualquer condutor é dado pela equação 4.25,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{n}$$

sendo $\hat{n}$ a normal à superfície do condutor. Deste resultado, a densidade de cargas é obtida através do produto escalar do campo elétrico com o vetor normal, ou seja,

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{n} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{n}\cdot\hat{n}\\
\vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{n} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}\\
\sigma &= \epsilon_0\vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{n}
\end{aligned} \tag{6.44}$$

Para o nosso caso, no condutor em $\theta = 0$ a normal é o próprio versor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, e assim, a densidade de cargas induzida fica

$$\begin{aligned}
\sigma(\rho,0) &= \epsilon_0\vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{n}\\
&= \epsilon_0\left\{-\frac{B_1\pi}{\alpha}\rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi.0}{\alpha}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\frac{\pi.0}{\alpha}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}\\
\sigma(\rho,0) &= -\frac{B_1\epsilon_0\pi}{\alpha}\rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}
\end{aligned} \tag{6.45}$$

O campo elétrico, na região muito próxima a este condutor, é

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}(\rho,0) &= -\frac{B_1\pi}{\alpha}\rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi.0}{\alpha}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\frac{\pi.0}{\alpha}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]\\
\vec{\mathcal{E}}(\rho,0) &= -\frac{B_1\pi}{\alpha}\rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned} \tag{6.46}$$

No condutor em $\theta = \alpha$, a normal é o versor $-\hat{\boldsymbol{\theta}}$, e assim,

$$\begin{aligned}
\sigma(\rho,\alpha) &= \epsilon_0\vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{n}\\
&= \epsilon_0\left\{-\frac{B_1\pi}{\alpha}\rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi\alpha}{\alpha}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\frac{\pi\alpha}{\alpha}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]\cdot(-\hat{\boldsymbol{\theta}})\right\}\\
\sigma(\rho,\alpha) &= -\frac{B_1\epsilon_0\pi}{\alpha}\rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}
\end{aligned} \tag{6.47}$$

de forma que as densidades de carga induzida nos dois condutores são iguais. O campo elétrico neste condutor resulta em

$$\vec{\mathcal{E}}(\rho,\alpha) = -\frac{B_1\pi}{\alpha}\rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi\alpha}{\alpha}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\frac{\pi\alpha}{\alpha}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]$$
$$\vec{\mathcal{E}}(\rho,0) = \frac{B_1\pi}{\alpha}\rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{6.48}$$

Quando $\alpha < \pi$, isto é, quando os condutores formam um "canto" côncavo, tanto os campos elétricos como as densidades de cargas induzidas tendem a zero, quando $\rho \to 0$. Quando $\alpha = \pi$, o expoente de ρ se anula, e o campo e a densidade de cargas tornam-se constantes, o que já era esperado, pois esse caso corresponde ao de estarmos muito próximos de um plano condutor que, nesta situação, e para todos os efeitos, pode ser considerado infinito, e sabemos que o campo de um plano condutor infinito é constante.

A situação física fica mais interessante quando $\alpha > \pi$, ou seja, quando os condutores formam uma aresta convexa. Neste caso, o expoente de ρ fica negativo e, quando $\rho \to 0$, na região bem próxima à ponta, o campo elétrico e a densidade de cargas podem adquirir valores extremamente altos, dependendo do valor de B_1. Se os condutores estiverem imersos em qualquer meio que não o vácuo (ar, por exemplo), mesmo que seja um bom isolante, esses campos elevados podem produzir uma descarga elétrica para algum outro condutor nas proximidades, ou mesmo para a Terra, porque tais campos intensos quebram a rigidez dielétrica do meio, tornando-o condutor e suscetível às descargas elétricas. Este efeito, conhecido como poder das pontas, é a base para a construção de pára-raios. A tabela 6.1 apresenta os valores de campo elétrico, chamado módulo do dielétrico, que quebram a rigidez dielétrica de alguns materiais isolantes.

A eficácia dos pára-raios é explicada com base no poder das pontas. Suponha que uma nuvem eletricamente carregada esteja numa região aberta, sem prédios, casas, árvores, etc. As cargas que a nuvem contém provocam o aparecimento de um campo elétrico que induz, no chão, uma carga de sinal oposto. Na região entre a nuvem e o chão, considerando, para facilitar, que ambos sejam aproximadamente planos, temos um campo elétrico semelhante ao de dois planos paralelos carregados discutido no exemplo 4.14. Esse campo é aproximadamente constante e, por hipótese, tem um valor menor do que o do módulo de rigidez dielétrica do ar, que é, pela tabela 6.1, cerca de $0,8 \times 10^6$ V/m, pois, se fosse maior, um raio já teria ocorrido. Entretanto, a nuvem pode adquirir, por algum processo como atrito, por exemplo, mais um pouco de carga, de modo que o campo elétrico pode aumentar e ultrapassar o valor do módulo de rigidez dielétrica do ar, gerando um raio

Material	Módulo Dielétrico (10^6 V/m)
Vácuo	∞
Ar	0,8
Papel	14
Mica	160
Âmbar	90
Porcelana	4
Vidro	30 a 150
Baquelita	12
Polietileno	50
Teflon	60

Tabela 6.1: Valores de módulo dielétrico para algumas substâncias.

que pode cair em qualquer lugar. Como a nuvem está num local isolado, ermo, essa não é uma situação potencialmente perigosa.

Considere agora que a nuvem carregada esteja numa cidade e que a intensidade do campo elétrico seja ligeiramente menor do que o valor do módulo dielétrico do ar. Se a quantidade de carga da nuvem aumentar, um raio pode ocorrer, e isto é uma situação perigosa, pois pode provocar acidentes graves e estragos indesejados. Para contornar esta situação, podemos colocar pontas metálicas cônicas, ligadas à Terra, no alto de prédios, casas e locais que precisam ser protegidos contra os raios, como refinarias. Neste caso, quando uma nuvem, que vamos considerar negativa, se aproxima desta ponta, os elétrons da ponta são repelidos, induzindo uma carga positiva. Com os resultados obtidos neste exemplo, dados pelas equações 6.45 até 6.48, vimos que, bem próximo à ponta, o campo elétrico e a densidade de cargas induzidas tornam-se bastante elevados. Assim, próximo à ponta, o campo elétrico pode atingir um valor muito maior do que o do módulo de rigidez dielétrica do ar, e neste local o ar torna-se condutor. Como o ar nesta região agora é condutor, o ar nas regiões próximas a ela tem sua rigidez dielétrica quebrada mais facilmente, como se fosse

uma reação em cadeia, até chegar à nuvem. Isto faz com que no ar apareça um "caminho" seguro e, no caso da nuvem negativa, os elétrons em excesso que ela possui passam através desse "caminho" condutor até chegar à ponta metálica, e por fim, à Terra. Ao passarem pelo ar, os elétrons chocam-se com as moléculas dos gases que o constituem e liberam energia na forma de calor, luz ou ondas sonoras, dando origem ao clarão do raio e ao barulho do trovão. Assim, o raio não cai em qualquer lugar, e a ponta metálica, que é o que chamamos pára-raios, protege de forma eficiente o local onde está instalada.

É importante observar que, mesmo quando os campos elétricos são variáveis no tempo, a discussão física anterior permanece, assim como o efeito do poder das pontas.

6.5 Equação de Laplace em Coordenadas Esféricas

Nesta seção vamos estudar a equação de Laplace 6.2 em coordenadas esféricas. De acordo com o apêndice B, o Laplaciano em esféricas é dado pela equação B.20,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

e a equação de Laplace fica

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\mathbb{V}) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\mathbb{V}}{\partial\phi^2} = 0$$

Utilizamos a separação de variáveis para resolver esta equação, supondo que a solução seja dada por

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = \frac{R(r)}{r}\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

que, substituída na equação diferencial parcial, resulta em

$$
\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left\{r\left[\frac{R(r)}{r}\Theta(\theta)\Phi(\phi)\right]\right\}
+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\left[\frac{R(r)}{r}\Theta(\theta)\Phi(\phi)\right]}{\partial\theta}\right\}
+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\left[\frac{R(r)}{r}\Theta(\theta)\Phi(\phi)\right]}{\partial\phi^2}=0
$$

ou

$$
\frac{\Theta(\theta)\Phi(\phi)}{r}\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+\frac{R(r)\Phi(\phi)}{r^3\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}\right]+\frac{R(r)\Theta(\theta)}{r^3\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\Phi(\phi)}{\partial\phi^2}=0
$$

ou ainda, simplificando um r,

$$
\Theta\Phi\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{R\Phi}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]+\frac{R\Theta}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=0
$$

Agora, multiplicamos esta expressão por $r^2\operatorname{sen}^2\theta$, dividimo-la por $R\Theta\Phi$ e isolamos o termo em Φ, o que resulta em

$$
\frac{r^2\operatorname{sen}^2\theta}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}
$$

O lado direito desta equação depende apenas de ϕ, enquanto o lado esquerdo é função de r e θ. Sendo assim, as variáveis estão separadas, e a constante de separação é m^2. Portanto, temos as equações

$$
\frac{r^2\operatorname{sen}^2\theta}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]=m^2
$$

e

$$
-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=m^2
$$

e vamos resolver esta última primeiro, porque ela é mais fácil. Ela pode ser reescrita como

$$
\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+m^2\Phi=0 \tag{6.49}
$$

que é uma equação com coeficientes constantes. Quando $m \neq 0$, temos a equação característica

$$p^2 + m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \pm im$$

que gera as soluções

$$\begin{aligned} p = im &\Rightarrow \Phi = Ae^{im\phi} \\ p = -m &\Rightarrow \Phi = Be^{-im\phi} \end{aligned}$$

Se o domínio de ϕ, para um dado problema, for $0 \leq \phi \leq 2\pi$, então é preciso considerar a unicidade do potencial elétrico em relação a este ângulo, o que significa que, ao dar uma volta completa no ângulo ϕ, voltamos à posição inicial, de modo que o potencial elétrico não deve ter um valor diferente. Assim, é preciso que

$$\begin{aligned} e^{\pm im\phi}\Big|_0 &= e^{\pm im\phi}\Big|_{2\pi} \\ e^{\pm im.0} &= e^{\pm im2\pi} \\ 1 &= e^{\pm 2\pi m} \\ 1 &= \cos 2\pi m \pm i \operatorname{sen} 2\pi m \end{aligned}$$

Esta equação só é satisfeita se m é um número inteiro. Portanto, para os casos em que o problema não impõe restrições sobre o ângulo ϕ, m deve ser inteiro. Nas outras situações, m não precisa necessariamente ser um inteiro.

As soluções acima formam a solução geral

$$\Phi_{m\neq 0}(\phi) = A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi} \tag{6.50}$$

que pode ser reescrita, em termos de senos e cossenos, como

$$\Phi_{m\neq 0}(\phi) = A_m \cos m\phi + B_m \operatorname{sen} m\phi \tag{6.51}$$

Quando $m = 0$, a equação diferencial fica

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0$$

que é resolvida imediatamente, através de duas integrações, resultando em

$$\Phi_0(\phi) = a_0 + b_0\phi \tag{6.52}$$

Note que, quando o ângulo ϕ é ilimitado, o coeficiente b_0 é necessariamente nulo, por causa da unicidade do potencial elétrico.

Vamos continuar com a obtenção da solução geral da equação de Laplace em esféricas. Precisamos considerar agora a equação diferencial

$$\frac{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right] = m^2$$

que, se for dividida por $\operatorname{sen}^2\theta$, pode ser reescrita como

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta\Theta}\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right] = \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

ou como

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta\Theta}\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]$$

Estas equações estão separadas, pois o lado esquerdo depende apenas de r enquanto o lado direito depende de θ. A constante de separação neste caso será $\ell(\ell+1)$, e assim, ficamos com as equações

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} = \ell(\ell+1)$$

e

$$\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta\Theta}\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right] = \ell(\ell+1)$$

A primeira equação pode ser colocada na forma

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} - \ell(\ell+1)R = 0 \tag{6.53}$$

que é uma equação diferencial de Cauchy-Euler [7], a ser resolvida através da substituição $r = e^t$ ou $t = \ln r$. Assim, obtemos

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dt}{dr}\frac{dR}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dR}{dt}$$

e

---

[7] Veja, por exemplo, *Equações Diferenciais Aplicadas à Física.*

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left[\frac{dR}{dr}\right] = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{dR}{dt}\right] = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{dR}{dt}\right] - \frac{1}{r^2}\frac{dR}{dt}$$
$$= \frac{1}{r}\frac{dt}{dr}\frac{d}{dt}\left[\frac{dR}{dt}\right] - \frac{1}{r^2}\frac{dR}{dt} = \frac{1}{r^2}\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dR}{dt} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{dR}{dt}\right]$$

Com estas definições, a equação diferencial para R fica

$$r^2\frac{1}{r^2}\left[\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{dR}{dt}\right] - \ell(\ell+1)R = 0$$
$$\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{dR}{dt} - \ell(\ell+1)R = 0$$

que é uma equação com coeficientes constantes. Sua equação característica é

$$p^2 - p - \ell(\ell+1) = 0$$

ou

$$p(p-1) - \ell(\ell+1) = 0$$

cujas raízes são $p = -\ell$ ou $p = \ell+1$, que podem ser conferidas por substituição direta. Com estes valores para p, as soluções em t são

$$R(t) = Ce^{(\ell+1)t} + De^{-\ell t}$$

e voltando para r, obtemos

$$R_\ell(r) = C_\ell r^{\ell+1} + D_\ell r^{-\ell} \tag{6.54}$$

que vale inclusive quando $\ell = 0$. Neste caso, a equação diferencial torna-se

$$\frac{d^2R}{dr^2} = 0$$

que é resolvida através de duas integrações, fornecendo

$$R_0(r) = D_0 + C_0 r \tag{6.55}$$

A solução 6.54 fica, quando $\ell = 0$,

$$R_0(r) = C_0 r^{0+1} + D_0 r^{-0}$$
$$R_0(r) = C_0 r + D_0$$

que é idêntica à equação 6.55. Note que ℓ, por enquanto, é um parâmetro real.

Por fim, vamos resolver a equação diferencial para Θ, que é

$$\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta\Theta}\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right] = \ell(\ell+1)$$

ou, multiplicando-a por $-\Theta$ e rearranjando os termos,

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]\Theta = 0 \tag{6.56}$$

Em seguida, fazemos a substituição $x = \cos\theta$. Assim,

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx} = -\operatorname{sen}\theta\frac{d}{dx}$$

Com esta substituição, achamos

$$\frac{-\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{dx}\left[-\operatorname{sen}^2\theta\frac{d\Theta}{dx}\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d\Theta}{dx}\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0$$

e finalmente,

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0 \tag{6.57}$$

Esta equação diferencial é chamada de *equação diferencial generalizada de Legendre.* Quando $m = 0$, ela se torna

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \ell(\ell+1)\Theta = 0 \tag{6.58}$$

que é a *equação diferencial de Legendre.* Tanto a equação de Legendre quanto a equação generalizada de Legendre são resolvidas através do método de séries, e suas soluções são polinômios, conhecidos como *polinômios de Legendre* $P_\ell(x)$, ou *polinômios generalizados de Legendre* $P_{\ell,m}(x)$. O apêndice C apresenta a resolução completa e detalhada das duas equações, e sugerimos que você o consulte. Aqui, vamos apenas utilizar as soluções, sem resolver as equações diferenciais.

6.5.1 Soluções da Equação de Laplace em Coordenadas Esféricas Envolvendo os Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre $P_\ell(x)$ são as soluções da equação de Legendre quando $m = 0$, que corresponde ao caso em que o sistema tem uma simetria axial ao redor de um eixo, como é o caso, por exemplo, de um disco, um anel, uma esfera, um hemisfério, etc. Eles podem ser obtidos através da fórmula C.9,

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2 - 1\right)^\ell$$

que é a fórmula de Rodrigues para os polinômios de Legendre. A tabela 6.2 apresenta alguns desses polinômios, normalizados para terem valor unitário quando $x = 1$ [8].

ℓ	$P_\ell(x)$	$P_\ell(\cos\theta)$
0	1	1
1	x	$\cos\theta$
2	$\frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$	$\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$
3	$\frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$	$\frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)$
4	$\frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$	$\frac{1}{8}\left(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3\right)$
5	$\frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)$	$\frac{1}{8}\left(63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta\right)$

Tabela 6.2: Polinômios de Legendre para alguns valores de ℓ, em função de x e de $\cos\theta$.

Assim, quando $m = 0$, as soluções são formadas pelas equações 6.52, 6.54 e pelos polinômios de Legendre $P_\ell(\cos\theta)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{\ell,0}(r,\theta,\phi) &= \Phi_0(\phi)\frac{R_0(r)}{r}\Theta_\ell(\theta) \\ \mathbb{V}_{\ell,0}(r,\theta,\phi) &= (a_0 + b_0\phi)\left(C_\ell r^\ell + D_\ell r^{-(\ell+1)}\right)P_\ell(\cos\theta) \end{aligned} \tag{6.59}$$

[8] Veja que os polinômios de Legendre possuem uma paridade bem definida e que os valores possíveis para ℓ são apenas números naturais. Este resultado, que é obtido quando resolvemos a equação diferencial, pode ser visto no apêndice C.

que, se somadas, formam a solução geral

$$\mathbb{V}_0(r,\theta,\phi) = (a_0 + b_0\phi)\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(C_\ell r^\ell + D_\ell r^{-(\ell+1)}\right)P_\ell(\cos\theta) \tag{6.60}$$

válida para os problemas em que $m = 0$, ou seja, aqueles em que há uma simetria axial em torno de um eixo, como numa esfera, num hemisfério, num anel, num disco, etc. Note que, se a origem faz parte do domínio da solução, pode ser necessário zerar alguns dos coeficientes D_ℓ. Vejamos agora alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 6.4. *Considere uma esfera de raio R, submetida a um potencial V_0 na sua superfície. Calcule o potencial dentro e fora da esfera.*

Este problema exibe uma óbvia simetria esférica em torno de qualquer eixo que passe pelo centro da esfera, e sendo assim, $m = 0$, o que significa que devemos utilizar a solução 6.60 para obter o potencial dentro e fora da esfera. Iniciamos com a região $r < R$, isto é, dentro da esfera. Neste caso, como não há nenhuma carga livre dentro da esfera e como a origem faz parte da solução, os coeficientes D_ℓ, com $\ell \geq 0$, são todos nulos, pois, de outra maneira, haveria uma divergência no potencial elétrico em $r = 0$, o que não deve ocorrer. Com esta condição, a equação 6.60 fica

$$\mathbb{V}_0(r,\theta,\phi) = (a_0 + b_0\phi)\sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta)$$

O ângulo ϕ é ilimitado e, portanto, o potencial precisa ter o mesmo valor em $\phi = 0$ e $\phi = 2\pi$. Isso faz com que a constante b_0 se anule. Incorporando a constante a_0 em C_ℓ, ficamos com

$$\mathbb{V}_0(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta)$$

e observamos que o potencial elétrico na verdade não depende da coordenada ϕ. Em $r = R$, o potencial vale V_0, ou seja,

$$\mathbb{V}_0(R,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell R^\ell P_\ell(\cos\theta)$$

$$V_0 = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell R^\ell P_\ell(\cos\theta)$$

e agora temos uma expansão em série de V_0 em termos dos polinômios de Legendre $P_\ell(\cos\theta)$. Definindo

$$c_\ell = C_\ell R^\ell$$

vemos que esta série é exatamente a dada na expressão C.14 do apêndice C, chamada série de Legendre. Assim, se $f(x)$ é uma função qualquer, sua expansão em série de Legendre é dada pela equação C.14,

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(x)$$

onde os coeficientes A_ℓ são obtidos através da expressão C.15,

$$A_\ell = \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_\ell(x)\,dx$$

No nosso caso, $A_\ell = c_\ell$, $x = \cos\theta$ e $f(x) = V_0$, de modo que temos

$$c_\ell = \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} V_0 P_\ell(x)\,dx$$

ou

$$C_\ell = \frac{(2\ell+1)V_0}{2R^\ell}\int_{-1}^{1} P_\ell(x)\,dx$$

sendo que deixamos a integral em x porque assim é mais fácil efetuá-la. Vamos calcular alguns valores de C_ℓ. Quando $\ell = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{(2.0+1)V_0}{2R^0}\int_{-1}^{1} P_0(x)\,dx \\ &= \frac{V_0}{2}\int_{-1}^{1} dx \\ &= \frac{V_0}{2}\big[x\big]_{-1}^{1} \\ C_0 &= V_0 \end{aligned}$$

Se $\ell = 1$, o resultado é

$$C_1 = \frac{(2.1+1)V_0}{2R^1}\int_{-1}^{1} P_1(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{3V_0}{2R}\int_{-1}^{1} x\ dx \\ &= \frac{3V_0}{2R}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{3V_0}{4R}[1-1] \\ C_1 &= 0\end{aligned}$$

Observe que, como $P_\ell(x)$ é ímpar se ℓ é ímpar, todas as integrais destes polinômios são nulas e resultam em coeficientes C_ℓ nulos quando ℓ é ímpar. Vejamos o que ocorre com $\ell = 2$.

$$\begin{aligned}C_2 &= \frac{(2.2+1)V_0}{2R^2}\int_{-1}^{1} P_2(x)\ dx \\ &= \frac{5V_0}{2R^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\ dx \\ &= \frac{5V_0}{4R^2}\left[x^3-x\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{5V_0}{4R^2}[1-1-1+1] \\ C_2 &= 0\end{aligned}$$

Na verdade, todos os coeficientes C_ℓ se anulam quando $\ell \geq 1$, e assim, resta apenas C_0, que vale V_0. A solução para o potencial elétrico fica, simplesmente,

$$\mathbb{V}_0(r,\theta) = V_0, \qquad r \leq R \tag{6.61}$$

e o potencial elétrico dentro da esfera é constante. Como o campo elétrico é o gradiente negativo do potencial, dentro da esfera o campo elétrico é nulo. Vejamos agora a situação fora da esfera, para $r > R$. O potencial é dado pela solução geral 6.60,

$$\mathbb{V}_0(r,\theta,\phi) = (a_0' + b_0'\phi)\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(C_\ell' r^\ell + D_\ell' r^{-(\ell+1)}\right)P_\ell(\cos\theta)$$

Como antes, o ângulo ϕ é ilimitado, e portanto, $b_0' = 0$. A solução para o potencial precisa valer quando $r \to \infty$, e assim, necessariamente, $C_\ell' = 0$ se $\ell \geq 1$. O potencial, com estas condições, fica

$$\mathbb{V}_0(r,\theta) = a_0' \sum_{\ell=0}^{\infty} D_\ell' r^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos\theta) + a_0' C_0'$$

ou ainda, incorporando a constante a_0' nas outras,

$$\mathbb{V}_0(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} D_\ell' r^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos\theta) + C_0'$$

Em $r = R$, o potencial vale V_0, ou seja,

$$\mathbb{V}_0(R,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} D_\ell' R^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos\theta) + C_0'$$

$$V_0 = \sum_{\ell=0}^{\infty} D_\ell' R^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos\theta) + C_0'$$

Esta expressão também é uma série de Legendre, se considerarmos que $C_0' = 0$ e $d_\ell' = D_\ell' R^{-(\ell+1)}$. O resultado é

$$\therefore \quad V_0 = \sum_{\ell=0}^{\infty} d_\ell' P_\ell(\cos\theta)$$

sendo que os coeficientes d_ℓ' são obtidos através de C.15,

$$A_\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_\ell(x)\, dx$$

ou, no nosso caso,

$$d_\ell' = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^{1} V_0 P_\ell(x)\, dx$$

ou ainda,

$$D_\ell' = \frac{(2\ell+1)V_0 R^{\ell+1}}{2} \int_{-1}^{1} P_\ell(x)\, dx$$

Lembrando que $P_\ell(x)$ é ímpar se ℓ é ímpar, temos que a integral acima se anula nestes casos. Além disso, quando $\ell \geq 2$, a integral também se anula, restando apenas o caso $\ell = 0$, que vale

$$\begin{aligned} D_0' &= \frac{(2.0+1)V_0R^{0+1}}{2}\int_{-1}^{1} P_0(x)\ dx \\ &= \frac{V_0R}{2}\int_{-1}^{1} dx \\ &= \frac{V_0R}{2}\left[x\right]_{-1}^{1} \\ D_0' &= V_0R \end{aligned}$$

de modo que o potencial fica

$$\mathbb{V}_0(r,\theta) = V_0Rr^{-1}P_0(\cos\theta)$$

ou

$$\mathbb{V}_0(r) = V_0\frac{R}{r}, \qquad r \geq R \tag{6.62}$$

Veja que o potencial é contínuo em $r = R$, e ele vale, por qualquer uma das expressões 6.61 ou 6.62,

$$\mathbb{V}_0(R) = V_0$$

Além disso, lembrando que o potencial elétrico gerado por uma carga pontual é dado pela equação 5.14,

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

temos, colocando a carga na origem, em $\vec{r}\,' = 0$,

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

e vemos que a esfera se comporta como se fosse uma carga pontual, para pontos situados fora da esfera, sendo o valor da carga tal que

$$\begin{aligned} V_0R &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \\ Q &= 4\pi\epsilon_0RV_0 \end{aligned}$$

Assim, uma esfera submetida a um potencial V_0 corresponde, para fora da esfera, a uma carga pontual situada na origem, de valor $Q = 4\pi\epsilon_0RV_0$. Isto

se verifica também com o campo elétrico, obtido do gradiente negativo do potencial, ou seja, utilizando a expressão B.16 do apêndice B,

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}} &= -\nabla\mathbb{V} \\
&= -\left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\phi}}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\left[V_0\frac{R}{r}\right] \\
&= -V_0R\,\hat{\mathbf{r}}\frac{-1}{r^2} \\
\vec{\mathcal{E}} &= \frac{V_0R}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}, \qquad r \geq R
\end{aligned}$$

que é o campo característico de uma carga pontual, se identificarmos $Q = 4\pi\epsilon_0 RV_0$. Esta verificação é importante e será utilizada posteriormente em outros problemas. Vejamos mais um caso relevante.

Exemplo 6.5. *Considere um campo elétrico uniforme $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0$, produzido, por exemplo, por duas placas metálicas como as dos exemplos 4.14 ou 5.9. Dentro da região delimitada por essas placas, é colocada uma esfera condutora descarregada e isolada, de raio R. O raio da esfera, quando comparado com a distância entre as placas, é tal que ela não perturba a uniformidade do campo nas regiões afastadas dela, mas, nas regiões próximas, o campo é afetado. Responda ao seguinte.*

a) Calcule o potencial elétrico na região externa à esfera.

Para obtermos o potencial elétrico externo à esfera, precisamos inicialmente explicitar as condições de contorno do problema, o que depende de uma análise física dele. Primeiro, devemos lembrar que a superfície de um condutor forma uma superfície equipotencial e que, desse modo, a superfície da esfera está num potencial fixo V_0. Como não há cargas na esfera, e tendo em conta que ela está isolada, esse potencial pode ser considerado como sendo nulo, ou seja, $V_0 = 0$.

O campo elétrico, antes da colocação da esfera, era constante e homogêneo em todo o espaço. Podemos colocar o eixo z na mesma direção e sentido que o do campo, que fica sendo $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0\,\hat{\mathbf{k}}$ [9]. Esse campo é o gradiente

[9] Esta escolha é arbitrária, mas facilita o entendimento do problema.

negativo de um potencial elétrico apropriado. Considerando coordenadas retangulares, o gradiente é dado pela equação 1.51, que, para o potencial elétrico, fica

$$\nabla\mathbb{V} = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial z}$$

e assim,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V}$$
$$\mathcal{E}_0\,\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial z}$$

Da equação acima, é fácil perceber que

$$\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial z} = -\mathcal{E}_0$$

ou seja, o potencial $\mathbb{V}$ não depende de x ou y, e sim de z, e de uma forma simples, que podemos obter ao integrar a última expressão acima, isto é,

$$\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial z} = -\mathcal{E}_0$$
$$\int_{\mathbb{V}_0}^{\mathbb{V}} \partial\mathbb{V} = -\int_0^z \mathcal{E}_0\partial z$$
$$\mathbb{V} - \mathbb{V}_0 = -\mathcal{E}_0 z$$
$$\mathbb{V} = -\mathcal{E}_0 z + \mathbb{V}_0 \tag{6.63}$$

Quando colocamos a esfera no campo elétrico uniforme, ele age sobre os elétrons da esfera, de forma que, se considerarmos o eixo z orientado com o sentido positivo para cima, os elétrons são atraídos para a parte de baixo da esfera, enquanto a parte de cima fica com falta de elétrons, tornando-se positiva. Ocorre uma indução eletrostática, mas a carga total sobre a superfície da esfera é nula, já que ela está isolada e não recebe cargas de nenhum lugar. Os elétrons movem-se até que a repulsão entre eles contrabalança a força elétrica causada pelo campo externo, quando então a situação fica estacionária. Esta distribuição de cargas sobre a esfera é não-homogênea, e ela gera, por sua vez, um campo e um potencial elétrico que se somam ao campo e potencial

externos, de forma que o campo elétrico próximo à esfera tem a configuração apresentada na figura 6.3.

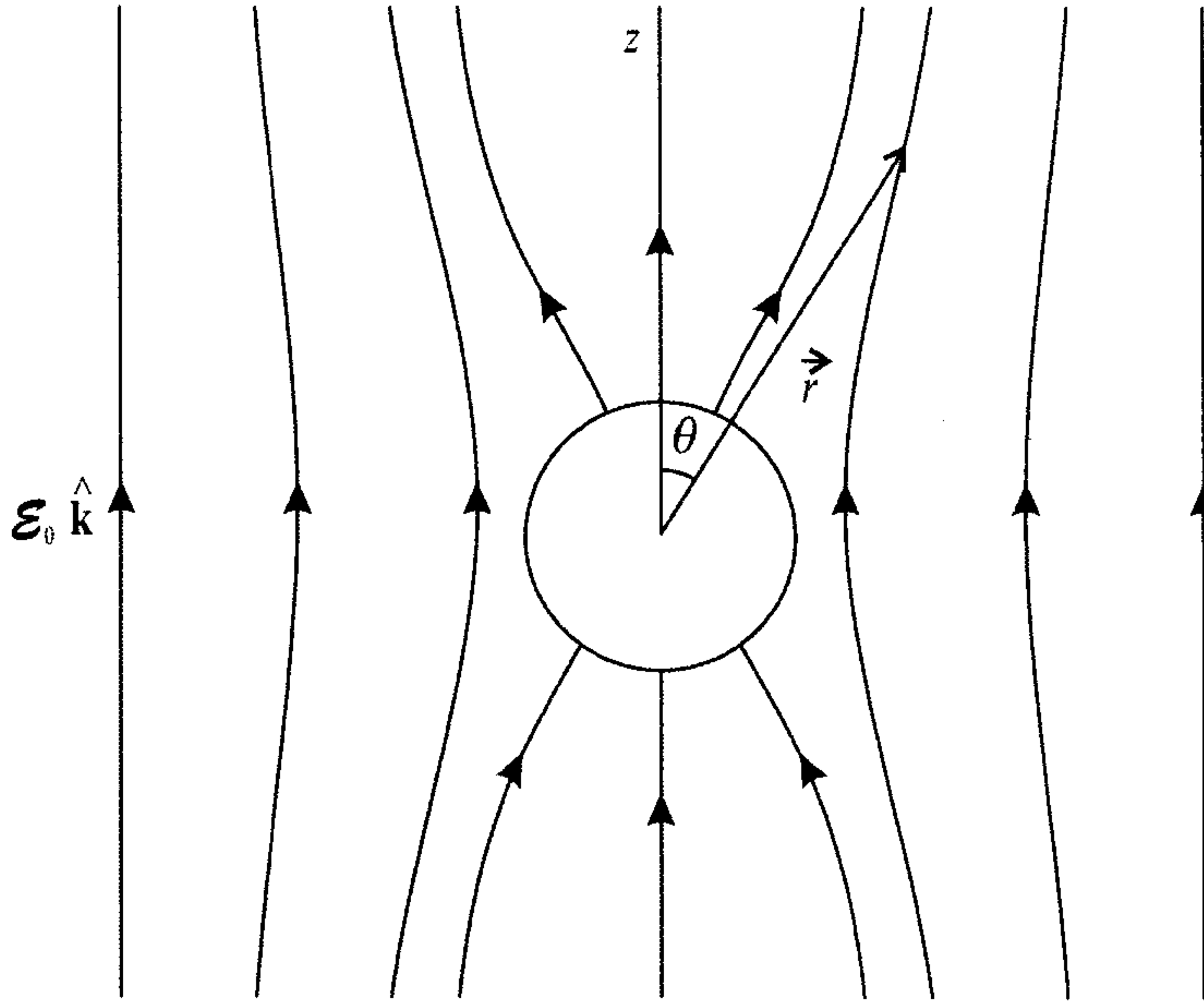



Figura 6.3: Linhas de campo elétrico para uma esfera descarregada e isolada colocada num campo elétrico externo homogêneo e constante $\mathcal{E}_0\,\hat{\mathbf{k}}$.

Este campo, a uma distância grande da esfera, é dado apenas pelo campo externo inicial, ao passo que, sobre a esfera, o campo deve ser perpendicular à superfície, uma vez que a condição estática já foi atingida. Além disso, o problema tem uma simetria esférica em torno do eixo z, o que sugere a utilização de coordenadas esféricas. Outra questão refere-se ao fato de que, como o campo é homogêneo, a densidade de carga induzida sobre a esfera não deve depender do ângulo ϕ, que, na figura, está num plano perpendicular ao campo elétrico. Assim, este é um caso em que $m = 0$, pois há uma simetria axial em torno de um eixo, que é o eixo z. Sendo assim, a solução para o potencial elétrico é obtida através da equação 6.60, isto é,

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = (a_0 + b_0\phi)\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(C_\ell r^\ell + D_\ell r^{-(\ell+1)}\right)P_\ell(\cos\theta)$$

onde os coeficientes precisam ser determinados pelas condições de contorno.

Primeiro, temos que, para os pontos muito distantes da esfera, o potencial é o da expressão 6.63, que, escrito em coordenadas esféricas, fica

$$\mathbb{V}(r \to \infty, \theta) = -\mathcal{E}_0 r \cos\theta + \mathbb{V}_0$$

Note que, formalmente, quando $r \to \infty$, a expressão acima dá como resultado $\mathbb{V} \to \infty$. No entanto, isto não nos ajudaria muito, e não poderíamos utilizar esta condição, que é importante. Assim, devemos considerar a forma funcional como $\mathbb{V}$ se comporta quando $r \to \infty$, que é dada por esta equação.

Além da condição acima, o ângulo ϕ é ilimitado, e assim, a expansão do potencial fica

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \big(C_\ell r^\ell + D_\ell r^{-(\ell+1)}\big) P_\ell(\cos\theta)$$

ou

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(r,\theta) = {} & C_0 P_0(\cos\theta) + \frac{D_0}{r} P_0(\cos\theta) + C_1 r P_1(\cos\theta) \\ & + \frac{D_1}{r^2} P_1(\cos\theta) + C_2 r^2 P_2(\cos\theta) + \frac{D_2}{r^3} P_2(\cos\theta) + \cdots\end{aligned}$$

ou ainda, explicitando os $P_\ell(\cos\theta)$, de acordo com a tabela 6.2,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(r,\theta) = {} & C_0 + \frac{D_0}{r} + C_1 r\cos\theta + \frac{D_1}{r^2}\cos\theta \\ & + C_2 r^2 \frac{1}{2}\big(3\cos^2\theta - 1\big) + \frac{D_2}{r^3}\frac{1}{2}\big(3\cos^2\theta - 1\big) + \cdots\end{aligned}$$

Agora utilizamos a condição em $r \to \infty$. Neste caso, todos os termos com r no denominador se anulam, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(r \to \infty, \theta) &= C_0 + C_1 r\cos\theta + + C_2 r^2 \frac{1}{2}\big(3\cos^2\theta - 1\big) + \cdots \\ -\mathcal{E}_0 r\cos\theta + \mathbb{V}_0 &= C_0 + C_1 r\cos\theta + + C_2 r^2 \frac{1}{2}\big(3\cos^2\theta - 1\big) + \cdots\end{aligned}$$

de onde extraímos, mediante a igualdade de polinômios,

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \mathbb{V}_0 \\
C_1 &= -\mathcal{E}_0 \\
C_\ell &= 0, \qquad \ell \geq 2
\end{aligned}
$$

Com estas condições, o potencial fica

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \mathbb{V}_0 + \frac{D_0}{r} - \mathcal{E}_0 r\cos\theta + \frac{D_1}{r^2}\cos\theta + \frac{D_2}{r^3}\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots$$

ou

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \mathbb{V}_0 + \frac{D_0}{r} + \left(\frac{D_1}{r^2} - \mathcal{E}_0 r\right)\cos\theta + \frac{D_2}{r^3}\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots$$

Aqui, precisamos fazer mais uma consideração física. Como a esfera não tem cargas, ela não pode ter um termo proporcional a $\frac{1}{r}$, que é característico do potencial elétrico de cargas pontuais, como comentamos no final da seção 6.4, antes dos exemplos resolvidos. Portanto, é necessário que façamos $D_0 = 0$ na expressão acima, para eliminar este termo indesejado, ou seja,

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \mathbb{V}_0 + \left(\frac{D_1}{r^2} - \mathcal{E}_0 r\right)\cos\theta + \frac{D_2}{r^3}\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots$$

O potencial sobre a esfera é nulo, e assim,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(R,\theta) &= \mathbb{V}_0 + \left(\frac{D_1}{R^2} - \mathcal{E}_0 R\right)\cos\theta + \frac{D_2}{R^3}\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots \\
0 &= \mathbb{V}_0 + \left(\frac{D_1}{R^2} - \mathcal{E}_0 R\right)\cos\theta + \frac{D_2}{R^3}\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots
\end{aligned}
$$

Para que a equação acima seja válida para qualquer valor de θ, devemos ter

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}_0 &= 0 \\
\frac{D_1}{R^2} - \mathcal{E}_0 R &= 0 \Rightarrow D_1 = \mathcal{E}_0 R^3 \\
D_\ell &= 0, \qquad \ell \geq 2
\end{aligned}
$$

de modo que o potencial elétrico torna-se

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \left(\frac{\mathcal{E}_0 R^3}{r^2} - \mathcal{E}_0 r\right)\cos\theta$$

ou

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \frac{\mathcal{E}_0 R^3}{r^2}\cos\theta - \mathcal{E}_0 r\cos\theta$$

Observe que, na expressão acima, o segundo termo do lado direito é o potencial elétrico devido ao campo elétrico externo homogêneo, ao passo que o primeiro é o potencial elétrico gerado pelas cargas induzidas sobre a esfera. Esse termo,

$$\mathbb{V}_{\text{esfera}} = \frac{\mathcal{E}_0 R^3}{r^2}\cos\theta$$

pode ser reescrito como

$$\mathbb{V}_{\text{esfera}} = \frac{\mathcal{E}_0 R^3}{r^3} r\cos\theta$$

Podemos compará-lo com o potencial elétrico gerado por um dipolo pontual, dado pela equação 5.33, considerando $\vec{r}\,' = 0$, o que resulta em

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^3} r\cos\theta$$

Da comparação entre as duas equações, vemos que o potencial elétrico gerado pela esfera é idêntido ao de um dipolo elétrico pontual situado no centro da esfera, se o momento de dipolo for dado, em módulo, por

$$\mathcal{E}_0 R^3 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}$$

ou

$$p = 4\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_0 R^3$$

Este momento de dipolo deve estar orientado no sentido positivo do eixo z, e assim,

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_0 R^3\,\hat{\mathbf{k}} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{\mathcal{E}}_0$$

Da expressão

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^3} r\cos\theta$$

obtemos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

Assim, a "impressão digital" de um dipolo elétrico pontual é dada pelos termos proporcionais ao inverso do quadrado da distância (em esféricas) nos potenciais elétricos, como se percebe da equação acima. Esses termos, num dado potencial elétrico, caracterizam a presença de dipolos elétricos, e se tivermos dipolos elétricos, o potencial elétrico apresentará esses termos.

b) Qual é o campo elétrico externo à esfera?

Podemos obter o campo elétrico através do gradiente negativo do potencial, ou seja, utilizando a expressão B.17,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V}(r,\theta)$$

$$\vec{\mathcal{E}} = -\left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\left[\frac{\mathcal{E}_0 R^3}{r^2}\cos\theta - \mathcal{E}_0 r\cos\theta\right]$$

A componente em $\hat{\mathbf{r}}$ fica

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}_{\hat{\mathbf{r}}} &= -\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\mathcal{E}_0 R^3}{r^2}\cos\theta - \mathcal{E}_0 r\cos\theta\right] \\
&= \left[\frac{2\mathcal{E}_0 R^3}{r^3}\cos\theta + \mathcal{E}_0\cos\theta\right]\hat{\mathbf{r}} \\
\vec{\mathcal{E}}_{\hat{\mathbf{r}}} &= \mathcal{E}_0\left[1 + 2\frac{R^3}{r^3}\right]\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}}
\end{aligned}$$

e a componente em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= -\frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\mathcal{E}_0 R^3}{r^2}\cos\theta - \mathcal{E}_0 r\cos\theta\right] \\
&= \left[\frac{\mathcal{E}_0 R^3}{r^3}\,\mathrm{sen}\,\theta + \mathcal{E}_0\,\mathrm{sen}\,\theta\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
\vec{\mathcal{E}}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= \mathcal{E}_0\left[1 + \frac{R^3}{r^3}\right]\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}$$

de modo que o campo elétrico fica

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 \left[1 + 2\frac{R^3}{r^3}\right] \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \mathcal{E}_0 \left[1 + \frac{R^3}{r^3}\right] \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

c) Calcule a densidade de carga induzida e também a carga total induzida.

A densidade de carga induzida na superfície da esfera pode ser obtida através da expressão 6.44, que é

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}$$

onde $\hat{n}$ é a normal à superfície. No nosso caso, $\hat{n} = \hat{\mathbf{r}}$, e assim,

$$\begin{aligned}
\sigma(R,\theta) &= \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}(R,\theta) \cdot \hat{\mathbf{r}} \\
&= \epsilon_0 \left\{ \mathcal{E}_0 \left[1 + 2\frac{R^3}{R^3}\right] \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \mathcal{E}_0 \left[1 + \frac{R^3}{R^3}\right] \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\
\sigma(R,\theta) &= 3\epsilon_0 \mathcal{E}_0 \cos\theta
\end{aligned}$$

Se integrarmos a densidade de cargas, obteremos a carga total induzida na esfera. Essa carga deve ser nula, já que a esfera estava isolada e descarregada. Vejamos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(R,\theta) \operatorname{sen}\theta\, d\theta d\phi &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 3\epsilon_0 \mathcal{E}_0 \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta d\phi \\
Q_{\text{induzida}} &= 3\epsilon_0 \mathcal{E}_0 \left[\phi\right]_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta \\
Q_{\text{induzida}} &= 6\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_0 \int_0^{\pi} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta
\end{aligned}$$

Para resolver esta integral, fazemos

$$\begin{aligned}
u &= \operatorname{sen}^2\theta \\
du &= 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta \\
\operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta &= \frac{du}{2}
\end{aligned}$$

e então,

$$Q_{\text{induzida}} = 6\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_0 \int_0^{\pi} \frac{du}{2}$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{induzida}} &= 3\pi\epsilon_0\mathcal{E}_0\left[u\right]_0^{\pi} \\ &= 3\pi\epsilon_0\mathcal{E}_0\left[\text{sen}^2\,\theta\right]_0^{\pi} \\ Q_{\text{induzida}} &= 0 \end{aligned}$$

de forma que a carga induzida é nula, como deve ser. Veja que procuramo resolver este problema de uma forma fundamentalmente física, explorand os conceitos já vistos. Isto é importante para desenvolver a intuição física respeito dos problemas mais complicados que serão vistos posteriormente.

Exemplo 6.6. *Considere, no problema anterior, que a esfera tenha inicia mente uma carga Q. Qual é o potencial elétrico para esta situação?*

No exemplo anterior, vimos o caso de uma esfera descarregada e isolada imersa num campo elétrico externo uniforme. Assim, o campo externo ag sobre a esfera, de forma que ele produz uma separação de cargas e gera um densidade de cargas induzidas, que se movem até que a força elétrica causad pelo campo externo seja equilibrada pelas forças elétricas entre essas cargas Quando isso ocorre, temos a situação estática e o potencial elétrico passa ser a soma do potencial gerado pelo campo externo com a contribuição devid às cargas induzidas.

Agora, considere que adicionamos uma carga Q à esfera. Essa carga va se distribuir sobre a superfície da esfera, sujeita às forças de repulsão entre a cargas elementares que formam a carga Q. Elas não estão submetidas às força geradas pelas cargas induzidas ou pelo campo externo, pois estas últimas j se equilibraram e têm uma resultante nula. Assim, a carga Q acrescentada s distribui de modo homogêneo sobre a superfície da esfera. A carga Q, par pontos fora da esfera, age como se estivesse concentrada no centro da esfer (veja o exemplo 5.6) e, portanto, ela gera, para os pontos fora da esfera, un potencial

$$\mathbb{V}_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Desta forma, a solução para o potencial elétrico fora da esfera é a soma dest última expressão com a expressão do potencial elétrico obtida no exempl anterior, ou seja,

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \frac{\mathcal{E}_0 R^3}{r^2}\cos\theta - \mathcal{E}_0 r\cos\theta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

O campo elétrico e a carga total sobre a superfície da esfera são deixados como exercício (veja o exercício 6.3).

Exemplo 6.7. *Considere uma esfera de raio R cortada ao meio, formando dois hemisférios, um submetido a um potencial V_0 e o outro, a um potencial $-V_0$. Calcule o potencial gerado por eles.*

Este problema também tem uma simetria em torno de um eixo perpendicular ao corte feito na esfera, e assim, $m = 0$. Além disso, ϕ é ilimitado, o que anula o coeficiente b_0 na solução 6.60, que fica, incorporando a_0 às outras constantes,

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \big(C_\ell r^\ell + D_\ell r^{-(\ell+1)}\big) P_\ell(\cos\theta)$$

Dentro dos hemisférios não existem cargas livres, e assim, necessariamente, $D_\ell = 0$, $\ell \geq 0$. O potencial elétrico fica

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta)$$

e agora, considerando que o hemisfério submetido ao potencial V_0 está situado na parte positiva acima do plano xy, temos as condições

$$\mathbb{V}(R,\theta) = \begin{cases} +V_0, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -V_0, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Portanto, em $r = R$, obtemos

$$\mathbb{V}(R,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell R^\ell P_\ell(\cos\theta)$$

e os coeficientes C_ℓ são calculados através da expressão C.15, ou seja,

$$C_\ell = \frac{2\ell+1}{2R^\ell} \int_{-1}^{1} \mathbb{V}(R,x) P_\ell(x)\, dx$$

sendo que

$$\mathbb{V}(R,x) = \begin{cases} +V_0, & 0 \leq x \leq 1 \\ -V_0, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \tag{6.64}$$

Vamos encontrar alguns desses coeficientes. Quando $\ell = 0$, temos

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{2 \times 0 + 1}{2R^0} \int_{-1}^{1} \mathbb{V}(R,x) P_0(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} -V_0\, dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{1} V_0\, dx \\ &= -\frac{V_0}{2} \left[x\right]_{-1}^{0} + \frac{V_0}{2} \left[x\right]_{0}^{1} \\ &= -\frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{2} \\ C_0 &= 0 \end{aligned}$$

Se $\ell = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2 \times 1 + 1}{2R^1} \int_{-1}^{1} \mathbb{V}(R,x) P_1(x)\, dx \\ &= \frac{3}{2R} \int_{-1}^{0} -V_0 x\, dx + \frac{3}{2R} \int_{0}^{1} V_0 x\, dx \\ &= -\frac{3V_0}{2R} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \frac{3V_0}{2R} \left[\frac{x^2}{2}\right] \\ &= \frac{3V_0}{4R} + \frac{3V_0}{4R} \\ C_1 &= \frac{3V_0}{2R} \end{aligned}$$

O coeficiente C_2 vale

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{2 \times 2 + 1}{2R^2} \int_{-1}^{1} \mathbb{V}(R,x) P_2(x)\, dx \\ &= \frac{5}{2R^2} \int_{-1}^{0} -V_0 \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) dx + \frac{5}{2R^2} \int_{0}^{1} V_0 \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) dx \\ &= -\frac{5V_0}{4R^2} \left[x^3 - x\right]_{-1}^{0} + \frac{5V_0}{4R^2} \left[x^3 - x\right]_{0}^{1} \\ C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Quando $\ell = 3$, temos

$$\begin{aligned}
C_3 &= \frac{2 \times 3 + 1}{2R^3} \int_{-1}^{1} \mathbb{V}(R, x) P_3(x)\, dx \\
&= \frac{7}{2R^3} \int_{-1}^{0} -V_0 \frac{1}{2}\big(5x^3 - 3x\big)\, dx + \frac{7}{2R^3} \int_{0}^{1} V_0 \frac{1}{2}\big(5x^3 - 3x\big)\, dx \\
&= -\frac{7V_0}{4R^3}\left[\frac{5x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \frac{7V_0}{4R^3}\left[\frac{5x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{1} \\
&= -\frac{7V_0}{4R^3}\left[-\frac{5}{4} + \frac{3}{2}\right] + \frac{7V_0}{4R^3}\left[\frac{5}{4} - \frac{3}{2}\right] \\
C_3 &= -\frac{7V_0}{8R^3}
\end{aligned}$$

O coeficiente C_4 deve ser igual a zero, pois o potencial em $r = R$, dado pela expressão 6.64, é uma função ímpar. Como os polinômios de Legendre são funções pares se ℓ é par, a integral de $\mathbb{V}(R, x)P_\ell(x)$ se anula quando P_ℓ é par, como de fato ocorreu com C_0 e C_2. Assim, $C_\ell = 0, \forall \ell\,$par. O próximo coeficiente é C_5, que vale

$$C_5 = \frac{2 \times 5 + 1}{2R^5} \int_{-1}^{1} \mathbb{V}(R, x) P_5(x)\, dx$$

ou

$$\begin{aligned}
C_5 = \frac{11}{2R^5} \int_{-1}^{0} -V_0 \frac{1}{8}\big(63x^5 - 70x^3 + 15x\big)\, dx \\
+ \frac{11}{2R^5} \int_{0}^{1} V_0 \frac{1}{8}\big(63x^5 - 70x^3 + 15x\big)\, dx
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
C_5 &= -\frac{11V_0}{16R^5} \int_{-1}^{0} \big(63x^5 - 70x^3 + 15x\big)\, dx + \frac{11V_0}{16R^5} \int_{0}^{1} \big(63x^5 - 70x^3 + 15x\big)\, dx \\
&= -\frac{11V_0}{16R^5}\left[\frac{63x^6}{6} - \frac{70x^4}{4} + \frac{15x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \frac{11V_0}{16R^5}\left[\frac{63x^6}{6} - \frac{70x^4}{4} + \frac{15x^2}{2}\right]_{0}^{1} \\
&= -\frac{11V_0}{16R^5}\left[-\frac{21}{2} + \frac{35}{2} - \frac{15}{2}\right] + \frac{11V_0}{16R^5}\left[\frac{21}{2} - \frac{35}{2} + \frac{15}{2}\right] \\
C_5 &= \frac{11V_0}{16R^5}
\end{aligned}$$

Determinados estes coeficientes, podemos voltar à expressão

$$\mathbb{V}(r,\theta)=\sum_{\ell=0}^{\infty}C_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta)$$

para obter o potencial elétrico gerado pelos hemisférios na região $r<R$. O resultado é

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(r,\theta)&=C_0r^0P_0(\cos\theta)+C_1r^1P_1(\cos\theta)+C_2r^2P_2(\cos\theta)\\&\quad+C_3r^3P_3(\cos\theta)+C_4r^4P_4(\cos\theta)+C_5r^5P_5(\cos\theta)+\cdots\end{aligned}$$

ou

$$\mathbb{V}(r,\theta)=\frac{3V_0}{2R}rP_1(\cos\theta)-\frac{7V_0}{8R^3}r^3P_3(\cos\theta)+\frac{11V_0}{16R^5}r^5P_5(\cos\theta)+\cdots$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(r,\theta)=V_0\Bigg[&\frac{3}{2}\left(\frac{r}{R}\right)P_1(\cos\theta)-\frac{7}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^3P_3(\cos\theta)\\&+\frac{11}{16}\left(\frac{r}{R}\right)^5P_5(\cos\theta)+\cdots\Bigg],\qquad r<R\quad(6.65)\end{aligned}$$

Note que, na equação acima, os polinômios de Legendre P_ℓ aparecem multiplicados pelo fator $\left(\frac{r}{R}\right)^\ell$ e por um coeficiente numérico. Como $r<R$, estes termos vão se tornando cada vez menores, e desse modo, os termos relevantes da expansão acima são aqueles com ℓ pequeno. Além disso, aparecem apenas os P_ℓ com ℓ ímpar. Vejamos agora o potencial para a região exterior aos dois hemisférios, onde $r>R$. Nessa região, pela equação 6.60, e lembrando que $b_0=0$ porque ϕ é ilimitado, o potencial é

$$\mathbb{V}(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(C_\ell r^\ell+D_\ell r^{-(\ell+1)}\right)P_\ell(\cos\theta)$$

Quando $r\to\infty$, o termo $C_\ell r^\ell$ diverge, a menos que $C_\ell=0$, se $\ell\geq1$. Portanto, o potencial fica

$$\mathbb{V}(r,\theta)=C_0+\sum_{\ell=0}^{\infty}D_\ell r^{-(\ell+1)}P_\ell(\cos\theta)$$

Em $r = R$, temos

$$\mathbb{V}(R,\theta) = C_0 + \sum_{\ell=0}^{\infty} D_\ell R^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos\theta)$$

Para que apareça uma série de Legendre, fazemos $C_0 = 0$, e assim,

$$\mathbb{V}(R,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} D_\ell R^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos\theta)$$

sendo que os coeficientes D_ℓ são dados pela equação C.15 adaptada para o nosso caso,

$$D_\ell = \frac{(2\ell+1)R^{\ell+1}}{2} \int_{-1}^{1} \mathbb{V}(R,x) P_\ell(x)\, dx$$

Vamos calcular alguns coeficientes, lembrando que $\mathbb{V}(R,x)$ é dado pela expressão 6.64,

$$\mathbb{V}(R,x) = \begin{cases} +V_0, & 0 \leq x \leq 1 \\ -V_0, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Quando $\ell = 0$, temos

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{(2\times 0+1)R^{0+1}}{2} \int_{-1}^{1} \mathbb{V}(R,x) P_0(x)\, dx \\ &= \frac{R}{2} \int_{-1}^{0} -V_0\, dx + \frac{R}{2} \int_{0}^{1} V_0\, dx \\ &= -\frac{RV_0}{2} \big[x\big]_{-1}^{0} + \frac{RV_0}{2} \big[x\big]_{0}^{1} \\ &= -\frac{RV_0}{2} + \frac{RV_0}{2} \\ D_0 &= 0 \end{aligned}$$

Veja que este resultado já era esperado, pois $P_\ell(x)$ é par se ℓ é par, $\mathbb{V}(R,x)$ é uma função ímpar e, portanto, a integral do produto $\mathbb{V}(R,x)P_\ell(x)$ se anula quando ℓ é par. Desse modo, $D_\ell = 0$ se ℓ é par. Vamos calcular o coeficiente D_1.

$$D_1 = \frac{(2\times 1+1)R^{1+1}}{2} \int_{-1}^{1} \mathbb{V}(R,x) P_1(x)\, dx$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= \frac{3R^2}{2}\int_{-1}^{0} -V_0 x\,dx + \frac{3R^2}{2}\int_{0}^{1} V_0 x\,dx \\
&= -\frac{3V_0R^2}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \frac{3V_0R^2}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right] \\
D_1 &= \frac{3V_0R^2}{2}
\end{aligned}$$

Se $\ell = 3$, obtemos

$$\begin{aligned}
D_3 &= \frac{(2\times 3+1)R^{3+1}}{2}\int_{-1}^{1} \mathbb{V}(R,x)P_3(x)\,dx \\
&= \frac{7R^4}{2}\int_{-1}^{0} -V_0\frac{1}{2}\big(5x^3-3x\big)\,dx + \frac{7R^4}{2}\int_{0}^{1} V_0\frac{1}{2}\big(5x^3-3x\big)\,dx \\
&= -\frac{7V_0R^4}{4}\left[\frac{5x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \frac{7V_0R^4}{4}\left[\frac{5x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{1} \\
&= -\frac{7V_0R^4}{4}\left[-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\right] + \frac{7V_0R^4}{4}\left[\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\right] \\
D_3 &= -\frac{7V_0R^4}{8}
\end{aligned}$$

Por fim, o coeficiente D_5 é

$$D_5 = \frac{(2\times 5+1)R^{5+1}}{2}\int_{-1}^{1} \mathbb{V}(R,x)P_5(x)\,dx$$

ou

$$\begin{aligned}
D_5 = \frac{11R^6}{2}\int_{-1}^{0} -V_0\frac{1}{8}\big(63x^5-70x^3+15x\big)\,dx \\
+ \frac{11R^6}{2}\int_{0}^{1} V_0\frac{1}{8}\big(63x^5-70x^3+15x\big)\,dx
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
D_5 = -\frac{11V_0R^6}{16}\int_{-1}^{0} \big(63x^5-70x^3+15x\big)\,dx \\
+ \frac{11V_0R^6}{16}\int_{0}^{1} \big(63x^5-70x^3+15x\big)\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_5 &= -\frac{11V_0R^6}{16}\left[\frac{63x^6}{6} - \frac{70x^4}{4} + \frac{15x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \frac{11V_0R^6}{16}\left[\frac{63x^6}{6} - \frac{70x^4}{4} + \frac{15x^2}{2}\right]_{0}^{1} \\
&= -\frac{11V_0R^6}{16}\left[-\frac{21}{2} + \frac{35}{2} - \frac{15}{2}\right] + \frac{11V_0R^6}{16}\left[\frac{21}{2} - \frac{35}{2} + \frac{15}{2}\right] \\
D_5 &= \frac{11V_0R^6}{16}
\end{aligned}
$$

Com estes coeficientes, o potencial elétrico

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} D_\ell r^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos\theta)$$

para $r > R$ fica

$$\mathbb{V}(r,\theta) = D_1 r^{-2} P_1(\cos\theta) + D_3 r^{-4} P_3(\cos\theta) + D_5 r^{-6} P_5(\cos\theta) + \cdots$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(r,\theta) = \frac{3V_0R^2}{2} r^{-2} P_1(\cos\theta) \\
- \frac{7V_0R^4}{8} r^{-4} P_3(\cos\theta) + \frac{11V_0R^6}{16} r^{-6} P_5(\cos\theta) + \cdots
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(r,\theta) = V_0 \Bigg[\frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}\left(\frac{R}{r}\right)^4 P_3(\cos\theta) \\
+ \frac{11}{16}\left(\frac{R}{r}\right)^6 P_5(\cos\theta) + \cdots \Bigg], \qquad r > R \quad (6.66)
\end{aligned}
$$

Note que agora os polinômios de Legendre P_ℓ estão multiplicados pelo fator $\left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1}$, além de um coeficiente numérico que, por sinal, é o mesmo que o do potencial dentro dos hemisférios. De fato, há uma semelhança interessante entre as equações 6.65 e 6.66. Vamos reproduzi-las novamente abaixo.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(r,\theta) = V_0 \Bigg[\frac{3}{2}\left(\frac{r}{R}\right) P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^3 P_3(\cos\theta) \\
+ \frac{11}{16}\left(\frac{r}{R}\right)^5 P_5(\cos\theta) + \cdots \Bigg], \qquad r < R
\end{aligned}
$$

e

$$\mathbb{V}(r,\theta) = V_0 \left[\frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}\left(\frac{R}{r}\right)^4 P_3(\cos\theta) + \frac{11}{16}\left(\frac{R}{r}\right)^6 P_5(\cos\theta) + \cdots \right], \qquad r > R$$

Observe que, se substituirmos na expressão 6.65 os fatores $\left(\frac{r}{R}\right)^\ell$ por $\left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1}$, o resultado é a equação 6.66. Trata-se de um resultado geral em coordenadas esféricas que pode ser verificado também com os resultados do exemplo 6.4. Para o potencial dentro da esfera, obtivemos a expressão 6.61,

$$\mathbb{V}_0(r,\theta) = V_0, \qquad r \leq R$$

em que aparece apenas o polinômio de Legendre de ordem $\ell = 0$, que é $P_0(x) = 1$. Portanto, o fator $\left(\frac{r}{R}\right)^\ell$ correspondente é $\left(\frac{r}{R}\right)^0 = 1$. Para fora da esfera, o resultado, de acordo com o exposto acima, deveria ser

$$\mathbb{V}_0(r,\theta) = V_0\left(\frac{R}{r}\right), \qquad r \geq R$$

já que deve aparecer o fator $\left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1}$, que se torna, como $\ell = 0$, $\left(\frac{R}{r}\right)^1 = \frac{R}{r}$. O resultado para o potencial fora da esfera é dado pela equação 6.62,

$$\mathbb{V}_0(r) = V_0\frac{R}{r}, \qquad r \geq R$$

que é idêntica à anterior, como deve ser. Esta verificação facilita o cálculo dos potenciais elétricos, porque, se calcularmos a solução do potencial para uma das regiões, seja ela interna ou externa, o potencial para a outra região pode ser obtido através da substituição

$$\left(\frac{r}{R}\right)^\ell \leftrightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} \tag{6.67}$$

onde R é algum parâmetro relevante para o problema em questão. Veja que sempre o numerador da fração é ocupado pelo parâmetro que possui valor menor, o denominador é dado pelo que tem valor maior, e a fração como um todo é sempre menor ou igual a 1. Isto é importante porque significa que os termos mais relevantes da expansão em série do potencial são aqueles que têm valores pequenos de ℓ. Outro resultado, talvez mais significativo do que este, será obtido no próximo exemplo.

Exemplo 6.8. *Considere um disco de cargas positivas, de raio R, como mostra a figura 6.4.*

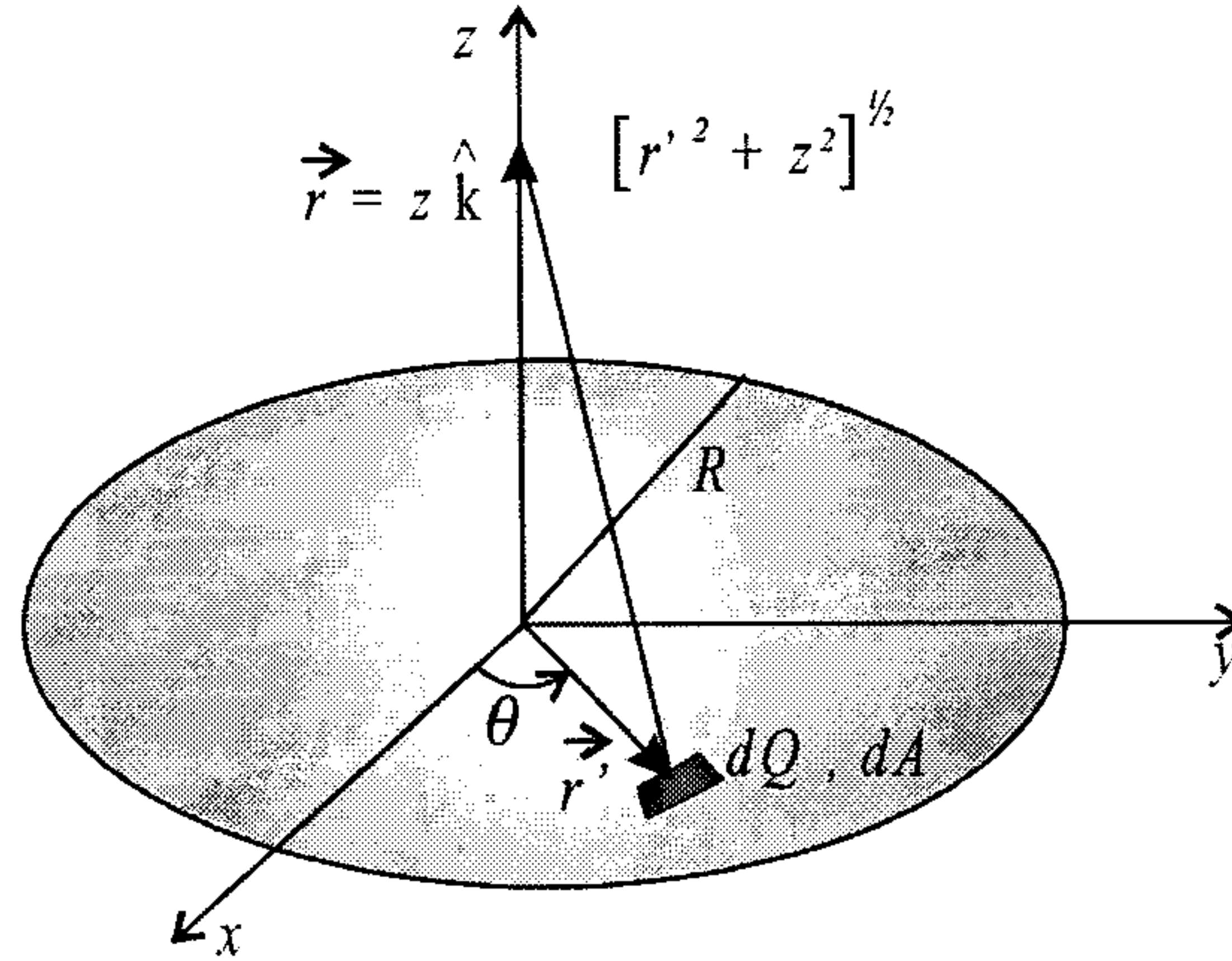



Figura 6.4: Um disco de cargas positivas.

As cargas neste disco estão distribuídas de modo que a densidade de cargas é

$$\sigma(\vec{r}\,') = \frac{\sigma_0}{\sqrt{R^2 - r'^{\,2}}}$$

sendo $\vec{r}\,'$ a posição de um ponto do disco em relação à origem. Esta densidade de cargas faz com que o potencial no disco seja uma constante V_0.

a) Obtenha o potencial elétrico no eixo z.

Para calcular o potencial no eixo z, podemos utilizar a equação 5.12 vista no capítulo 5, que é

$$\mathbb{V}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,dV$$

lembrando que, no caso do disco, a integral é sobre a área do disco. Temos as seguintes grandezas:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= z\,\hat{\mathbf{k}} \\
\vec{r}\,' &= r'\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + r'\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{j}} \\
\vec{r} - \vec{r}\,' &= z\,\hat{\mathbf{k}} - r'\cos\theta\;\hat{\mathbf{i}} - r'\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{j}} \\
|\vec{r} - \vec{r}\,'| &= \sqrt{z^2 + r'^{\,2}\cos^2\theta + r'^{\,2}\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{z^2 + r'^{\,2}}
\end{aligned}$$

e o potencial elétrico fica

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_A \frac{\sigma(\vec{r}')}{\sqrt{z^2+r'^2}}\,dA \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0}{\sqrt{R^2-r'^2}}\frac{r'\,dr'\,d\theta}{\sqrt{z^2+r'^2}} \\
&= \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R \frac{r'\,dr'}{\sqrt{R^2-r'^2}\sqrt{z^2+r'^2}}(\theta)_0^{2\pi} \\
&= \frac{2\pi\sigma_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R \frac{r'\,dr'}{\sqrt{R^2-r'^2}\sqrt{z^2+r'^2}} \\
\mathbb{V}(z) &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{\left[z^2+r'^2\right]^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{R^2-r'^2}}r'\,dr'
\end{aligned}
$$

Para resolver esta integral, vamos considerar que $z > r'$ e reescrever o termo no numerador, como segue:

$$
\begin{aligned}
\left[z^2+r'^2\right]^{-\frac{1}{2}} &= \left\{z^2\left[1+\left(\frac{r'}{z}\right)^2\right]\right\}^{-\frac{1}{2}} \\
\left[z^2+r'^2\right]^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{z}\left[1+\left(\frac{r'}{z}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

e agora, vamos utilizar a expressão 2.6 para a série de Taylor da função binomial

$$
\begin{aligned}
(1+x)^k = 1 + kx + k(k-1)\frac{x^2}{2} &+ k(k-1)(k-2)\frac{x^3}{3!} \\
&+ \cdots + \frac{k!}{(k-n)!}\frac{x^n}{n!} + \cdots
\end{aligned}
$$

e expandir o termo entre colchetes nesta série. A série, quando $k = -\frac{1}{2}$, é

$$
(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots
$$

sendo que x, no nosso caso, é $\left(\frac{r'}{z}\right)^2$. O resultado da expansão fica

$$\frac{1}{z}\left[1+\left(\frac{r'}{z}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{z}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r'}{z}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{r'}{z}\right)^4+\cdots\right]$$

Vamos utilizar esta expansão na integral do potencial elétrico.

$$\mathbb{V}(z) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{\left[z^2+r'^2\right]^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{R^2-r'^2}}r'\,dr'$$

$$\mathbb{V}(z) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r'\,dr'}{\sqrt{R^2-r'^2}}\frac{1}{z}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r'}{z}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{r'}{z}\right)^4+\cdots\right]$$

ou então,

$$\mathbb{V}(z) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0 z}\int_0^R \frac{r'\,dr'}{\sqrt{R^2-r'^2}} - \frac{\sigma_0}{4\epsilon_0 z^3}\int_0^R \frac{r'^3\,dr'}{\sqrt{R^2-r'^2}} + \frac{3\sigma_0}{16\epsilon_0 z^5}\int_0^R \frac{r'^5\,dr'}{\sqrt{R^2-r'^2}} + \cdots$$

Todas as integrais acima são resolvidas através da mesma troca de variáveis, que é

$$r' = R\,\mathrm{sen}\,\alpha \qquad dr' = R\cos\alpha\,d\alpha$$

$$r' = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \qquad r' = R \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Com esta substituição, as integrais ficam

$$\mathbb{V}(z) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0 z}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R\,\mathrm{sen}\,\alpha R\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{R^2-R^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}} - \frac{\sigma_0}{4\epsilon_0 z^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3\,\mathrm{sen}^3\,\alpha R\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{R^2-R^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}} + \frac{3\sigma_0}{16\epsilon_0 z^5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^5\,\mathrm{sen}^5\,\alpha R\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{R^2-R^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}} + \cdots$$

ou, como $\cos^2\alpha = 1-\mathrm{sen}^2\,\alpha$,

$$\mathbb{V}(z) = \frac{\sigma_0 R}{2\epsilon_0 z}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha - \frac{\sigma_0 R^3}{4\epsilon_0 z^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\alpha\, d\alpha + \frac{3\sigma_0 R^5}{16\epsilon_0 z^5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5\alpha\, d\alpha + \cdots$$

Resolvemos cada uma das integrais separadamente. A primeira é imediata, e ela fica

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha &= \left[-\cos\alpha\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= -[-1]\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha &= 1\end{aligned}$$

A segunda,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\alpha\, d\alpha$$

precisa de uma manipulação. Temos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^3\alpha &= \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}^2\alpha\\ &= \operatorname{sen}\alpha\left[1-\cos^2\alpha\right]\\ \operatorname{sen}^3\alpha &= \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha\end{aligned}$$

e a integral fica

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\alpha\, d\alpha &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha\right] d\alpha\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\alpha\, d\alpha &= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha\end{aligned}$$

Para resolver esta integral, chamamos

$$u = \cos^3 \alpha$$

$$du = -3\cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha$$

$$\cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = -\frac{du}{3}$$

e assim,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 \alpha \, d\alpha = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha \, d\alpha$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \left[\cos^3 \alpha\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 \alpha \, d\alpha = \frac{2}{3}$$

A terceira integral,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5 \alpha \, d\alpha$$

utiliza uma manipulação semelhante à que foi feita no caso anterior.

$$\operatorname{sen}^5 \alpha = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}^4 \alpha$$

$$= \operatorname{sen} \alpha \left[1 - \cos^2 \alpha\right]^2$$

$$= \operatorname{sen} \alpha \left[1 - 2\cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha\right]^2$$

$$\operatorname{sen}^5 \alpha = \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos^4 \alpha$$

e portanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5 \alpha \, d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos^4 \alpha\right] d\alpha$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5 \alpha \, d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha \, d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \alpha \cos^4 \alpha \, d\alpha$$

As duas primeiras integrais já foram calculadas, e assim,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5 \alpha \, d\alpha = 1 - \frac{2}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \alpha \cos^4 \alpha \, d\alpha$$

Para resolver a última, fazemos

$$u = \cos^5 \alpha$$

$$du = -5 \cos^4 \alpha \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha$$

$$\cos^4 \alpha \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = -\frac{du}{5}$$

e então,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5 \alpha \, d\alpha &= 1 - \frac{2}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \alpha \cos^4 \alpha \, d\alpha \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \left[\cos^5 \alpha\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5 \alpha \, d\alpha &= \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

Vamos reunir todos estes resultados no potencial elétrico.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(z) = \frac{\sigma_0 R}{2\epsilon_0 z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha \\
- \frac{\sigma_0 R^3}{4\epsilon_0 z^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 \alpha \, d\alpha + \frac{3\sigma_0 R^5}{16\epsilon_0 z^5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5 \alpha \, d\alpha + \cdots
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(z) &= \frac{\sigma_0 R}{2\epsilon_0 z} - \frac{\sigma_0 R^3}{4\epsilon_0 z^3} \frac{2}{3} + \frac{3\sigma_0 R^5}{16\epsilon_0 z^5} \frac{8}{15} + \cdots \\
&= \frac{\sigma_0 R}{2\epsilon_0 z} - \frac{\sigma_0 R^3}{6\epsilon_0 z^3} + \frac{\sigma_0 R^5}{10\epsilon_0 z^5} + \cdots \\
\mathbb{V}(z) &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[\left(\frac{R}{z}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{R}{z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{R}{z}\right)^5 + \cdots \right]
\end{aligned}$$

A série de Taylor do arco tangente é

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \tag{6.68}$$

e assim, identificamos $x = \frac{R}{z}$, de modo que o potencial fica

$$\mathbb{V}(z) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{R}{z}, \qquad z > R \tag{6.69}$$

Note que este é o potencial elétrico no eixo z, quando $z > R$.

b) Qual é o potencial elétrico em qualquer ponto $\vec{r}$ do espaço, com $r > R$?

A situação aqui é aparentemente mais complicada. Não podemos utilizar a equação 5.12 para calcular o potencial elétrico, porque a integral torna-se muito difícil de ser efetuada em virtude de não mais haver simetria como havia quando o ponto $\vec{r}$ estava sobre o eixo z. Também não é simples calcular o potencial através da série de Legendre, pois as condições de contorno para o potencial no disco não favorecem esta interpretação. Entretanto, vamos observar os resultados 6.65 e 6.66 (este último é reproduzido abaixo):

$$\mathbb{V}(r,\theta) = V_0 \left[\frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}\left(\frac{R}{r}\right)^4 P_3(\cos\theta) + \frac{11}{16}\left(\frac{R}{r}\right)^6 P_5(\cos\theta) + \cdots \right], \qquad r > R$$

Como percebemos acima, os termos são formados por um coeficiente numérico, uma potência de $\frac{R}{r}$ e um polinômio de Legendre cuja ordem ℓ é menor em uma unidade do que a potência de $\frac{R}{r}$. Para um ponto situado no eixo z positivo, temos $\theta = 0$, ou $\cos\theta = 1$, e os polinômios de Legendre valem $P_\ell(1) = 1$. Assim, a equação 6.66 fica

$$\mathbb{V}(z,\theta = 0) = V_0 \left[\frac{3}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2 - \frac{7}{8}\left(\frac{R}{z}\right)^4 + \frac{11}{16}\left(\frac{R}{z}\right)^6 + \cdots \right], \qquad z > R$$

Veja que, para obter a solução para o potencial para qualquer ponto do espaço, basta multiplicar a solução acima pelo polinômio de Legendre apropriado, que deve ser tal que apareçam fatores $\left(\frac{R}{z}\right)^{\ell+1} P_\ell(\cos\theta)$. Isto sugere que, para um r qualquer, desde que $r > R$, o potencial elétrico para o disco que estamos tratando pode ser obtido se multiplicarmos a expressão

$$\mathbb{V}(z) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\left[\left(\frac{R}{z}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{R}{z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{R}{z}\right)^5 + \cdots\right]$$

que foi identificada como sendo o arco tangente, pelos polinômios de Legendre de ordem apropriada, ou seja,

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\left[\left(\frac{R}{r}\right)P_0(\cos\theta) - \frac{1}{3}\left(\frac{R}{r}\right)^3 P_2(\cos\theta) + \frac{1}{5}\left(\frac{R}{r}\right)^5 P_4(\cos\theta) + \cdots\right], \qquad r > R$$

Este resultado está absolutamente correto. Se, por qualquer método, conseguirmos obter o potencial elétrico numa certa região do espaço (como o eixo z, no caso do disco), encontraremos o potencial em todo o espaço mediante a expansão da solução para o potencial dessa região em potências apropriadas de $\frac{r_<}{r_>}$ e a posterior multiplicação de cada termo dessa expansão pelo respectivo polinômio de Legendre. O símbolo $r_<$ representa o menor valor entre $\vec{r}$, que é a posição onde queremos o potencial, e a, que é um parâmetro relevante para cada problema, associado à distribuição de cargas ou ao potencial em algum condutor, e que, no caso do disco, vale $a = R$. Já $r_>$ é o maior valor entre $\vec{r}$ e a. Para o potencial que acabamos de ver, $r_< = R$ e $r_> = |\vec{r}| = r$, e assim, devem aparecer termos do tipo $\frac{r_<}{r_>} = \frac{R}{r}$, como de fato ocorre. Quando $r_> = \vec{r}$, temos um *problema exterior*, ao passo que, quando $r_< = \vec{r}$, temos um *problema interior*. Nos problemas exteriores, os termos que aparecem são $P_\ell(\cos\theta)\left(\frac{r_<}{r}\right)^{\ell+1}$, enquanto nos problemas interiores os fatores são $P_\ell(\cos\theta)\left(\frac{r}{r_>}\right)^{\ell}$. Você deve conferir esta afirmação em todas as soluções para o potencial elétrico já vistas até agora. A notação $r_<$ e $r_>$ é importante, e ela será utilizada em várias situações ao longo do texto.

É importante lembrar, sempre, que a posição onde queremos calcular o potencial é dada por $\vec{r}$, enquanto a posição das cargas geradoras é representada por $\vec{r}\,'$. Estes dois conceitos precisam estar sempre bem claros daqui para a frente, quando começarmos a utilizar as notações $r_>$ e $r_<$, para evitar que a interpretação dos problemas e dos resultados fique grandemente prejudicada.

Voltando à solução do potencial elétrico do disco, vemos que podemos escrever a solução como uma série, na forma

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{2\ell+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{2\ell}P_{2\ell}(\cos\theta), \qquad r > R$$

O resultado está quase pronto, restando apenas a condição de que, no disco, o potencial é V_0. O disco está no plano xy, que corresponde a $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\cos\theta = 0$. Como temos a solução para $r > R$, devemos fazer também $r = R$, correspondente à borda do disco, que é o valor mínimo para r neste caso. O potencial fica

$$\mathbb{V}(r = R, \theta = \frac{\pi}{2}) = V_0 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{2\ell+1}P_{2\ell}(0)$$

Os polinômios de Legendre com ℓ ímpar são funções ímpares e, por isso, se anulam quando $\cos\theta = 0$, ou seja, $P_{2\ell+1}(0) = 0$, $\forall\ell$. Já os polinômios pares ficam, considerando os primeiros que aparecem na tabela 6.2,

$$P_0(0) = 1 \qquad\qquad P_2(0) = -\frac{1}{2} \qquad\qquad P_4(0) = \frac{3}{8}$$

Estes termos podem ser escritos como

$$P_{2\ell}(0) = \frac{(-1)^\ell(2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!}$$

onde $(2\ell-1)!! = (2\ell-1)(2\ell-3)\times\cdots\times 5\times 3\times 1$ é o *duplo fatorial* de $2\ell - 1$. Observe que $(-1)!! = 1!! = 1$, por definição. Vamos conferir os primeiros termos.

$$\begin{aligned}
P_0(0) &= \frac{(-1)^0(2.0-1)!!}{2^0 0!} = (-1)!! = 1 \\
P_2(0) &= \frac{(-1)^1(2.1-1)!!}{2^1 1!} = \frac{(-1)1!!}{2} = -\frac{1}{2} \\
P_4(0) &= \frac{(-1)^2(2.2-1)!!}{2^2 2!} = \frac{3!!}{8} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$P_\ell(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{\ell}{2}}(\ell-1)!!}{2^{\frac{\ell}{2}}\frac{\ell}{2}!}, & \ell\,\text{par} \\ 0, & \ell\,\text{ímpar} \end{cases} \tag{6.70}$$

Com esta expressão, o potencial em $\theta = \frac{\pi}{2}$ é

$$V_0 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{2\ell+1} \frac{(-1)^\ell (2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!}$$

$$V_0 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell-1)!!}{(2\ell+1)2^\ell \ell!}$$

Essa série parece ser complicada. Vamos explicitar alguns de seus termos.

1. $\ell = 0$

$$\frac{(2 \times 0 - 1)!!}{(2.0+1)2^0 0!} = (-1)!! = 1$$

2. $\ell = 1$

$$\frac{(2 \times 1 - 1)!!}{(2.1+1)2^1 1!} = \frac{1!!}{3.2} = \frac{1}{6}$$

3. $\ell = 2$

$$\frac{(2 \times 2 - 1)!!}{(2.2+1)2^2 2!} = \frac{3!!}{5.8} = \frac{3}{40}$$

e assim, temos

$$V_0 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} + \cdots \right]$$

A série de Taylor do arco seno é

$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots \tag{6.71}$$

Quando $x = 1$, esta série torna-se

$$\operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} + \cdots$$

que é a série do potencial. Assim,

$$V_0 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{\pi}{2}$$

e obtemos

$$V_0 = \frac{\sigma_0 \pi}{4\epsilon_0}$$
$$\sigma_0 = \frac{4\epsilon_0 V_0}{\pi}$$

de modo que a expressão

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{2\ell+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{2\ell} P_{2\ell}(\cos\theta), \qquad r > R$$

fica

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \frac{2V_0}{\pi}\left(\frac{R}{r}\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{2\ell+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{2\ell} P_{2\ell}(\cos\theta), \qquad r > R \qquad (6.72)$$

que é, finalmente, o potencial elétrico do disco em todo o espaço, quando $r > R$.

c) Qual é o potencial elétrico na região $r < R$?

Para calcular o potencial na região $r < R$, utilizamos a discussão feita no final do exemplo anterior, em que dissemos que o potencial nas regiões interna e externa pode ser obtido através da substituição 6.67,

$$\left(\frac{r}{R}\right)^\ell \leftrightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1}$$

Com esta substituição, o potencial para $r < R$ fica, utilizando a expressão 6.72,

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \frac{2V_0}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{2\ell+1}\left(\frac{r}{R}\right)^{2\ell} P_{2\ell}(\cos\theta), \qquad r < R \qquad (6.73)$$

Observe que, obtida a solução para o potencial numa região, encontrá-la para as outras é bastante simples.

Exemplo 6.9. *Considere a espira de cargas do exemplo 5.4, vista na figura 5.2. Qual é o potencial elétrico em qualquer ponto $\vec{r}$ do espaço?*

Este problema pode ser resolvido por dois métodos. Primeiro, vamos lembrar a solução obtida naquele exemplo para o potencial elétrico no eixo z, dado pela expressão 5.23,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

Considerando a discussão feita no exemplo anterior, podemos expandir esta solução para o potencial em potências de $\frac{r_<}{r_>}$, sendo $r_<$ o menor entre z e R, e $r_>$ o maior, e depois multiplicamos esta expansão pelos polinômios de Legendre apropriados. Vamos então considerar $r_< = R$ e $r_> = z$, e assim,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{z^2\left[1+\left(\frac{R}{z}\right)^2\right]}}$$

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{z}\left[1+\left(\frac{R}{z}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Escrevemos o termo entre colchetes através da série de Taylor, como

$$\left[1+\left(\frac{R}{z}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{R}{z}\right)^4 + \cdots$$

e assim, o potencial no eixo z fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{z}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{R}{z}\right)^4 + \cdots\right]$$

ou, através da expressão 6.70, identificamos os coeficientes da equação acima com

$$P_\ell(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^\ell(2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!}, & \ell\,\text{par} \\ 0, & \ell\,\text{ímpar} \end{cases}$$

e portanto, podemos escrever

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}\left(\frac{R}{z}\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell(2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!}\left(\frac{R}{z}\right)^{2\ell}$$

ou ainda,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}\left(\frac{R}{z}\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{R}{z}\right)^{2\ell}P_{2\ell}(0)$$

Agora, para obter o resultado para qualquer valor de $r > R$, multiplicamos cada fator pelo polinômio de Legendre apropriado. Como temos $\left(\frac{R}{z}\right)^{2\ell+1}$ (não esqueça o fator $\frac{R}{z}$ antes da somatória), devemos multiplicar cada fator por $P_{2\ell}(\cos\theta)$, ou seja,

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}\left(\frac{R}{r}\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{2\ell}P_{2\ell}(0)P_{2\ell}(\cos\theta), \qquad r > R \tag{6.74}$$

que é o potencial elétrico para toda a região onde $r > R$. Note que o procedimento foi bastante simples. Para obter o potencial para a região $r < R$, utilizamos a substituição 6.67,

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} \leftrightarrow \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+1}$$

e portanto, o potencial fica

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{2\ell}P_{2\ell}(0)P_{2\ell}(\cos\theta), \qquad r < R \tag{6.75}$$

As duas expressões podem ser reunidas em

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_>}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{2\ell}P_{2\ell}(0)P_{2\ell}(\cos\theta)$$

onde $r_<$ é o menor entre r e R, e $r_>$ é o maior. O outro método de resolução baseia-se na expansão

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r_>}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\ell}P_{\ell}(\cos\alpha) \tag{6.76}$$

onde $r_<$ é o menor entre $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$, $r_>$ é o maior dos dois, e α é o ângulo entre eles, como mostra a figura 6.5. Vamos demonstrar esta equação.

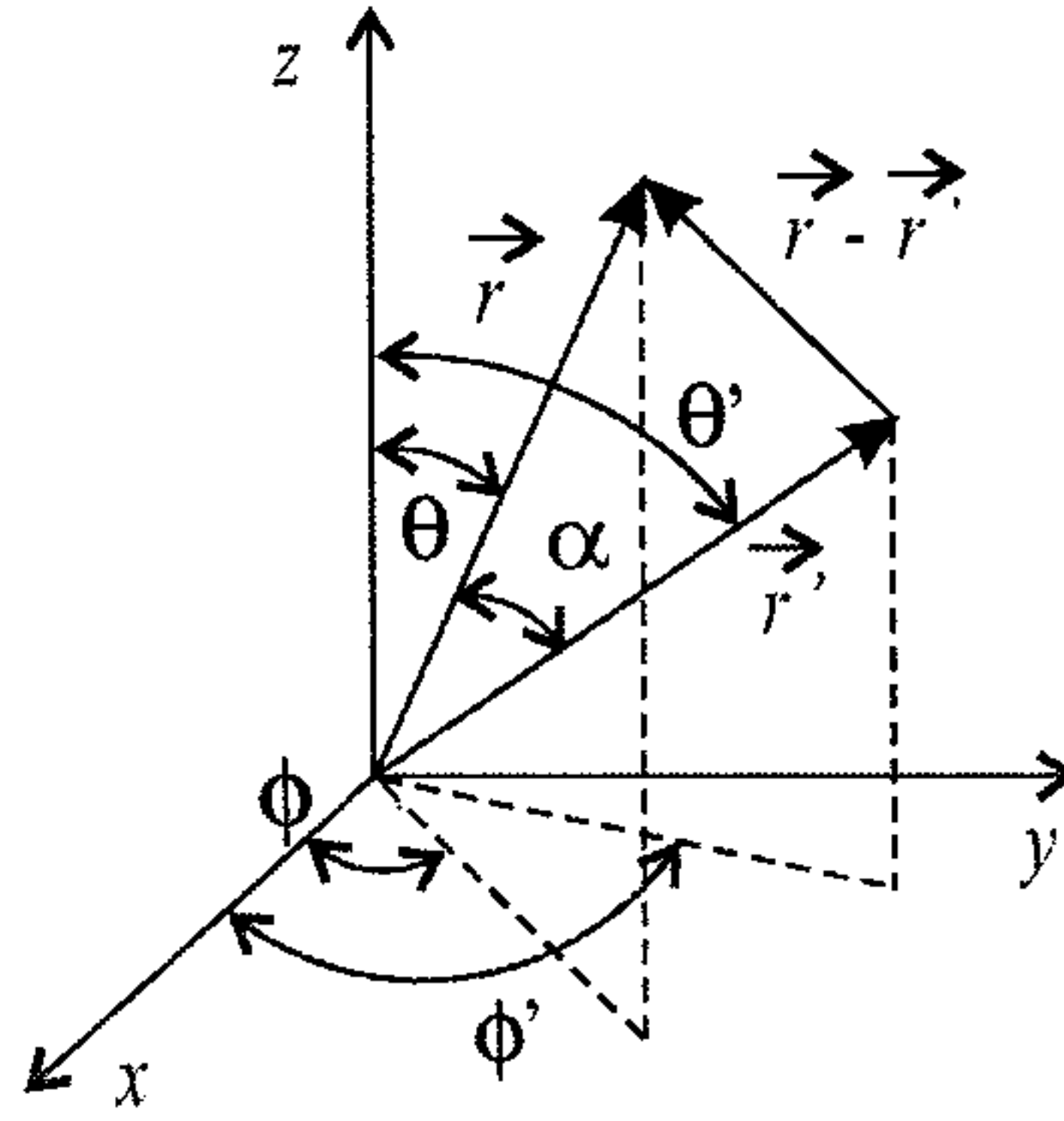



Figura 6.5: Definição dos termos para a equação 6.76.

Demonstração. Da figura 6.5, temos, pela lei dos cossenos 1.1,

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2 = r^2 + r'^{\,2} - 2rr'\cos\alpha$$

ou então,

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^{\,2} - 2rr'\cos\alpha}}$$

Vamos considerar que $r > r'$, e assim,

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^{\,2} - 2rr'\cos\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{r^2\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\alpha\right]}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^{\,2} - 2rr'\cos\alpha}} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\alpha\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Agora expandimos o termo entre colchetes numa série de Taylor, ou seja,

$$\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\alpha\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\alpha\right] + \frac{3}{8}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\alpha\right]^2 + \cdots$$

ou

$$\left[1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\frac{r'}{r}\cos\alpha\right]^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2+\frac{r'}{r}\cos\alpha$$
$$+\frac{3}{8}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^4-4\left(\frac{r'}{r}\right)^3\cos\alpha+4\left(\frac{r'}{r}\right)^2\cos^2\alpha\right]+\cdots$$

ou ainda,

$$\left[1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\frac{r'}{r}\cos\alpha\right]^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{r'}{r}\cos\alpha-\frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2$$
$$+\frac{3}{8}\left(\frac{r'}{r}\right)^4-\frac{3}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^3\cos\alpha+\frac{3}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\cos^2\alpha+\cdots$$

$$\left[1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\frac{r'}{r}\cos\alpha\right]^{-\frac{1}{2}}=\overbrace{1}^{P_0(\cos\alpha)}+\frac{r'}{r}\overbrace{\cos\alpha}^{P_1(\cos\alpha)}+\overbrace{\frac{1}{2}(3\cos^2\alpha-1)}^{P_2(\cos\alpha)}\left(\frac{r'}{r}\right)^2$$
$$-\frac{3}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^3\cos\alpha+\frac{3}{8}\left(\frac{r'}{r}\right)^4+\cdots$$

Veja que aqui já aparecem alguns dos polinômios de Legendre. Assim,

$$\left[1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\frac{r'}{r}\cos\alpha\right]^{-\frac{1}{2}}=P_0(\cos\alpha)$$
$$+\frac{r'}{r}P_1(\cos\alpha)+\left(\frac{r'}{r}\right)^2P_2(\cos\alpha)+\cdots$$

ou, finalmente,

$$\left[1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\frac{r'}{r}\cos\alpha\right]^{-\frac{1}{2}}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^\ell P_\ell(\cos\alpha)$$

e portanto, a expressão inicial fica

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\alpha}}=\frac{1}{r}\left[1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\frac{r'}{r}\cos\alpha\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^{\,2} - 2rr'\cos\alpha}} = \frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\alpha)$$

ou então,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\alpha), \qquad r > r'$$

que está de acordo com a equação 6.76, pois $r_< = r'$ e $r_> = r$. Quando $r < r'$, devemos utilizar a substituição 6.67. Reescrevendo a expressão anterior como

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{r'}\left(\frac{r'}{r}\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\alpha), \qquad r > r'$$

temos

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{r'}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\alpha), \qquad r < r'$$

pois devemos trocar $\left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell+1}$ por $\left(\frac{r}{r'}\right)^{\ell}$. Agora, $r_> = r'$ e $r_< = r$. As duas expressões podem ser reunidas em

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{r_>}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\alpha)$$

que é a equação 6.76.

□

Na solução 5.23,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

identificamos

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Quando $z > R$, temos $r_< = R$ e $r_> = z$. Além disso, o disco está no plano xy, e o potencial está sendo calculado no eixo z. Assim, o ângulo α entre $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$ é $\frac{\pi}{2}$, e $\cos\alpha = 0$. Utilizando a expansão 6.76, obtemos, no eixo z,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{z}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{R}{z}\right)^{\ell} P_\ell(0)$$

Como $P_\ell(0) = 0$, se ℓ é ímpar (veja a equação 6.70), podemos escrever

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}\left(\frac{R}{z}\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{R}{z}\right)^{2\ell} P_{2\ell}(0)$$

Obtemos a solução para $r > R$ mediante a multiplicação da expressão acima pelos polinômios de Legendre apropriados, ou seja,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}\left(\frac{R}{r}\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{2\ell} P_{2\ell}(0)P_{2\ell}(\cos\theta), \qquad r > R$$

que é a equação 6.74, só que obtida mais facilmente. A solução no eixo z, para $r < R$, fica, lembrando que agora $r_< = z$ e $r_> = R$,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{z}{R}\right)^{2\ell} P_{2\ell}(0)$$

e para qualquer ponto com $r < R$, multiplicamos cada fator da série acima pelos polinômios de Legendre, ou seja,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{2\ell} P_{2\ell}(0)P_{2\ell}(\cos\theta)$$

que é a expressão 6.75. Os dois métodos apresentam o mesmo resultado final. Optar por um ou outro depende das condições oferecidas por cada problema.

6.5.2 Soluções da Equação de Laplace em Coordenadas Esféricas Envolvendo os Polinômios Generalizados de Legendre

Até agora, estudamos problemas em que havia um eixo de simetria. Neste caso, $m = 0$, e os problemas envolvem apenas os polinômios de Legendre $P_\ell(\cos\theta)$. Quando m é qualquer, obtemos as soluções através da equação generalizada de Legendre 6.57 (veja o apêndice C),

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0$$

e elas são dadas em termos dos polinômios generalizados de Legendre $P_{\ell,m}(\cos\theta)$ ou $P_{\ell,m}(x)$. Estes polinômios estão relacionados aos $P_\ell(x)$ através da equação C.21,

$$P_{\ell,m}(x)=(-1)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)$$

que vale para os valores não-negativos de m. Para os valores negativos, temos a expressão C.23,

$$P_{\ell,-m}(x)=(-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_{\ell,m}(x)$$

Observe que, quando $m=0$, $P_{\ell,0}(x)=P_\ell(x)$. Para os polinômios generalizados de Legendre também existe uma fórmula de Rodrigues, dada pela equação C.22,

$$P_{\ell,m}(x)=(-1)^m\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}}{2^\ell\ell!}\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}\left(x^2-1\right)^\ell\qquad 0\leq m\leq\ell$$

e alguns desses polinômios podem ser vistos na tabela 6.3.

Utilizando os polinômios generalizados de Legendre e as equações 6.50 e 6.54, que são, respectivamente,

$$\Phi_{m\neq0}(\phi)=A_me^{im\phi}+B_me^{-im\phi}$$

e

$$R_\ell(r)=C_\ell r^{\ell+1}+D_\ell r^{-\ell}$$

podemos formar a solução geral para o potencial elétrico, isto é,

$$\mathbb{V}_{\ell,m}(r,\theta,\phi)=\Phi_m(\phi)\frac{R_\ell(r)}{r}\Theta_{\ell,m}(\theta)$$
$$\mathbb{V}_{\ell,m}(r,\theta,\phi)=\left(A_me^{im\phi}+B_me^{-im\phi}\right)\left(C_\ell r^\ell+D_\ell r^{-(\ell+1)}\right)P_{\ell,m}(\cos\theta)\qquad(6.77)$$

Entretanto, é mais interessante reunir as partes angulares em θ e ϕ numa única função, e assim, definimos os *harmônicos esféricos* $Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ como sendo

ℓ, m	$P_{\ell,m}(x)$	$P_{\ell,m}(\cos\theta)$
0,0	1	1
1, 0	x	$\cos\theta$
1, 1	$-\sqrt{1-x^2}$	$-\operatorname{sen}\theta$
1, -1	$\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$
2, 0	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$	$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$
2, 1	$-3x\sqrt{1-x^2}$	$-3\cos\theta\operatorname{sen}\theta$
2, -1	$\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\cos\theta\operatorname{sen}\theta$
2, 2	$3(1-x^2)$	$3\operatorname{sen}^2\theta$
2, -2	$\frac{1}{8}(1-x^2)$	$\frac{1}{8}\operatorname{sen}^2\theta$

Tabela 6.3: Polinômios generalizados de Legendre para alguns valores de ℓ e m.

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_{\ell,m}(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{6.78}$$

Note que, em geral, os harmônicos esféricos são funções complexas. Para eles, vale também a relação

$$Y_{\ell,-m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi) \tag{6.79}$$

sendo $Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi)$ o complexo conjugado de $Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi)$. Esta expressão é demonstrada a seguir.

Demonstração. Para demonstrar a expressão 6.79, vamos aplicar a equação 6.78 para $Y_{\ell,-m}$, ou seja,

$$Y_{\ell,-m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}P_{\ell,-m}(\cos\theta)e^{-im\phi}$$

Além disso, temos a expressão C.23,

$$P_{\ell,-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_{\ell,m}(x)$$

e assim,

$$Y_{\ell,-m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} P_{\ell,-m}(\cos\theta) e^{-im\phi}$$

$$= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell,m}(\cos\theta) e^{-im\phi}$$

$$Y_{\ell,-m}(\theta,\phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos\theta) e^{-im\phi}$$

O complexo conjugado de $Y_{\ell,m}$ é

$$Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi) = \overline{\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos\theta) e^{im\phi}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \overline{P_{\ell,m}(\cos\theta) e^{im\phi}}$$

$$Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos\theta) e^{-im\phi}$$

Reunindo as duas expressões, temos

$$Y_{\ell,-m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

que é a equação que queríamos demonstrar.

□

Os harmônicos esféricos são importantes em outras áreas da Física, além do Eletromagnetismo, como Mecânica Quântica e Mecânica Clássica. A tabela 6.4 apresenta algumas dessas funções. Observe que, quando $m = 0$, temos

$$Y_{\ell,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-0)!}{(\ell+0)!}} P_{\ell,0}(\cos\theta) e^{i.0.\phi}$$

$$Y_{\ell,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{\ell!}{\ell!}} P_{\ell}(\cos\theta)$$

$$Y_{\ell,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos\theta) \tag{6.80}$$

ℓ, m	$Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$
0,0	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
1,0	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$
1,1	$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\text{sen}\,\theta e^{i\phi}$
1,-1	$\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\text{sen}\,\theta e^{-i\phi}$
2,0	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$
2,1	$-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\,\text{sen}\,\theta e^{i\phi}$
2,-1	$\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\,\text{sen}\,\theta e^{-i\phi}$
2,2	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\,\text{sen}^2\,\theta e^{2i\phi}$
2,-2	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\,\text{sen}^2\,\theta e^{-2i\phi}$
ℓ, m	$\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_{\ell,m}(\cos\theta)e^{im\phi}$

Tabela 6.4: Harmônicos esféricos $Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ para alguns valores de ℓ e m.

Em termos dos harmônicos esféricos, as soluções para o potencial elétrico 6.77 podem ser escritas como

$$\mathbb{V}_{\ell,m}(r,\theta,\phi) = \left(C_{\ell,m}r^\ell + D_{\ell,m}r^{-(\ell+1)}\right)Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

A solução geral é a soma de todas as soluções, ou seja, lembrando que $-\ell \leq m \leq \ell$,

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\left(C_{\ell,m}r^\ell + D_{\ell,m}r^{-(\ell+1)}\right)Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \tag{6.81}$$

Como ocorre com os polinômios de Legendre, podemos expandir uma função qualquer $f(\theta, \phi)$ em uma série de harmônicos esféricos, dada pela equação C.32 do apêndice C, ou seja,

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} A_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

sendo que os coeficientes $A_{\ell,m}$ são obtidos através da expressão C.33,

$$A_{\ell,m} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) Y^*_{\ell,m}(\theta, \phi) \operatorname{sen} \theta \, d\theta d\phi$$

Um caso particular importante ocorre quando $\theta = 0$. Neste caso, todos os $Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$, com $m \neq 0$, envolvem o termo $\operatorname{sen}\theta$, como se observa na tabela 6.4. Portanto,

$$Y_{\ell,m}(0, \phi) = 0, \qquad m \neq 0$$

Quando $m = 0$, temos, pela equação 6.80,

$$Y_{\ell,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} P_\ell(\cos \theta) \tag{6.82}$$

Se $\theta = 0$, $\cos \theta = 1$ e $P_\ell(1) = 1$. Assim,

$$Y_{\ell,0}(0, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} \tag{6.83}$$

de modo que a expressão C.32 da série dos harmônicos esféricos fica

$$f(\theta, \phi)\big|_{\theta=0} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell,0} Y_{\ell,0}(0, \phi)$$

$$f(\theta, \phi)\big|_{\theta=0} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} A_{\ell,0} \tag{6.84}$$

sendo que os coeficientes $A_{\ell,0}$ são obtidos através da expressão C.33, com $m = 0$, isto é,

$$A_{\ell,0} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) Y^*_{\ell,0}(\theta, \phi) \operatorname{sen} \theta \, d\theta d\phi$$

$$A_{\ell,0} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} P_\ell(\cos \theta) \operatorname{sen} \theta \, d\theta d\phi$$

$$A_{\ell,0} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta,\phi) P_\ell(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi \qquad (6.85)$$

Desta expressão, podemos obter uma outra, conhecida como *teorema de adição* dos harmônicos esféricos, que é

$$P_\ell(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi') Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \qquad (6.86)$$

sendo que os termos são os mesmos que foram apresentados na figura 6.5. Vejamos a sua demonstração.

Demonstração. Vamos supor, para facilitar, que na figura 6.5 fazemos uma rotação nos eixos, de forma que o eixo z fica sobre o vetor $\vec{r}\,'$. Assim, α torna-se o próprio ângulo θ e $(\theta',\phi') \to 0$. Utilizando a equação C.32 do apêndice C, podemos expandir o polinômio de Legendre de ordem ℓ em uma série de harmônicos esféricos, ou seja,

$$P_\ell(\cos\alpha) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} A_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

No entanto, das tabelas 6.2 e 6.4 vemos que podemos escrever o polinômio de Legendre de ordem ℓ como uma combinação linear apenas dos harmônicos esféricos $Y_{\ell,m}$ com mesmo ℓ, ou seja, da expressão acima restam apenas os termos

$$P_\ell(\cos\alpha) = \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} A_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \qquad (6.87)$$

Podemos obter os coeficientes $A_{\ell,m}$ através da expressão C.33, que fica, no nosso caso,

$$A_{\ell,m} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi) P_\ell(\cos\alpha) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi \qquad (6.88)$$

Vamos comparar esta equação com a expressão 6.85,

$$A_{\ell,0} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta,\phi) P_\ell(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi$$

Da comparação, vemos que podemos identificar

$$Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi) \leftrightarrow \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}f(\theta,\phi)$$

ou

$$f(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

e assim, a equação 6.88 pode ser entendida como uma expansão da funçã acima em harmônicos esféricos $Y_{\ell,m'}(\alpha,\phi')$, quando $m'=0$, ou seja,

$$A_{\ell,m,m'=0} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi)Y_{\ell,m'=0}(\alpha,\phi')\operatorname{sen}\theta\,d\theta d\phi$$

ou

$$A_{\ell,m,m'=0} = A_{\ell,m} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi)P_\ell(\cos\alpha)\operatorname{sen}\theta\,d\theta d\phi$$

Para encontrar $A_{\ell,m}$, temos que, quando $\alpha\to 0$, $(\theta,\phi)\to(\theta',\phi')$ (que, po sua vez, tendem a zero, conforme foi dito no início da demonstração), com percebemos na figura 6.5. Neste caso, a expressão 6.84 fica, lembrando qu existe apenas um valor de ℓ,

$$\begin{aligned}
f(\theta,\phi)\big|_{\alpha\to 0} &= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}A_{\ell,m,m'=0}\\
\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi') &= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}A_{\ell,m,m'=0}\\
A_{\ell,m} &= \frac{4\pi}{2\ell+1}Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')
\end{aligned}$$

sendo que, na última equação, eliminamos o índice $m'=0$, porque ele desnecessário. Com este valor de $A_{\ell,m}$, voltamos à expressão 6.87, que fica

$$\begin{aligned}
P_\ell(\cos\alpha) &= \sum_{m=-\ell}^{m=\ell}A_{\ell,m}Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\\
P_\ell(\cos\alpha) &= \sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{4\pi}{2\ell+1}Y^*_{l,m}(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi)
\end{aligned}$$

ou

$$P_\ell(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell} Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

Agora, lembramos que $(\theta',\phi') \to 0$ e $\alpha \to \theta$, pois supusemos, no início, que $\vec{r}'$ estava sobre o eixo z. No entanto, quando fazemos uma nova rotação dos eixos, para trazer de volta os termos como eles aparecem na figura 6.5, percebemos que as posições angulares relativas permanecem as mesmas, e assim, a expressão acima continua sendo válida, de forma que o teorema da adição 6.86 fica demonstrado. Obtemos uma outra equação importante quando $\alpha \to 0$ ou $\cos\alpha \to 1$. Neste caso, $(\theta',\phi') \to (\theta,\phi)$, e a expressão 6.86 torna-se, como $P_\ell(1) = 1$,

$$1 = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell} Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi)Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

ou

$$\sum_{m=-\ell}^{m=\ell} |Y_{\ell,m}(\theta,\phi)|^2 = \frac{2\ell+1}{4\pi} \tag{6.89}$$

que é a regra da soma dos módulos quadrados dos harmônicos esféricos.

□

Combinando a equação 6.76,

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r_>}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^\ell P_\ell(\cos\alpha)$$

com a equação 6.86, obtemos

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r_>}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^\ell \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell} Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

ou

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{4\pi}{r_>}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{1}{2\ell+1}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^\ell Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \tag{6.90}$$

que apresenta, de forma bem clara, os termos referentes às cargas, representados por $\vec{r}'$, e os referentes à posição $\vec{r}$ onde vamos calcular o potencial. Vejamos agora alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 6.10. *Considere uma superfície esférica de raio R. O potencial elétrico sobre a esfera, em $r = R$, vale $\Phi(\theta, \phi)$. Com base nestes dados, responda ao seguinte.*

a) Qual é a solução formal para o potencial elétrico dentro da esfera?

O potencial elétrico dentro da esfera, na região $r < R$, pode ser obtido através da equação 6.81, que fornece a solução geral do potencial elétrico em coordenadas esféricas, isto é,

$$\mathbb{V}(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \left(C_{\ell,m} r^{\ell} + D_{\ell,m} r^{-(\ell+1)} \right) Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

Observe que, como $\Phi(\theta, \phi)$ é qualquer, este problema, em geral, não possui simetria, de modo que precisamos utilizar os harmônicos esféricos, não os polinômios de Legendre e a expressão 6.60. Como queremos o potencial dentro da esfera, os coeficientes D_{ℓ} precisam se anular para que o potencial fique finito em $r = 0$. Assim, obtemos

$$\mathbb{V}(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} C_{\ell,m} r^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \tag{6.91}$$

Quando $r = R$, o potencial elétrico tem um valor definido, e então,

$$\mathbb{V}(R, \theta, \phi) = \Phi(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} C_{\ell,m} R^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

Esta é uma expansão em série dos harmônicos esféricos da função $\Phi(\theta, \phi)$. Portanto, podemos obter os coeficientes $C_{\ell,m}$ através da equação C.33, ou seja,

$$A_{\ell,m} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) Y^*_{\ell,m}(\theta, \phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi$$

sendo que, no nosso caso, $A_{\ell,m} = C_{\ell,m} R^{\ell}$. Assim, achamos

$$C_{\ell,m} = \frac{1}{R^\ell}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Phi(\theta', \phi') Y^*_{\ell,m}(\theta', \phi') \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\phi' \tag{6.92}$$

cujas variáveis de integração mudamos para (θ', ϕ'), para que não haja confusão com as variáveis (θ, ϕ) da equação 6.91. A partir desses coeficientes, o potencial elétrico fica, formalmente,

$$\mathbb{V}(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \left[\frac{1}{R^\ell}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Phi(\theta', \phi') Y^*_{\ell,m}(\theta', \phi') \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\phi'\right] r^\ell Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

ou

$$\mathbb{V}(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \left[\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Phi(\theta', \phi') Y^*_{\ell,m}(\theta', \phi') \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\phi'\right] \left(\frac{r}{R}\right)^\ell Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \tag{6.93}$$

b) Considere que o potencial $\Phi(\theta, \phi)$ seja dado por

$$\Phi(\theta, \phi) = \begin{cases} V_0, & 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2} \\ -V_0, & \frac{\pi}{2} \le \phi \le \pi \\ V_0, & \pi \le \phi \le \frac{3\pi}{2} \\ -V_0, & \frac{3\pi}{2} \le \phi \le 2\pi \end{cases} \tag{6.94}$$

isto é, que a esfera está dividida em quatro regiões, ou "gomos", cujos potenciais são alternados, semelhante a uma laranja. Obtenha alguns termos do potencial elétrico 6.93 dentro da esfera.

Como conhecemos $\Phi(\theta, \phi)$, podemos obter alguns dos coeficientes $C_{\ell,m}$ em 6.92. Vamos aos cálculos, utilizando a tabela 6.4 quando necessário.

1. $\ell = m = 0$. Neste caso, temos

$$C_{0,0} = \frac{1}{R^0}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Phi(\theta', \phi') Y^*_{0,0}(\theta', \phi') \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\phi'$$

ou

$$C_{0,0} = \int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} V_0 \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi' + \int_0^{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-V_0) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi'$$
$$+ \int_0^{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} V_0 \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi' + \int_0^{\pi}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (-V_0) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi'$$

ou ainda,

$$C_{0,0} = \frac{V_0}{\sqrt{4\pi}} [\phi]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' - \frac{V_0}{\sqrt{4\pi}} [\phi]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta'$$
$$+ \frac{V_0}{\sqrt{4\pi}} [\phi]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' - \frac{V_0}{\sqrt{4\pi}} [\phi]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta'$$

$$C_{0,0} = \frac{V_0}{\sqrt{4\pi}} \frac{\pi}{2} [-\cos\theta']_0^{\pi} - \frac{V_0}{\sqrt{4\pi}} \frac{\pi}{2} [-\cos\theta']_0^{\pi}$$
$$+ \frac{V_0}{\sqrt{4\pi}} \frac{\pi}{2} [-\cos\theta']_0^{\pi} - \frac{V_0}{\sqrt{4\pi}} \frac{\pi}{2} [-\cos\theta']_0^{\pi}$$

e finalmente,

$$C_{0,0} = -\frac{V_0\sqrt{\pi}}{4} [-2 + 2 - 2 + 2] = 0$$

2. $\ell = 1$, $m = 0$. O coeficiente $C_{1,0}$ fica

$$C_{1,0} = \frac{1}{R^1} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta', \phi') Y_{1,0}^*(\theta', \phi') \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi'$$

ou

$$C_{1,0} = \frac{1}{R}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} V_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi'$$
$$+ \frac{1}{R}\int_0^{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-V_0) \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi'$$
$$+ \frac{1}{R}\int_0^{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} V_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi'$$
$$+ \frac{1}{R}\int_0^{\pi}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (-V_0) \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi'$$

ou ainda,

$$C_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{V_0}{R}\left\{ [\phi]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' - [\phi]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\pi} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' \right.$$
$$\left. + [\phi]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{\pi} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' - [\phi]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' \right\}$$

e então,

$$C_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{\pi}{2}\frac{V_0}{R}\left\{ \left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta'}{2}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta'}{2}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta'}{2}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta'}{2}\right]_0^{\pi} \right\}$$

ou

$$C_{1,0} = 0$$

3. $\ell = 1$, $m = 1$. Neste caso, obtemos

$$C_{1,1} = \frac{1}{R^1}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta', \phi') Y_{1,1}^*(\theta', \phi') \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\phi'$$

ou

$$C_{1,1} = \frac{1}{R}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} V_0\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta' e^{-i\phi'} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\phi'$$
$$+ \frac{1}{R}\int_0^{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-V_0)\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta' e^{-i\phi'} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\phi'$$
$$+ \frac{1}{R}\int_0^{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} V_0\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta' e^{-i\phi'} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\phi'$$
$$+ \frac{1}{R}\int_0^{\pi}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (-V_0)\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta' e^{-i\phi'} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\phi'$$

ou ainda,

$$C_{1,1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{V_0}{R}\left\{ \left(\frac{e^{-i\phi'}}{-i}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta' \cos\theta' \, d\theta' - \left(\frac{e^{-i\phi'}}{-i}\right)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta' \cos\theta' \, d\theta' + \left(\frac{e^{-i\phi'}}{-i}\right)_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta' \cos\theta' \, d\theta' - \left(\frac{e^{-i\phi'}}{-i}\right)_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta' \cos\theta' \, d\theta' \right\}$$

Agora, pela relação de Euler 6.6, temos

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$$

Assim,

$$\begin{aligned} e^{-i.0} &= \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1 \\ e^{-i\frac{\pi}{2}} &= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i \\ e^{-i\pi} &= \cos(-\pi) + i \operatorname{sen}(-\pi) = -1 \\ e^{-i\frac{3\pi}{2}} &= \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = i \\ e^{-i2\pi} &= \cos(-2\pi) + i \operatorname{sen}(-2\pi) = 1 \end{aligned}$$

e então,

$$C_{1,1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{V_0}{R}\left\{ \left(\frac{-i-1}{-i}\right) \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta' \cos\theta' \, d\theta' - \left(\frac{-1+i}{-i}\right) \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta' \cos\theta' \, d\theta' + \left(\frac{i+1}{-i}\right) \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta' \cos\theta' \, d\theta' - \left(\frac{1-i}{-i}\right) \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta' \cos\theta' \, d\theta' \right\}$$

ou seja,

$$C_{1,1} = 0$$

Do mesmo modo como $C_{1,1}$ se anula, $C_{1,-1}$ também é nulo. A demonstraçãc é deixada como exercício. Vejamos agora o próximo coeficiente.

4. $\ell = 2$, $m = 0$.

$$C_{2,0} = \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta', \phi')Y_{2,0}^*(\theta', \phi') \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi'$$

ou

$$\begin{aligned} C_{2,0} = \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} V_0 \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(3\cos^2\theta' - 1\right) \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi' \\ + \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-V_0) \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(3\cos^2\theta' - 1\right) \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi' \\ + \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} V_0 \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(3\cos^2\theta' - 1\right) \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi' \\ + \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (-V_0) \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(3\cos^2\theta' - 1\right) \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} C_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\frac{V_0}{2R^2}\Bigg\{ [\phi]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \left(3\cos^2\theta' \operatorname{sen}\theta' - \operatorname{sen}\theta'\right) d\theta' \\ - [\phi]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\pi} \left(3\cos^2\theta' \operatorname{sen}\theta' - \operatorname{sen}\theta'\right) d\theta' \\ + [\phi]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{\pi} \left(3\cos^2\theta' \operatorname{sen}\theta' - \operatorname{sen}\theta'\right) d\theta' \\ - [\phi]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(3\cos^2\theta' \operatorname{sen}\theta' - \operatorname{sen}\theta'\right) d\theta' \Bigg\} \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned} C_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\frac{\pi}{2}\frac{V_0}{2R^2}\Bigg\{ \int_0^{\pi} \left(3\cos^2\theta' \operatorname{sen}\theta' - \operatorname{sen}\theta'\right) d\theta' \\ - \int_0^{\pi} \left(3\cos^2\theta' \operatorname{sen}\theta' - \operatorname{sen}\theta'\right) d\theta' \\ + \int_0^{\pi} \left(3\cos^2\theta' \operatorname{sen}\theta' - \operatorname{sen}\theta'\right) d\theta' \\ - \int_0^{\pi} \left(3\cos^2\theta' \operatorname{sen}\theta' - \operatorname{sen}\theta'\right) d\theta' \Bigg\} \end{aligned}$$

ou seja,

$$C_{2,0} = 0$$

5. $\ell = 2$, $m = 1$.

$$C_{2,1} = \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta', \phi')Y_{2,1}^*(\theta', \phi') \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\phi'$$

ou

$$\begin{aligned}
C_{2,1} &= \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} V_0(-1)\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' e^{-i\phi'} \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\phi' \\
&+ \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-V_0)(-1)\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' e^{-i\phi'} \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\phi' \\
&+ \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} V_0(-1)\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' e^{-i\phi'} \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\phi' \\
&+ \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (-V_0)(-1)\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' e^{-i\phi'} \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\phi'
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
C_{2,1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\frac{V_0}{R^2}\Bigg\{ &\left[\frac{e^{-i\phi'}}{-i}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \cos\theta' \operatorname{sen}^2\theta' \, d\theta' \\
&- \left[\frac{e^{-i\phi'}}{-i}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\pi} \cos\theta' \operatorname{sen}^2\theta' \, d\theta' + \left[\frac{e^{-i\phi'}}{-i}\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{\pi} \cos\theta' \operatorname{sen}^2\theta' \, d\theta' \\
&- \left[\frac{e^{-i\phi'}}{-i}\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos\theta' \operatorname{sen}^2\theta' \, d\theta' \Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2,1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\frac{V_0}{R^2}\Bigg\{ &\left[\frac{-i-1}{-i}\right] \int_0^{\pi} \cos\theta' \operatorname{sen}^2\theta' \, d\theta' \\
&- \left[\frac{-1+i}{-i}\right] \int_0^{\pi} \cos\theta' \operatorname{sen}^2\theta' \, d\theta' + \left[\frac{i+1}{-i}\right] \int_0^{\pi} \cos\theta' \operatorname{sen}^2\theta' \, d\theta' \\
&- \left[\frac{1-i}{-i}\right] \int_0^{\pi} \cos\theta' \operatorname{sen}^2\theta' \, d\theta' \Bigg\}
\end{aligned}$$

e assim,

$$C_{2,1} = 0$$

O coeficiente $C_{2,-1}$ também se anula, e a prova é deixada como exercício.

6. $\ell = 2$, $m = 2$.

$$C_{2,2} = \frac{1}{R^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta', \phi') Y^*_{2,2}(\theta', \phi') \operatorname{sen} \theta' \, d\theta' d\phi'$$

ou

$$\begin{aligned} C_{2,2} = & \frac{1}{R^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} V_0 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \operatorname{sen}^2 \theta' e^{-2i\phi'} \operatorname{sen} \theta' \, d\theta' d\phi' \\ & + \frac{1}{R^2} \int_0^{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-V_0) \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \operatorname{sen}^2 \theta' e^{-2i\phi'} \operatorname{sen} \theta' \, d\theta' d\phi' \\ & + \frac{1}{R^2} \int_0^{\pi} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} V_0 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \operatorname{sen}^2 \theta e^{-2i\phi'} \operatorname{sen} \theta' \, d\theta' d\phi' \\ & + \frac{1}{R^2} \int_0^{\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (-V_0) \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \operatorname{sen}^2 \theta e^{-2i\phi'} \operatorname{sen} \theta' \, d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} C_{2,2} = \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{V_0}{4R^2} \Bigg\{ & \left[\frac{e^{-2i\phi'}}{-2i} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \theta' \, d\theta' - \left[\frac{e^{-2i\phi'}}{-2i} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \theta' \, d\theta' \\ & + \left[\frac{e^{-2i\phi'}}{-2i} \right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \theta \, d\theta' - \left[\frac{e^{-2i\phi'}}{-2i} \right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \theta \, d\theta' \Bigg\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2,2} = \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{V_0}{4R^2} \Bigg\{ & \left[\frac{-1-1}{-2i} \right] \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \theta' \, d\theta' - \left[\frac{1+1}{-2i} \right] \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \theta' \, d\theta' \\ & + \left[\frac{-1-1}{-2i} \right] \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \theta \, d\theta' - \left[\frac{1+1}{-2i} \right] \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \theta \, d\theta' \Bigg\} \end{aligned}$$

e assim,

$$C_{2,2} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{V_0}{R^2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \theta' \, d\theta'$$

Para resolver a integral, fazemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^3\theta' &= \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}^2\theta' \\
&= \operatorname{sen}\theta'\left(1-\cos^2\theta'\right) \\
\operatorname{sen}^3\theta' &= \operatorname{sen}\theta' - \operatorname{sen}\theta'\cos^2\theta'
\end{aligned}$$

e obtemos

$$\begin{aligned}
C_{2,2} &= \frac{1}{i}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{V_0}{R^2}\int_0^\pi \left(\operatorname{sen}\theta' - \operatorname{sen}\theta'\cos^2\theta'\right) d\theta' \\
&= \frac{1}{i}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{V_0}{R^2}\left\{\left[-\cos\theta'\right]_0^\pi - \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta'\cos^2\theta\, d\theta'\right\} \\
C_{2,2} &= \frac{1}{i}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{V_0}{R^2}\left\{2 - \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta'\cos^2\theta\, d\theta'\right\}
\end{aligned}$$

Para resolver esta última integral, definimos

$$\begin{aligned}
u &= \cos^3\theta' \\
du &= -3\cos^2\theta' \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' \\
\cos^2\theta' \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' &= -\frac{du}{3}
\end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned}
C_{2,2} &= \frac{1}{i}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{V_0}{R^2}\left\{2 + \frac{1}{3}\int_0^\pi du\right\} \\
&= \frac{1}{i}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{V_0}{R^2}\left\{2 + \frac{1}{3}\left[\cos^3\theta'\right]_0^\pi\right\} \\
&= \frac{1}{i}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{V_0}{R^2}\left\{2 - \frac{2}{3}\right\} \\
C_{2,2} &= \frac{1}{i}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{4V_0}{3R^2}
\end{aligned}$$

Note que o coeficiente é complexo.

7. $\ell = 2$, $m = -2$. Por fim, para este último coeficiente,

$$C_{2,-2} = \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta', \phi')Y^*_{2,-2}(\theta', \phi') \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi'$$

ou

$$\begin{aligned} C_{2,-2} = {} & \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} V_0\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \operatorname{sen}^2\theta' e^{2i\phi'} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi' \\ & + \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-V_0)\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \operatorname{sen}^2\theta' e^{2i\phi'} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi' \\ & + \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} V_0\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \operatorname{sen}^2\theta e^{2i\phi'} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi' \\ & + \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (-V_0)\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \operatorname{sen}^2\theta e^{2i\phi'} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} C_{2,-2} = \sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{V_0}{4R^2}\Bigg\{ & \left[\frac{e^{2i\phi'}}{2i}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta'\, d\theta' - \left[\frac{e^{2i\phi'}}{2i}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta'\, d\theta' \\ & + \left[\frac{e^{2i\phi'}}{2i}\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta' - \left[\frac{e^{2i\phi'}}{2i}\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta' \Bigg\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2,-2} = \sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{V_0}{4R^2}\Bigg\{ & \left[\frac{-1-1}{2i}\right] \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta'\, d\theta' - \left[\frac{1+1}{2i}\right] \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta'\, d\theta' \\ & + \left[\frac{-1-1}{2i}\right] \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta' - \left[\frac{1+1}{2i}\right] \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta' \Bigg\} \end{aligned}$$

e assim,

$$C_{2,-2} = -\frac{1}{i}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{V_0}{R^2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta'\, d\theta'$$

Esta integral já foi resolvida anteriormente, e o resultado para o coeficiente é

$$C_{2,-2} = -\frac{1}{i}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{4V_0}{3R^2}$$

de forma que o potencial elétrico 6.91 dentro da esfera de quatro "gomos" torna-se

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} C_{\ell,m} r^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

ou

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{4V_0}{3R^2} r^2 Y_{2,2}(\theta,\phi) - \frac{1}{i}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{4V_0}{3R^2} r^2 Y_{2,-2}(\theta,\phi) + \cdots$$

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{4V_0}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \Big[Y_{2,2}(\theta,\phi) - Y_{2,-2}(\theta,\phi)\Big] + \cdots$$

Como

$$Y_{\ell,-m} = (-1)^m Y_{\ell,m}^*$$

temos

$$Y_{2,-2} = (-1)^2 Y_{2,2}^* = Y_{2,2}^*$$

Então, o potencial fica

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{4V_0}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \Big[Y_{2,2}(\theta,\phi) - Y_{2,2}^*(\theta,\phi)\Big] + \cdots$$

A subtração de dois números complexos conjugados resulta no dobro da parte imaginária, multiplicada por i, ou seja,

$$Y_{2,2}(\theta,\phi) - Y_{2,2}^*(\theta,\phi) = 2i\Im\big[Y_{2,2}(\theta,\phi)\big]$$

Utilizando a forma explícita de $Y_{2,2}$, dada na tabela 6.4, temos

$$Y_{2,2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \operatorname{sen}^2\theta e^{2i\phi}$$

$$Y_{2,2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \operatorname{sen}^2\theta \big(\cos 2\phi + i \operatorname{sen} 2\phi\big)$$

Portanto, a parte imaginária de $Y_{2,2}$ é

$$\Im\big[Y_{2,2}(\theta,\phi)\big] = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen} 2\phi$$

e, portanto, o potencial resulta em

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\frac{4V_0}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 2i\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}2\phi + \cdots$$

ou seja,

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = \frac{5V_0}{3\pi}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}2\phi + \cdots$$

Note que, neste problema, as condições de contorno 6.94 são assimétricas em torno do eixo z, pois o plano xy foi dividido em quatro quadrantes, o que explica a existência de termos com $m \neq 0$.

Exemplo 6.11. *Considere duas cargas pontuais, $+Q$ e $-Q$, localizadas nas posições $z = a$ e $z = -a$, respectivamente, e responda ao seguinte.*

a) Determine o potencial para $r > a$, utilizando os harmônicos esféricos.

Antes de iniciarmos a resolução, é interessante apresentar a figura 6.6, que ilustra a situação.

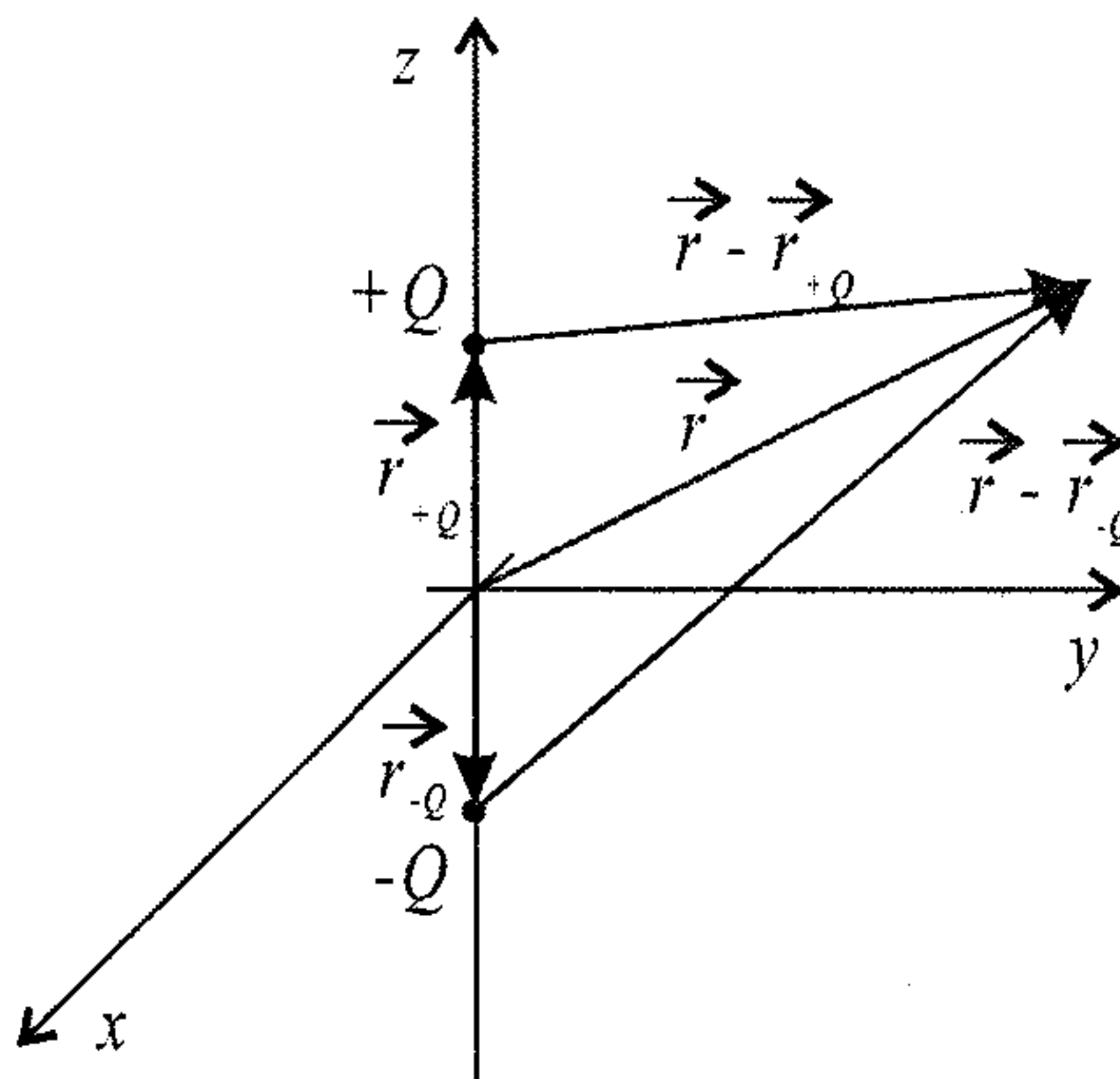



Figura 6.6: Diagrama do exemplo 6.11.

Desta figura, temos

$$\vec{r}_{+Q} = a\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\vec{r}_{-Q} = -a\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\vec{r} = r\,\hat{\mathbf{r}}$$

O potencial elétrico devido às duas cargas é dado pela soma dos potenciais elétricos de cada carga pontual, ou seja,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{+Q}{|\vec{r}-\vec{r}_{+Q}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Q}{|\vec{r}-\vec{r}_{-Q}|}$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_{+Q}|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_{-Q}|}\right]$$

Agora, utilizamos a expressão 6.90, que é

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{4\pi}{r_>}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{1}{2\ell+1}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\ell} Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

para expandir os termos entre colchetes em harmônicos esféricos. Como queremos a solução para $r > a$, temos

$$r_< = a$$
$$r_> = r$$

Além disso, para o primeiro termo entre colchetes, $\vec{r}\,' = \vec{r}_{+Q}$, e para o segundo, $\vec{r}\,' = \vec{r}_{-Q}$. Isto faz com que os ângulos θ' fiquem sendo $\theta_{+Q} = 0$ e $\theta_{-Q} = \pi$. Assim, obtemos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{4\pi}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{1}{2\ell+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} Y^*_{\ell,m}(0,\phi'_{+Q})Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\right.$$
$$\left. - \frac{4\pi}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{1}{2\ell+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} Y^*_{\ell,m}(\pi,\phi'_{-Q})Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\right]$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0 r}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{1}{2\ell+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} Y^*_{\ell,m}(0,\phi'_{+Q})Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\right.$$
$$\left. - \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{1}{2\ell+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} Y^*_{\ell,m}(\pi,\phi'_{-Q})Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\right]$$

Agora, temos que, quando $\theta = 0$, os harmônicos esféricos com $m \neq 0$ são todos nulos, restando aqueles em que $m = 0$, que são dados através da expressão 6.83,

$$Y^*_{\ell,0}(0, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}}$$

Note que, como $Y_{\ell,0}$ é real, ele é igual ao seu complexo conjugado. Da mesma forma, quando $\theta = \pi$, só restam os termos que têm $m = 0$, os quais podem ser obtidos através da equação 6.82,

$$Y^*_{\ell,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} P_\ell(\cos\theta)$$

que, em $\theta = \pi$, fica

$$Y^*_{\ell,0}(\pi, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} P_\ell(-1)$$

Da tabela 6.2, podemos ver que

$$P_\ell(-1) = (-1)^\ell$$

e assim,

$$Y^*_{\ell,0}(\pi, \phi) = (-1)^\ell \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}}$$

De posse dos dois valores para os harmônicos esféricos, e lembrando que restam apenas os termos com $m = 0$, obtemos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0 r}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell + 1}\left(\frac{a}{r}\right)^\ell \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} Y_{\ell,0}(\theta, \phi) \right.$$
$$\left. - \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell + 1}\left(\frac{a}{r}\right)^\ell (-1)^\ell \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} Y_{\ell,0}(\theta, \phi)\right]$$

ou, mediante a expressão 6.82,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0 r}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell + 1}\left(\frac{a}{r}\right)^\ell \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} P_\ell(\cos\theta) \right.$$
$$\left. - \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell + 1}\left(\frac{a}{r}\right)^\ell (-1)^\ell \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} P_\ell(\cos\theta)\right]$$

ou ainda,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta) - \sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell}\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta)\right]$$

Esta expressão pode ser reescrita como

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta)\left[1-(-1)^{\ell}\right]$$

Quando ℓ é par, o termo entre colchetes se anula. Quando ℓ é ímpar, esse termo vale 2. Portanto,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2\ell+1} P_{2\ell+1}(\cos\theta), \qquad r > a \tag{6.95}$$

que é o potencial elétrico para a região $r > a$.

b) Calcule o potencial elétrico para a região $r < a$.

O potencial elétrico para a região $r < a$ é obtido da expressão acima, por meio da substituição 6.67,

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} \leftrightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1}$$

sendo que, no nosso caso, $R = a$. Assim, reescrevendo a expressão do potencial para $r > a$ como

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a}\frac{a}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2\ell+1} P_{2\ell+1}(\cos\theta)$$

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2\ell+2} P_{2\ell+1}(\cos\theta)$$

encontramos, para $r < a$,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2\ell+2-1} P_{2\ell+1}(\cos\theta)$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2\ell+1} P_{2\ell+1}(\cos\theta), \qquad r < a$$

c) Lembrando que o módulo do momento de dipolo é dado por $p = Qd$, onde d é a distância entre as duas cargas, temos, para o nosso caso, $p = 2aQ$. Reescreva a expressão 6.95 em termos desta grandeza.

A expressão 6.95 é

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2\ell+1} P_{2\ell+1}(\cos\theta), \qquad r > a$$

então,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r}\left[\left(\frac{a}{r}\right)P_1(\cos\theta) + \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_3(\cos\theta) + \cdots\right] \\
&= \frac{Qa}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{r\cos\theta}{r^3} + \frac{a^2}{2}\frac{5r\cos^3\theta - 3r\cos\theta}{r^5} + \cdots\right] \\
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{r\cos\theta}{r^3} + \frac{a^2}{2}\frac{5r\cos^3\theta - 3r\cos\theta}{r^5} + \cdots\right]
\end{aligned}$$

d) Tome o limite $a \to 0$ na equação acima, mantendo $p = 2aQ$ fixo. Com isso, a distribuição de cargas transforma-se em um dipolo elétrico pontual, como o estudado na seção 5.3. Confira esta afirmativa.

Quando tomamos o limite $a \to 0$ na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{\text{dip}}(\vec{r}) &= \lim_{a\to 0}\mathbb{V}(\vec{r}) = \lim_{a\to 0}\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{r\cos\theta}{r^3} + \frac{a^2}{2}\frac{5r\cos^3\theta - 3r\cos\theta}{r^5} + \cdots\right] \\
&= \lim_{a\to 0}\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\cos\theta}{r^3} + \lim_{a\to 0}\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{a^2}{2}\frac{5r\cos^3\theta - 3r\cos\theta}{r^5} + \cdots \\
&= \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\cos\theta}{r^3} + \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{5r\cos^3\theta - 3r\cos\theta}{r^5}\lim_{a\to 0}\frac{a^2}{2} + \cdots \\
\mathbb{V}_{\text{dip}}(\vec{r}) &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\cos\theta}{r^3}
\end{aligned}$$

Esta expressão pode ser reescrita como

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

que é idêntica à equação 5.33, com $\vec{r}\,' = 0$, que dá o potencial elétrico de um dipolo elétrico pontual, concordando com a afirmação feita no início da questão.

e) Suponha que o dipolo pontual da questão anterior seja envolto por uma esfera condutora de raio R, ligada à Terra. Qual é o potencial elétrico dentro da esfera?

Quando o dipolo é colocado dentro da esfera, o seu campo elétrico age sobre os elétrons dela, produz uma separação de cargas, e então aparece uma densidade de cargas induzidas sobre a superfície interna da esfera. Essas cargas induzidas movem-se até que as forças elétricas entre elas equilibram a força elétrica gerada pelo dipolo, quando então a situação volta a ser estática. Esta densidade de cargas induzidas produz um campo elétrico, e também um potencial elétrico, dentro da esfera. O potencial elétrico gerado pelas cargas induzidas se combina com o potencial gerado pelo dipolo, para formar o potencial elétrico total dentro da esfera. Este problema tem uma simetria axial em torno do eixo z da figura 6.6, e assim, $m = 0$, de modo que temos um problema envolvendo apenas os polinômios de Legendre P_ℓ e a expansão 6.60. Além disso, ϕ é ilimitado, e assim, o potencial fica

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(C_\ell r^\ell + D_\ell r^{-(\ell+1)}\right)P_\ell(\cos\theta)$$

ou

$$\mathbb{V}(r,\theta) = C_0P_0(\cos\theta) + \frac{D_0}{r}P_0(\cos\theta) + C_1rP_1(\cos\theta) + \frac{D_1}{r^2}P_1(\cos\theta) + C_2r^2P_2(\cos\theta) + \frac{D_2}{r^3}P_2(\cos\theta) + \cdots$$

ou ainda,

$$\mathbb{V}(r,\theta) = C_0 + \frac{D_0}{r} + C_1r\cos\theta + \frac{D_1}{r^2}\cos\theta + C_2r^2\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \frac{D_2}{r^3}\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots \quad (6.96)$$

O potencial elétrico de um dipolo situado em $\vec{r}' = 0$, isto é, na origem, é dado pela equação 5.33,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

ou, efetuando o produto escalar, e lembrando que $|\vec{r}| = r$,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \tag{6.97}$$

Da expressão acima, vemos que o termo que caracteriza um dipolo é proporcional ao inverso do quadrado da distância, como aliás já foi comentado no exemplo 6.5. Portanto, na equação 6.96, quando $r \to 0$, devemos eliminar todos os termos do tipo $\frac{1}{r^{\ell+1}}$ que divergem na origem, exceto aquele que for proporcional a $\frac{1}{r^2}$, pois este caracteriza um dipolo elétrico. Desse modo, $D_0 = 0$ e $D_\ell = 0$, $\forall \ell \geq 2$.

Podemos (e na verdade, devemos) entender fisicamente o motivo pelo qual as constantes D_ℓ, exceto D_1, devem ser anuladas. Já vimos que o termo proporcional a $\frac{1}{r}$ está associado à existência de uma carga livre, que é um monopolo, situada na origem, o que não é o caso. Os outros termos $\frac{1}{r^{\ell+1}}$, com $\ell \geq 2$, estão associados aos momentos de multipolo de ordem maior, que também não estão presentes. O único que deve existir é o momento de dipolo, caracterizado pelo coeficiente D_1 e pelo termo proporcional a $\frac{1}{r^2}$. O capítulo 8 discute a questão dos multipolos, e você não deve deixar de consultá-lo.

Com as considerações acima, o potencial 6.96 fica

$$\mathbb{V}(r,\theta) = C_0 + C_1 r\cos\theta + \frac{D_1}{r^2}\cos\theta + C_2 r^2 \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots$$

Quando $r \to 0$, devemos ter o potencial do dipolo, ou seja, utilizando a equação 6.97,

$$\mathbb{V}(r \to 0,\theta) = C_0 + \frac{D_1}{r^2}\cos\theta$$
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = C_0 + \frac{D_1}{r^2}\cos\theta$$

Da expressão acima, obtemos

$$C_0 = 0$$
$$\frac{p}{4\pi\epsilon_0} = D_1$$

e o potencial elétrico fica

$$\mathbb{V}(r,\theta) = C_1 r\cos\theta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^2}\cos\theta + C_2 r^2 \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots$$

Como a esfera está aterrada, seu potencial é nulo, ou seja,

$$\mathbb{V}(R,\theta) = 0$$

e assim,

$$\mathbb{V}(R,\theta) = C_1 R\cos\theta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{R^2}\cos\theta + C_2 R^2 \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots$$
$$0 = \left(C_1 R + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{R^2}\right)\cos\theta + C_2 R^2 \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots$$

Para que a equação acima seja válida para qualquer valor de θ, devemos ter

$$C_1 R + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{R^2} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{R^3}$$
$$C_\ell = 0, \qquad \ell \geq 2$$

e o potencial torna-se

$$\mathbb{V}(r,\theta) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{R^3} r\cos\theta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^2}\cos\theta$$

ou

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right], \qquad r < R$$

Note que a parte do potencial relativa à carga induzida é

$$\mathbb{V}_{\text{induzido}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{R^3} r\cos\theta$$

O campo elétrico e a densidade de cargas induzidas são deixados como exercício (veja o exercício 6.4).

Exemplo 6.12. *Considere três cargas pontuais, de valores $+Q$, $-2Q$ e $+Q$, localizadas sobre o eixo z, respectivamente em $z = a$, $z = 0$ e $z = -a$, como mostra a figura 6.7.*

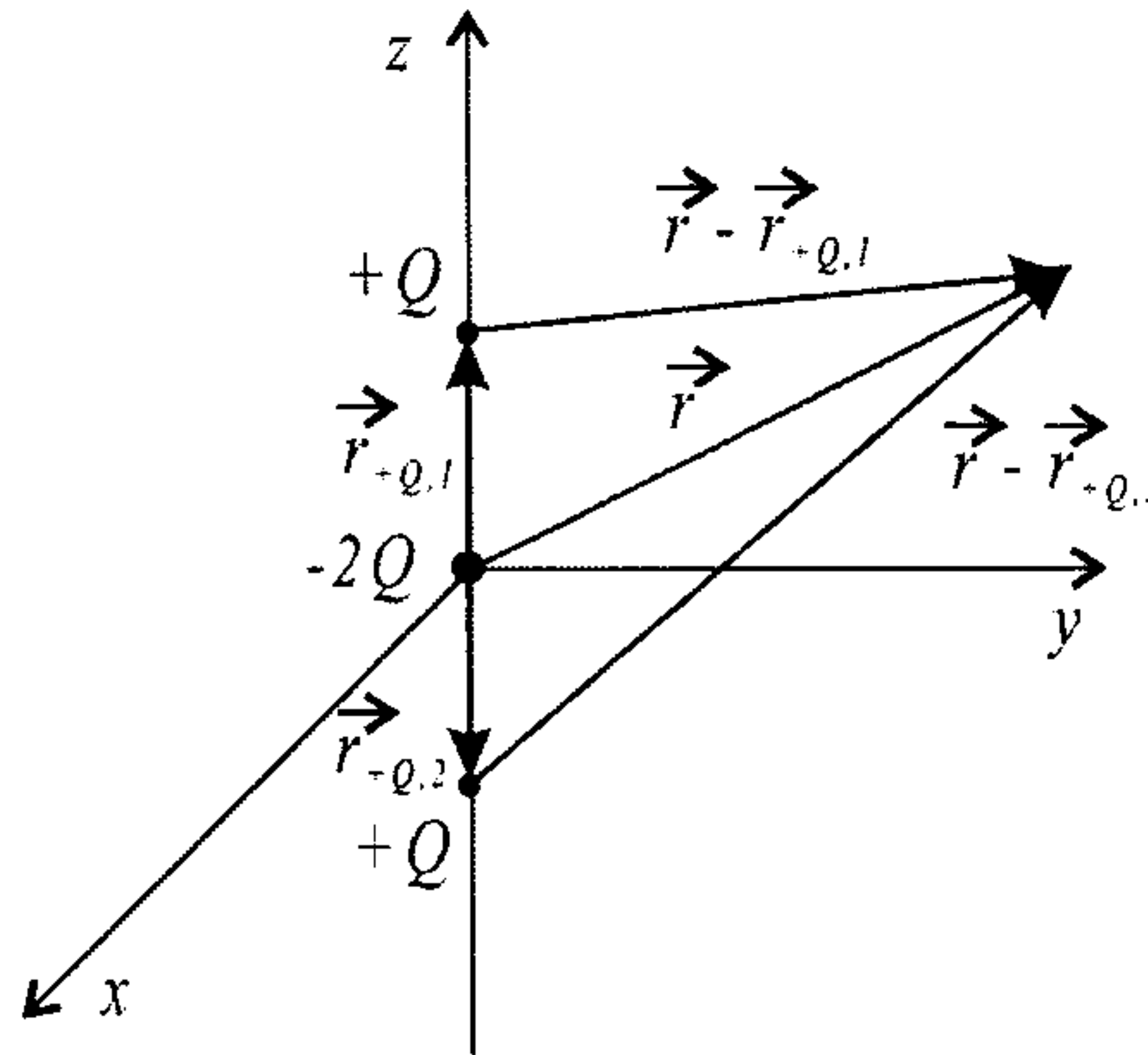



Figura 6.7: Três cargas pontuais distribuídas sobre o eixo z.

Com base nesta figura, responda ao seguinte.

a) Qual é o potencial elétrico para $r > a$?

Da figura, percebemos que

$$\vec{r}_{+Q,1} = a\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\vec{r}_{-2Q} = 0$$
$$\vec{r}_{+Q,2} = -a\,\hat{\mathbf{k}}$$

Além disso,

$$\theta_{+Q,1} = 0$$
$$\theta_{-2Q} = 0$$
$$\theta_{+Q,2} = \pi$$

O potencial elétrico gerado pelas três cargas é

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{+Q}{|\vec{r} - \vec{r}_{+Q,1}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-2Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{+Q}{|\vec{r} - \vec{r}_{+Q,2}|}$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{+Q,1}|} - \frac{2}{r} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{+Q,2}|}\right]$$

Como fizemos no exemplo anterior, vamos utilizar a expressão 6.90,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{4\pi}{r_>}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{1}{2\ell+1}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\ell} Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

para expandir os termos entre colchetes em harmônicos esféricos. Queremos a solução para $r > a$, logo,

$$r_< = a$$
$$r_> = r$$

e assim,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{4\pi}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{1}{2\ell+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} Y^*_{\ell,m}(0,\phi_{+Q,1})Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\right.$$
$$\left. - \frac{2}{r} + \frac{4\pi}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{1}{2\ell+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} Y^*_{\ell,m}(\pi,\phi_{+Q,2})Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\right]$$

Note que o termo $-\frac{2}{r}$ não pode ser expandido em série de harmônicos esféricos, já que, neste caso, $\vec{r}\,' = 0$. Agora, temos que, quando $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, restam apenas os $Y_{\ell,m}$ com $m = 0$ e, em especial, utilizando dados do exemplo anterior,

$$Y_{\ell,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\theta)$$
$$Y^*_{\ell,0}(0,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$$
$$Y^*_{\ell,0}(\pi,\phi) = (-1)^\ell\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$$

Sendo assim, obtemos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0 r}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{2\ell+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\theta)\right.$$
$$\left.+\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{2\ell+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell}(-1)^{\ell}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\theta)\right] - \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

ou então,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left[1+(-1)^{\ell}\right]\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell}P_\ell(\cos\theta) - \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

O termo $\left[1+(-1)^{\ell}\right]$ é nulo quando ℓ é ímpar, e ele vale 2 quando ℓ é par. Portanto,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2\ell}P_{2\ell}(\cos\theta) - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r}, \qquad r > a$$

b) Qual é o potencial para $r < a$?

Para obter o potencial elétrico para $r < a$, reescrevemos a expressão anterior como

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a}\left(\frac{a}{r}\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2\ell}P_{2\ell}(\cos\theta) - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a}\left(\frac{a}{r}\right)$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2\ell+1}P_{2\ell}(\cos\theta) - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a}\left(\frac{a}{r}\right)$$

Agora, utilizamos a substituição 6.67, e assim, o potencial fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2\ell}P_{2\ell}(\cos\theta) - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a}, \qquad r < a$$

Note que, na somatória, o expoente $2\ell+1$ se transformou em 2ℓ, ao passo que, no segundo termo, a fração $\frac{a}{r}$, cujo expoente é 1, tornou-se $\left(\frac{r}{a}\right)^{1-1} = \left(\frac{r}{a}\right)^{0} = 1$.

c) Mantendo o produto $\mathcal{Q} = Qa^2$ constante, tome o limite $a \to 0$ no potencial elétrico para $r > a$, o que resulta no potencial gerado por um quadrupolo axial*, sendo $\mathcal{Q}$ o* momento de quadrupolo.

O potencial para $r > a$ é

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2\ell} P_{2\ell}(\cos\theta) - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r}, \qquad r > a$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r}\left[P_0(\cos\theta) + \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\cos\theta) + \left(\frac{a}{r}\right)^4 P_4(\cos\theta) + \cdots\right] - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r}$$

ou ainda,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r}\left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \left(\frac{a}{r}\right)^4 \frac{1}{8}\left(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3\right) + \cdots\right] - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r}$$

e então,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{Qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \frac{Qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{1}{4}\left(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3\right) + \cdots - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r}$$

ou, finalmente,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3\right) + \cdots\right]$$

Em termos de $\mathcal{Q} = Qa^2$, obtemos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{\mathcal{Q}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3\right) + \cdots\right]$$

Agora, tomamos o limite $a \to 0$, ou seja,

$$\mathbb{V}_{\text{quad.}}(\vec{r}) = \lim_{a\to 0}\mathbb{V}(\vec{r}) = \lim_{a\to 0}\frac{\mathcal{Q}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3\right) + \cdots\right]$$

e assim,

$$\mathbb{V}_{\text{quad.}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\lim_{a\to 0}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \lim_{a\to 0}\frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3\right) + \cdots\right]$$

isto é,

$$\mathbb{V}_{\text{quad.}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \tag{6.98}$$

Observe que o potencial elétrico do quadrupolo é proporcional a $\frac{1}{r^3}$, que é a "marca registrada" de uma distribuição de cargas na forma de um quadrupolo.

É interessante relembrar os termos que caracterizam as distribuições de cargas já vistas. Uma carga pontual (que é um monopolo) está associada com termos do tipo $\frac{1}{r}$ no potencial elétrico. Um dipolo elétrico origina termos do tipo $\frac{1}{r^2}$. O quadrupolo é caracterizado pelos termos da forma $\frac{1}{r^3}$. Todas estas "impressões digitais" são para coordenadas esféricas. Em cilíndricas, vimos que um potencial do tipo $\ln\rho$ está ligado a fios infinitos. Estas identificações são importantes e podem facilitar bastante o entendimento físico e matemático de um dado problema.

d) Suponha que uma esfera condutora ligada à Terra, de raio R, seja colocada em volta do quadrupolo. Calcule o potencial elétrico dentro da esfera.

Neste problema, temos um eixo de simetria, que é o eixo z. Assim, na solução do potencial aparecem apenas termos com $m = 0$. Além disso, o ângulo ϕ é ilimitado. Com estas considerações, a expansão 6.60 para o potencial fica

$$\mathbb{V}(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(C_\ell r^\ell + D_\ell r^{-(\ell+1)}\right)P_\ell(\cos\theta)$$

ou

$$\mathbb{V}(r,\theta) = C_0 P_0(\cos\theta) + \frac{D_0}{r}P_0(\cos\theta) + C_1 r P_1(\cos\theta) + \frac{D_1}{r^2}P_1(\cos\theta) + C_2 r^2 P_2(\cos\theta) + \frac{D_2}{r^3}P_2(\cos\theta) + \cdots$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(r,\theta) = C_0 + \frac{D_0}{r} + C_1 r\cos\theta + \frac{D_1}{r^2}\cos\theta \\ + C_2 r^2 \frac{1}{2}\big(3\cos^2\theta - 1\big) + \frac{D_2}{r^3}\frac{1}{2}\big(3\cos^2\theta - 1\big) + \cdots \qquad (6.99)\end{aligned}$$

Quando a esfera envolve o quadrupolo, situado na origem, o campo elétrico deste age sobre a superfície interna da esfera, deslocando cargas e gerando uma densidade de cargas induzidas. Essa densidade de cargas dá origem, por sua vez, a um potencial elétrico, que se soma ao já existente, produzido pelo quadrupolo.

Na origem, em $r \to 0$, está localizado o quadrupolo. Não existem monopolos, dipolos ou quaisquer outros momentos de multipolo. Sendo assim, o potencial 6.99 deve refletir estes fatos, ou seja, os coeficientes D_0, D_1 e D_ℓ, $\forall \ell \geq 3$, devem ser nulos. Isto nos fornece

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(r \to 0,\theta) &= C_0 + \frac{D_2}{r^3}\frac{1}{2}\big(3\cos^2\theta - 1\big) \\ \frac{\mathcal{Q}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\big(3\cos^2\theta - 1\big) &= C_0 + \frac{D_2}{r^3}\frac{1}{2}\big(3\cos^2\theta - 1\big)\end{aligned}$$

onde utilizamos a equação 6.98 para o potencial do quadrupolo na origem. A equação acima nos diz que

$$\begin{aligned}C_0 &= 0 \\ D_2 &= \frac{\mathcal{Q}}{2\pi\epsilon_0}\end{aligned}$$

e assim, o potencial fica

$$\mathbb{V}(r,\theta) = C_1 r\cos\theta + \frac{C_2}{2}r^2\big(3\cos^2\theta - 1\big) + \frac{\mathcal{Q}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\big(3\cos^2\theta - 1\big) + \cdots$$

A esfera está aterrada, logo, seu potencial é nulo. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(R,\theta) &= 0 \\ C_1 R\cos\theta + \frac{C_2}{2}R^2\big(3\cos^2\theta - 1\big) + \frac{\mathcal{Q}}{4\pi\epsilon_0 R^3}\big(3\cos^2\theta - 1\big) + \cdots &= 0\end{aligned}$$

Para que a equação acima esteja correta para qualquer θ, devemos ter

$$C_1 = 0$$
$$C_\ell = 0, \qquad \forall \ell \geq 3$$
$$\frac{C_2}{2}R^2 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^5}$$

e assim,

$$\mathbb{V}(r,\theta) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^5}r^2\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$
$$\mathbb{V}(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^5\right]\left(3\cos^2\theta - 1\right) \tag{6.100}$$

Veja que o potencial elétrico devido às cargas induzidas é

$$\mathbb{V}_{\text{induzido}} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^5}r^2\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

O campo elétrico e a densidade de cargas induzidas são deixados como exercício (veja o exercício 6.7).

Com este exemplo, finalizamos a teoria básica necessária para a resolução de problemas envolvendo a equação de Laplace em coordenadas esféricas. Vamos agora passar ao estudo de sistemas envolvendo coordenadas cilíndricas.

6.6 Equação de Laplace em Coordenadas Cilíndricas

A equação de Laplace 6.2 em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) é

$$\nabla^2\mathbb{V}(\rho,\theta,z) = 0$$

ou, com o Laplaciano em cilíndricas dado pela equação B.10,

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

temos

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\mathbb{V}}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\mathbb{V}}{\partial z^2}=0$$

Vamos supor que a solução possa ser escrita na forma separável como um produto de funções, isto é, $\mathbb{V}(\rho,\theta,z)=R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)$, e assim, obtemos

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\rho\frac{\partial[R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)]}{\partial\rho}\right\}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2[R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)]}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2[R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)]}{\partial z^2}=0$$

ou

$$\frac{\Theta(\theta)Z(z)}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R(\rho)}{\partial\rho}\right)+\frac{R(\rho)Z(z)}{\rho^2}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}+R(\rho)\Theta(\theta)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}=0$$

Agora, dividimos esta equação por $R\Theta Z$, ou seja,

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=0$$

e isolamos o termo que contém Z, isto é,

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$$

O lado esquerdo da expressão acima depende de ρ e θ, enquanto o lado direito é função apenas de z. Logo, para que sejam iguais, é preciso que ambos sejam uma constante, que chamaremos de $-k^2$, para facilitar. Assim, temos duas equações, a saber,

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-k^2 \tag{6.101}$$

e

$$-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-k^2$$

ou

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2Z = 0 \tag{6.102}$$

Para obter a solução geral para o potencial elétrico, devemos resolver estas duas equações, que dependem do valor de k. Por causa da relevância desta situação, vamos iniciar o estudo, destacando o valor $k = 0$.

6.6.1 Solução da Equação de Laplace em Coordenadas Cilíndricas quando $k = 0$

As equações 6.101 e 6.102, quando $k = 0$, tornam-se

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0 \tag{6.103}$$

e

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

Esta última é facilmente resolvida através de duas integrações, e ela fornece uma solução já bem conhecida, dada por

$$Z_0(z) = A_0 + B_0z \tag{6.104}$$

A equação 6.103 pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}$$

Multiplicando-a por ρ^2, obtemos

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) = -\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}$$

Esta equação está separada, pois o lado esquerdo depende apenas de ρ, enquanto o direito é função apenas de θ. Ambos são iguais a uma constante numérica, que chamaremos de ν^2. Assim, encontramos

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) = \nu^2$$

e

$$-\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \nu^2$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \nu^2\Theta = 0$$

Esta equação tem coeficientes constantes, e sua equação característica é, quando $\nu \neq 0$,

$$m^2 + \nu^2 = 0 \Rightarrow m = \pm i\nu$$

e as soluções que formam a solução geral são

$$\begin{aligned} m = i\nu &\Rightarrow \Theta(\theta) = C_\nu e^{i\nu\theta} \\ m = -i\nu &\Rightarrow \Theta(\theta) = D_\nu e^{-i\nu\theta} \end{aligned}$$

Como o potencial elétrico deve ser unívoco, é preciso que ocorra, caso o ângulo θ esteja no intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$, isto é,

$$\begin{aligned} e^{\pm i\nu.0} &= e^{\pm i\nu 2\pi} \\ 1 &= \cos(2\pi\nu) \pm i\,\mathrm{sen}(2\pi\nu) \end{aligned}$$

Para que a expressão acima seja válida, ν deve ser um número inteiro. Portanto, a solução geral para a parte em θ do potencial é

$$\Theta_\nu(\theta) = C_\nu e^{i\nu\theta} + D_\nu e^{-i\nu\theta} \tag{6.105}$$

Esta expressão pode ser transformada em outra, em geral mais interessante, se lembrarmos a relação de Euler 6.6. Portanto, temos

$$\begin{aligned} e^{i\nu\theta} &= \cos\nu\theta + i\,\mathrm{sen}\,\nu\theta \\ e^{-i\nu\theta} &= \cos\nu\theta - i\,\mathrm{sen}\,\nu\theta \end{aligned}$$

e assim, a função Θ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \Theta_\nu(\theta) &= C_\nu\big(\cos\nu\theta + i\,\mathrm{sen}\,\nu\theta\big) + D_\nu\big(\cos\nu\theta - i\,\mathrm{sen}\,\nu\theta\big) \\ \Theta_\nu(\theta) &= \overbrace{\big(C_\nu + D_\nu\big)}^{c_\nu}\cos\nu\theta + \overbrace{i\big(C_\nu - D_\nu\big)}^{d_\nu}\,\mathrm{sen}\,\nu\theta \end{aligned}$$

ou

$$\Theta_\nu(\theta) = c_\nu \cos \nu\theta + d_\nu \operatorname{sen} \nu\theta, \qquad \nu \text{ inteiro} \tag{6.106}$$

Se θ for limitado, então ν não precisa ser inteiro, e a solução ainda é dada pela equação 6.106, só que sem a condição de ser ν um inteiro. Podemos também usar a expressão 6.105, válida para qualquer valor de ν. Quando $\nu = 0$, a equação diferencial para Θ fica, simplesmente,

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0$$

que pode ser integrada duas vezes, resultando em

$$\Theta_0(\theta) = C_0 + D_0\theta \tag{6.107}$$

Nesta expressão, se θ for ilimitado, necessariamente $D_0 = 0$. Vejamos agora a resolução da equação diferencial em ρ, que é

$$\frac{\rho}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) = \nu^2$$

ou então, multiplicando-a por R, expandindo as derivadas e colocando todos os termos no mesmo lado da equação,

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho} - \nu^2 R = 0$$

Esta equação é uma equação de Cauchy-Euler[10]. Ela é resolvida através da substituição $\rho = e^t$. Assim, temos

$$\frac{dR}{d\rho} = \frac{dt}{d\rho}\frac{dR}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{dR}{dt}$$

e

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{dR}{d\rho}\right)$$
$$\frac{d^2R}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{dR}{dt}\right)$$

[10] Veja *Equações Diferenciais Aplicadas à Física.*

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\right)\frac{dR}{dt}$$
$$\frac{d^2R}{d\rho^2} = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{dR}{dt}\right]$$

de modo que a equação diferencial fica

$$\rho^2\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{dR}{dt}\right] + \rho\frac{1}{\rho}\frac{dR}{dt} - \nu^2 R = 0$$

ou

$$\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{dR}{dt} + \frac{dR}{dt} - \nu^2 R = 0$$

ou ainda,

$$\frac{d^2R}{dt^2} - \nu^2 R = 0$$

que possui a equação característica

$$m^2 - \nu^2 = 0 \Rightarrow m = \pm\nu$$

e assim, a solução geral é formada pelas funções

$$m = \nu \Rightarrow R = Ee^{\nu t}$$
$$m = -\nu \Rightarrow R = Fe^{-\nu t}$$

ou seja,

$$R_\nu(t) = E_\nu e^{\nu t} + F_\nu e^{-\nu t}$$

Como $\rho = e^t$, temos

$$R_\nu(\rho) = E_\nu \rho^\nu + F_\nu \rho^{-\nu} \tag{6.108}$$

Quando $\nu = 0$, a equação diferencial para R fica

$$\frac{\rho}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) = 0$$

ou então,

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) = 0$$

Esta equação pode ser integrada, resultando em

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) d\rho = f_0$$

$$\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)_{\rho_0}^{\rho} = f_0$$

$$\rho\frac{dR}{d\rho} - \overbrace{\rho_0\frac{dR(\rho_0)}{d\rho}}^{e_0} = f_0$$

$$\rho\frac{dR}{d\rho} = \overbrace{e_0 + f_0}^{F_0}$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dR}{d\rho}\, d\rho = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{F_0}{\rho}\, d\rho$$

$$[R]_{\rho_0}^{\rho} = [F_0 \ln \rho]_{\rho_0}^{\rho}$$

$$R(\rho) - R(\rho_0) = F_0 \ln \rho - F_0 \ln \rho_0$$

$$R(\rho) = F_0 \ln \rho + \overbrace{R(\rho_0)}^{E_0} - F_0 \ln \rho_0$$

ou seja,

$$R_0(\rho) = E_0 + F_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} \tag{6.109}$$

onde ρ_0 é algum parâmetro relevante para um dado problema, com dimensão de comprimento para que a equação fique dimensionalmente correta. A solução para $\nu = 0$ e $k = 0$ é formada pelas soluções 6.104, 6.107 e 6.109, isto é,

$$\mathbb{V}_{0,0}(\rho, \theta, z) = \left(E_0 + F_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0}\right)\left(C_0 + D_0\theta\right)\left(A_0 + B_0 z\right) \tag{6.110}$$

Note que, se o ângulo θ for ilimitado, $D_0 = 0$. Além disso, se z também for ilimitado, $B_0 = 0$. A solução para $k = 0$ e $\nu \neq 0$ é formada pelas expressões 6.104, 6.106 e 6.108, isto é,

$$\mathbb{V}_{0,\nu\neq 0}(\rho,\theta,z) = \big(E_\nu \rho^\nu + F_\nu \rho^{-\nu}\big)\big(C_\nu \cos\nu\theta + D_\nu \operatorname{sen}\nu\theta\big)\big(A_0 + B_0 z\big)$$

Como temos uma solução para cada valor de ν, a solução geral é a soma das soluções, incluindo a solução para $\nu = 0$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = {} & \Big(E_0 + F_0 \ln\frac{\rho}{\rho_0}\Big)\big(C_0 + D_0\theta\big)\big(A_0 + B_0 z\big) \\ & + \sum_{\nu\neq 0}\big(E_\nu \rho^\nu + F_\nu \rho^{-\nu}\big)\big(C_\nu \cos\nu\theta + D_\nu \operatorname{sen}\nu\theta\big)\big(A_0 + B_0 z\big)\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = \big(A_0 + B_0 z\big)\Bigg[& \Big(E_0 + F_0 \ln\frac{\rho}{\rho_0}\Big)\big(C_0 + D_0\theta\big) \\ & + \sum_{\nu\neq 0}\big(E_\nu \rho^\nu + F_\nu \rho^{-\nu}\big)\big(C_\nu \cos\nu\theta + D_\nu \operatorname{sen}\nu\theta\big)\Bigg] \qquad (6.111)\end{aligned}$$

Observe que, se $\theta \in [0, 2\pi]$, ν deve, necessariamente, ser inteiro. Se o domínio de θ for limitado, esta restrição não existe. Vejamos agora alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 6.13. *Considere um cilindro metálico muito comprido, cujo eixo coincide com o eixo z, de raio R e submetido a um potencial fixo V_0 sobre a superfície lateral. Responda ao seguinte.*

a) Calcule o potencial dentro do cilindro.

Para iniciar o problema, devemos considerar que o domínio de z é infinito, pois não há nenhuma restrição com relação a esta coordenada, o que faz com que $B_0 = 0$ na expressão 6.111. Além disso, o ângulo θ é ilimitado, e assim, ν deve ser um inteiro e $D_0 = 0$. Como queremos o potencial dentro do cilindro, para $\rho < R$, e como não há nenhuma distribuição de cargas nesta região, é preciso que os coeficientes F_ν sejam todos nulos, inclusive F_0, pois senão os termos $\ln\frac{\rho}{\rho_0}$ e $\rho^{-\nu}$ divergem em $\rho \to 0$, o que não deve ocorrer. Portanto, temos, reunindo as constantes,

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\big(C_\nu \cos\nu\theta + D_\nu \operatorname{sen}\nu\theta\big)\rho^\nu$$

Em $\rho = R$, $\mathbb{V} = V_0$, ou seja,

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(R,\theta,z) = V_0$$

$$A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \big(C_\nu \cos\nu\theta + D_\nu \,\mathrm{sen}\,\nu\theta\big) R^\nu = V_0 \qquad (6.112)$$

Esta expressão só pode ser verificada, para qualquer valor de θ, se $C_\nu = D_\nu = 0, \forall\nu \neq 0$, o que resulta em

$$A_0 = V_0$$

É importante entender fisicamente por que os coeficientes C_ν e D_ν são todos nulos, exceto quando $\nu = 0$. Os fatores que multiplicam esses coeficientes geram termos com uma dependência angular em θ, seja em cossenos ou em senos. No entanto, a condição de contorno para o potencial elétrico possui uma simetria cilíndrica em torno do eixo do cilindro, e assim, o potencial não deve depender da coordenada angular θ. O termo restante, A_0, não está associado a nenhuma função angular. Por este motivo, ele sobrevive, e o resultado é um potencial constante dentro do cilindro, o que já era esperado, porque ele é metálico e não deve haver campo elétrico no seu interior. Como conseqüência, o potencial elétrico tem um gradiente nulo e, portanto, ele deve ser uma constante.

Além das considerações físicas acima, do ponto de vista matemático a expressão 6.112 é uma série de Fourier, e os coeficientes da série podem ser obtidos através da definição apropriada das equações 2.16 e 2.19. O resultado é justamente o mesmo que foi obtido anteriormente, e ele fica como exercício.

Portanto, dentro do cilindro temos

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = V_0, \qquad \rho < R \qquad (6.113)$$

e o potencial dentro do cilindro é constante, como já foi mencionado.

b) Qual é o potencial fora do cilindro?

Novamente, temos uma situação em que z é ilimitado, e portanto, $B_0 = 0$. O ângulo θ varia no intervalo $[0, 2\pi]$, e assim, $D_0 = 0$. Não há cargas quando $\rho \to \infty$, logo, $E_\nu = 0, \forall\nu \neq 0$. E com relação ao fator em que aparece F_0, o que devemos fazer? Este termo diverge quando $\rho \to \infty$, e então, deveríamos considerar $F_0 = 0$. No entanto, vamos recordar a equação 5.29 para o potencial elétrico gerado por um fio infinito, visto no exemplo 5.7,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(\rho_0) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{\rho}{\rho_0}$$

Desta equação, percebemos que um fio infinito gera um potencial logarítmico em função de ρ, que diverge em $\rho \to \infty$. Um fio infinito é um cilindro com um raio R muito pequeno, e assim, no nosso problema atual, não devemos fazer $F_0 = 0$, sob pena de cometermos um erro. Além disso, o parâmetro ρ_0 relevante para o nosso caso é justamente o raio R do cilindro, e portanto, o potencial fica

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = E_0 + F_0\ln\frac{\rho}{R} + \sum_{\nu\neq 0}\big(C_\nu\cos\nu\theta + D_\nu\operatorname{sen}\nu\theta\big)\rho^{-\nu}$$

Em $r = R$, o potencial vale V_0, ou seja,

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(R,\theta,z) = V_0$$
$$E_0 + F_0\ln\frac{R}{R} + \sum_{\nu\neq 0}\big(C_\nu\cos\nu\theta + D_\nu\operatorname{sen}\nu\theta\big)R^{-\nu} = V_0$$

Para que a expressão acima seja verdadeira para qualquer θ, devemos ter novamente $C_\nu = D_\nu = 0, \forall\nu$. Isto pode ser explicado fisicamente do mesmo modo que no caso anterior, lembrando que o potencial elétrico é simétrico em torno do eixo z. Com esta consideração, obtemos

$$E_0 = V_0$$

e assim, o potencial fica

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = V_0 + F_0\ln\frac{\rho}{R}, \qquad \rho > R \tag{6.114}$$

que é semelhante ao potencial elétrico gerado por um fio infinito (veja a equação 5.29). Assim, na região exterior ao cilindro, este se comporta como se fosse um fio infinito, se fizermos as equivalências

$$\mathbb{V}(R) = V_0$$
$$F_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$$

ou

$$\lambda = -2\pi\epsilon_0 F_0$$

que é obtida mediante a comparação das expressões 5.29 e 6.114.

Exemplo 6.14. *Um cilindro metálico muito longo, de raio R e descarregado, é colocado num campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}_0$, inicialmente uniforme e perpendicular ao eixo do cilindro. Responda ao seguinte.*

a) Calcule o potencial elétrico fora do cilindro.

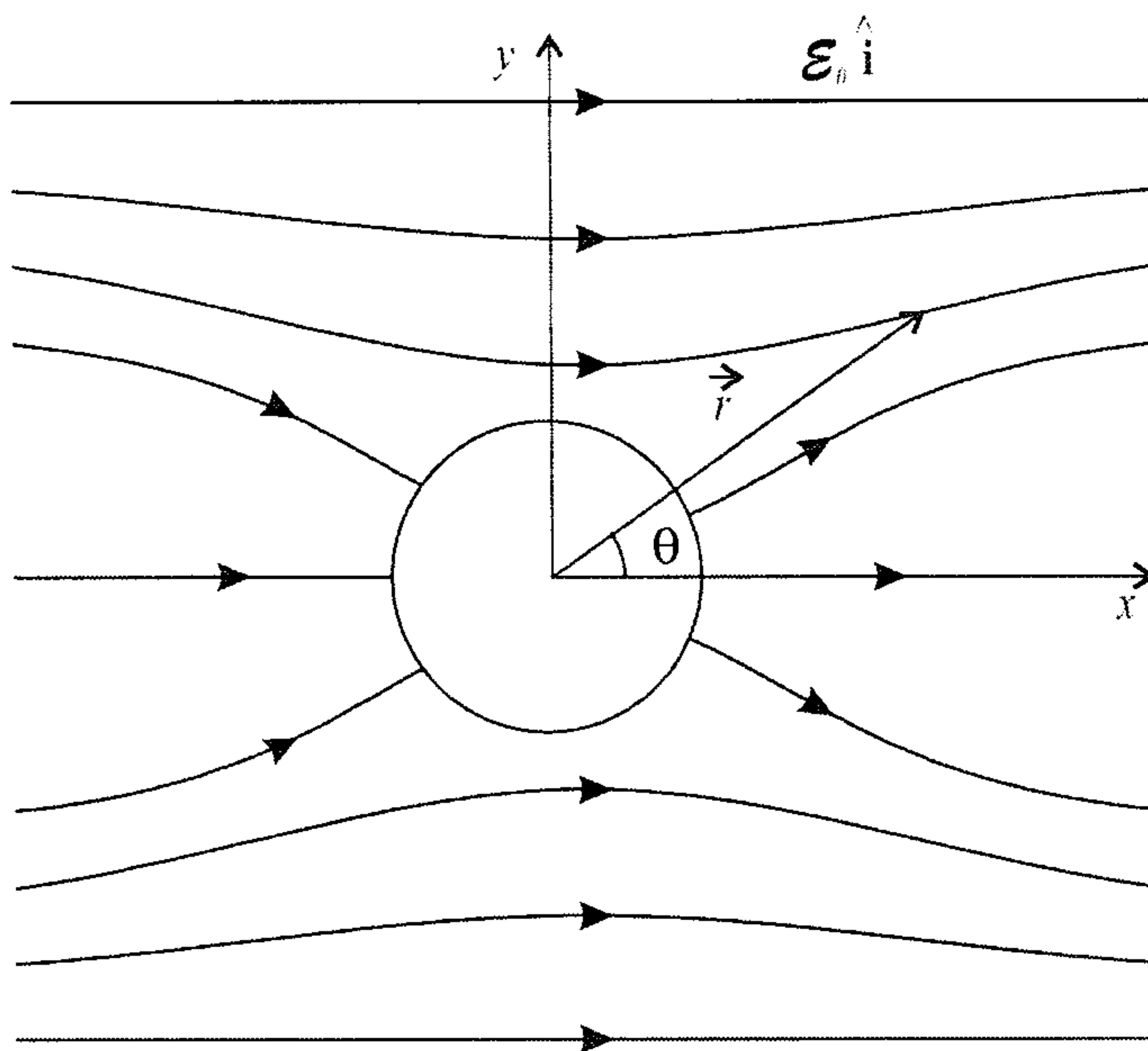



Figura 6.8: Linhas de campo elétrico para um cilindro descarregado e isolado colocado num campo elétrico externo homogêneo e constante $\mathcal{E}_0\,\hat{\mathbf{i}}$.

Este problema é semelhante ao que estudamos no exemplo 6.5. Como lá, quando o cilindro é submetido ao campo elétrico externo, aparece uma densidade de cargas induzidas que produz um potencial elétrico que se soma ao potencial elétrico do campo constante. O resultado é um potencial elétrico total perturbado nas regiões próximas ao cilindro, mas que, nas regiões muito afastadas, ainda é dado, basicamente, pelo potencial elétrico do campo constante. Para sabermos o potencial elétrico associado ao campo constante, vamos considerar um sistema de eixos em que o eixo z corresponde ao eixo do cilindro, enquanto o eixo x está na mesma direção que o campo elétrico constante, orientado no mesmo sentido que este, e assim, $\vec{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0\,\hat{\mathbf{i}}$. A figura 6.8 apresenta as linhas de campo elétrico para esse problema.

Como o campo é o gradiente negativo do potencial elétrico, temos, para

o potencial elétrico do campo constante,

$$\nabla\mathbb{V} = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial z}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= -\nabla\mathbb{V} \\ \mathcal{E}_0\,\hat{\mathbf{i}} &= \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial z} \end{aligned}$$

Da equação acima, é fácil perceber que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbb{V}}{\partial x} &= -\mathcal{E}_0 \\ \frac{\partial\mathbb{V}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial\mathbb{V}}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, o potencial elétrico não depende de y ou z, mas de x, e integrando a equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbb{V}}{\partial x} &= -\mathcal{E}_0 \\ \int_{\mathbb{V}_0}^{\mathbb{V}} \partial\mathbb{V} &= -\int_0^x \mathcal{E}_0 \partial x \\ \mathbb{V} - \mathbb{V}_0 &= -\mathcal{E}_0 x \\ \mathbb{V} &= -\mathcal{E}_0 x + \mathbb{V}_0 \end{aligned}$$

que é o potencial elétrico longe da esfera. Em coordenadas cilíndricas, utilizando as equações 1.29, temos

$$x = \rho\cos\theta$$

e assim, o potencial nos pontos afastados da esfera é

$$\mathbb{V} = -\mathcal{E}_0\rho\cos\theta + \mathbb{V}_0 \tag{6.115}$$

Agora, precisamos fazer considerações sobre a solução geral para o potencial elétrico 6.111. O ângulo θ é ilimitado, logo, $D_0 = 0$. O domínio de z é infinito, e portanto, $B_0 = 0$. Reunindo estas afirmações, obtemos, até o momento,

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = E_0 + F_0 \ln\frac{\rho}{\rho_0} + \sum_{\nu\neq 0}\left(E_\nu\rho^\nu + F_\nu\rho^{-\nu}\right)\left(C_\nu\cos\nu\theta + D_\nu\,\mathrm{sen}\,\nu\theta\right)$$

ou

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = E_0 + F_0 \ln\frac{\rho}{\rho_0} + E_1\rho\cos\theta + \frac{F_1}{\rho}\cos\theta + G_1\rho\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{H_1}{\rho}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ + E_2\rho^2\cos 2\theta + \frac{F_2}{\rho^2}\cos 2\theta + G_2\rho^2\,\mathrm{sen}\,2\theta + \frac{H_2}{\rho^2}\,\mathrm{sen}\,2\theta + \cdots\end{aligned}$$

Quando $\rho \to \infty$, o potencial elétrico torna-se o potencial devido ao campo elétrico constante, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho\to\infty,\theta,z) = E_0 + F_0 \ln\frac{\rho}{\rho_0} + E_1\rho\cos\theta + G_1\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ + E_2\rho^2\cos 2\theta + G_2\rho^2\,\mathrm{sen}\,2\theta + \cdots\end{aligned}$$

Comparando esta expressão com a equação 6.115, temos que

$$\begin{aligned}E_0 &= \mathbb{V}_0\\ F_0 &= 0\\ E_1 &= -\mathcal{E}_0\\ E_\nu &= 0, \forall\nu \geq 2\\ G_\nu &= 0, \forall\nu \geq 1\end{aligned}$$

Assim, o potencial fica

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = \mathbb{V}_0 - \mathcal{E}_0\rho\cos\theta + \frac{F_1}{\rho}\cos\theta \\ + \frac{H_1}{\rho}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{F_2}{\rho^2}\cos 2\theta + \frac{H_2}{\rho^2}\,\mathrm{sen}\,2\theta + \cdots\end{aligned}$$

Como o cilindro está descarregado e isolado, o potencial sobre ele é nulo, ou seja, $\mathbb{V}(R,\theta,z) = 0$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{0,\nu}(R,\theta,z) = \mathbb{V}_0 - \mathcal{E}_0 R\cos\theta + \frac{F_1}{R}\cos\theta \\ + \frac{H_1}{R}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{F_2}{R^2}\cos 2\theta + \frac{H_2}{R^2}\,\mathrm{sen}\,2\theta + \cdots\end{aligned}$$

ou

$$\mathbb{V}_0 + \left(\frac{F_1}{R} - \mathcal{E}_0 R\right)\cos\theta + \frac{H_1}{R}\operatorname{sen}\theta + \frac{F_2}{R^2}\cos 2\theta + \frac{H_2}{R^2}\operatorname{sen} 2\theta + \cdots = 0$$

Note que o único modo de esta equação ser satisfeita para qualquer valor de θ ocorre quando

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_0 &= 0\\ \frac{F_1}{R} - \mathcal{E}_0 R &= 0, \Rightarrow F_1 = \mathcal{E}_0 R^2\\ H_\nu &= 0, \forall \nu \geq 1\\ F_\nu &= 0, \forall \nu \geq 2\end{aligned}$$

Assim sendo, o potencial fica

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = -\mathcal{E}_0 \rho\cos\theta + \frac{\mathcal{E}_0 R^2}{\rho}\cos\theta \tag{6.116}$$

ou

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = -\mathcal{E}_0 \rho\cos\theta\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right)$$

Observe que este potencial elétrico é a soma da parte referente ao campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}_0$, dada pela equação 6.115, com a parte gerada pelas cargas induzidas sobre a superfície do cilindro, dada por

$$\mathbb{V}_{\text{induzido}} = \frac{\mathcal{E}_0 R^2}{\rho}\cos\theta$$

b) Qual é o campo elétrico na região externa ao cilindro?

O campo elétrico pode ser obtido através do gradiente negativo da equação 6.116, ou seja,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} &= -\nabla\mathbb{V}\\ &= -\left[\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[-\mathcal{E}_0\rho\cos\theta + \frac{\mathcal{E}_0 R^2}{\rho}\cos\theta\right]\\ &= \left(\mathcal{E}_0\cos\theta + \frac{\mathcal{E}_0 R^2}{\rho^2}\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} - \left(\mathcal{E}_0\rho\operatorname{sen}\theta - \frac{\mathcal{E}_0 R^2}{\rho}\operatorname{sen}\theta\right)\frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\\ \vec{\mathcal{E}} &= \mathcal{E}_0\cos\theta\left(1 + \frac{R^2}{\rho^2}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} - \mathcal{E}_0\operatorname{sen}\theta\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned} \tag{6.117}$$

c) Qual é a densidade de cargas induzidas no cilindro?

A densidade de cargas induzidas pode ser obtida através da expressão 6.44,

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}$$

Considerando que o vetor normal ao cilindro é dado por $\hat{n} = \hat{\boldsymbol{\rho}}$ e que a densidade de cargas está sobre a superfície do cilindro, obtemos

$$\begin{aligned}
\sigma(R,\theta) &= \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}_R \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} \\
&= \epsilon_0 \left[\mathcal{E}_0 \cos\theta \left(1 + \frac{R^2}{R^2}\right) \hat{\boldsymbol{\rho}} - \mathcal{E}_0 \operatorname{sen}\theta \left(1 - \frac{R^2}{R^2}\right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} \\
\sigma(R,\theta) &= 2\epsilon_0 \mathcal{E}_0 \cos\theta
\end{aligned}$$

A carga total induzida sobre o cilindro é calculada através da integração da densidade de cargas sobre toda a superfície do cilindro, ou seja,

$$\begin{aligned}
Q &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma \, R d\theta dz \\
&= 2\epsilon_0 \mathcal{E}_0 R \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta dz \\
&= 2\epsilon_0 \mathcal{E}_0 R \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\left(\operatorname{sen}\theta\right)_0^{2\pi}}^{0} dz \\
&= 2\epsilon_0 \mathcal{E}_0 R \int_{-\infty}^{\infty} 0 \, dz \\
Q &= 0
\end{aligned}$$

A carga total induzida é nula, como deve ser, já que o cilindro está isolado e, inicialmente, não tem nenhuma carga.

Exemplo 6.15. *Dois cilindros infinitos estão dispostos de forma que seus eixos coincidem. O potencial no cilindro de raio menor R_a vale $\mathbb{V}_a$, enquanto o potencial no cilindro externo, de raio R_b, está fixo em $\mathbb{V}_b$. Responda ao seguinte.*

a) Qual é o potencial na região entre os dois cilindros?

Para obtermos o potencial elétrico para $R_a \leq \rho \leq R_b$, partimos da solução geral 6.111,

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = \left(A_0 + B_0 z\right)\Bigg[\left(E_0 + F_0 \ln\frac{\rho}{\rho_0}\right)\left(C_0 + D_0\theta\right) + \sum_{\nu\neq 0}\left(E_\nu\rho^\nu + F_\nu\rho^{-\nu}\right)\left(C_\nu\cos\nu\theta + D_\nu\,\text{sen}\,\nu\theta\right)\Bigg]$$

O ângulo θ é ilimitado, logo $D_0 = 0$. Além disso, os cilindros são infinitos, e assim, o domínio de z é ilimitado, e $B_0 = 0$. Obtemos, portanto,

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = E_0 + F_0\ln\frac{\rho}{\rho_0} + \sum_{\nu\neq 0}\left(E_\nu\rho^\nu + F_\nu\rho^{-\nu}\right)\left(C_\nu\cos\nu\theta + D_\nu\,\text{sen}\,\nu\theta\right)$$

As condições de contorno para o potencial elétrico são $\mathbb{V}(R_a,\theta,z) = \mathbb{V}_a$ e $\mathbb{V}(R_b,\theta,z) = \mathbb{V}_b$. Nenhuma dessas condições depende do ângulo θ, e elas são simétricas em torno do eixo z. Isso significa que o potencial elétrico também deve ser simétrico, e ele não deve depender da coordenada angular θ. Assim, na expressão acima, devemos considerar $C_\nu = D_\nu = 0, \forall\nu \geq 1$, para eliminar a parte angular. O parâmetro ρ_0 pode ser escolhido como sendo o raio de um dos cilindros, e optamos por $\rho_0 = R_b$. O resultado é

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = E_0 + F_0\ln\frac{\rho}{R_b}$$

Agora, consideramos as condições de contorno. Em $\rho = R_a$, temos

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(R_a,\theta,z) = \mathbb{V}_a$$
$$E_0 + F_0\ln\frac{R_a}{R_b} = \mathbb{V}_a$$

Em $\rho = R_b$, obtemos

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(R_b,\theta,z) = \mathbb{V}_b$$
$$E_0 + F_0\ln\frac{R_b}{R_b} = \mathbb{V}_b$$
$$E_0 = \mathbb{V}_b$$

Voltando agora à equação anterior e substituindo o valor de E_0, achamos

$$\mathbb{V}_b + F_0\ln\frac{R_a}{R_b} = \mathbb{V}_a$$

$$
\begin{aligned}
F_0 \ln \frac{R_a}{R_b} &= \mathbb{V}_a - \mathbb{V}_b \\
F_0 &= \frac{\mathbb{V}_a - \mathbb{V}_b}{\ln \frac{R_a}{R_b}} \\
F_0 &= \frac{\mathbb{V}_b - \mathbb{V}_a}{\ln \frac{R_b}{R_a}}
\end{aligned}
$$

de modo que o potencial na região entre os cilindros fica

$$
\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho, \theta, z) = \mathbb{V}_b + \frac{\mathbb{V}_b - \mathbb{V}_a}{\ln \frac{R_b}{R_a}} \ln \frac{\rho}{R_b}, \qquad R_a \le \rho \le R_b
$$

É importante ressaltar que a escolha feita para ρ_0 não influi no resultado final para o potencial elétrico. Vamos considerar que, ao invés de escolher $\rho_0 = R_b$, tivéssemos optado por $\rho_0 = R_a$. Então teríamos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}_{0,\nu}(R_a, \theta, z) &= \mathbb{V}_a \\
E_0 + F_0 \ln \frac{R_a}{R_a} &= \mathbb{V}_a \\
E_0 &= \mathbb{V}_a
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}_{0,\nu}(R_b, \theta, z) &= \mathbb{V}_b \\
\mathbb{V}_a + F_0 \ln \frac{R_b}{R_a} &= \mathbb{V}_b \\
F_0 \ln \frac{R_b}{R_a} &= \mathbb{V}_b - \mathbb{V}_a \\
F_0 &= \frac{\mathbb{V}_b - \mathbb{V}_a}{\ln \frac{R_b}{R_a}}
\end{aligned}
$$

e o potencial elétrico seria

$$
\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho, \theta, z) = \mathbb{V}_a + \frac{\mathbb{V}_b - \mathbb{V}_a}{\ln \frac{R_b}{R_a}} \ln \frac{\rho}{R_a}
$$

Este resultado é idêntico ao anterior, e para provar isso, vamos subtrair um do outro, chamando este último resultado de $\mathbb{V}'$, para evitar confusões. Assim, temos

$$
\mathbb{V} - \mathbb{V}' = \mathbb{V}_b + \frac{\mathbb{V}_b - \mathbb{V}_a}{\ln \frac{R_b}{R_a}} \ln \frac{\rho}{R_b} - \left(\mathbb{V}_a + \frac{\mathbb{V}_b - \mathbb{V}_a}{\ln \frac{R_b}{R_a}} \ln \frac{\rho}{R_a} \right)
$$

ou

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}-\mathbb{V}' &= \mathbb{V}_b + \frac{\mathbb{V}_b-\mathbb{V}_a}{\ln\frac{R_b}{R_a}}\ln\frac{\rho}{R_b} - \mathbb{V}_a - \frac{\mathbb{V}_b-\mathbb{V}_a}{\ln\frac{R_b}{R_a}}\ln\frac{\rho}{R_a} \\
&= \mathbb{V}_b-\mathbb{V}_a + \frac{\mathbb{V}_b-\mathbb{V}_a}{\ln\frac{R_b}{R_a}}\left(\ln\frac{\rho}{R_b} - \ln\frac{\rho}{R_a}\right) \\
&= \mathbb{V}_b-\mathbb{V}_a + \frac{\mathbb{V}_b-\mathbb{V}_a}{\ln\frac{R_b}{R_a}}\ln\frac{\rho}{R_b}\frac{R_a}{\rho} \\
&= \mathbb{V}_b-\mathbb{V}_a + \frac{\mathbb{V}_b-\mathbb{V}_a}{\ln\frac{R_b}{R_a}}\ln\frac{R_a}{R_b} \\
&= \mathbb{V}_b-\mathbb{V}_a + \frac{\mathbb{V}_b-\mathbb{V}_a}{\ln\frac{R_b}{R_a}}\left(-\ln\frac{R_b}{R_a}\right) \\
&= \mathbb{V}_b-\mathbb{V}_a - \frac{\mathbb{V}_b-\mathbb{V}_a}{\ln\frac{R_b}{R_a}}\ln\frac{R_b}{R_a} \\
&= \mathbb{V}_b-\mathbb{V}_a - (\mathbb{V}_b-\mathbb{V}_a) \\
\mathbb{V}-\mathbb{V}' &= 0 \\
\mathbb{V} &= \mathbb{V}'
\end{aligned}$$

Note que eles são iguais para qualquer valor de ρ, e não apenas para algum valor específico. Isso mostra que a escolha de um valor particular para ρ_0 não altera fisicamente o problema.

b) Qual é o potencial elétrico na região externa ao cilindro maior, ou seja, para $\rho > R_b$?

No exemplo 6.13, calculamos o potencial elétrico dentro e fora de um cilindro de raio R. Lá, obtivemos a equação 6.114 para o potencial elétrico na região exterior ao cilindro, isto é,

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = V_0 + F_0 \ln\frac{\rho}{R}, \qquad \rho > R$$

No nosso caso, a região exterior ao cilindro maior é fisicamente idêntica à região externa ao cilindro de raio R do exemplo 6.13. Assim, devemos ter $V_0 = \mathbb{V}_b$ e $R = R_b$, ou seja, o potencial elétrico fica

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = \mathbb{V}_b + F_0 \ln\frac{\rho}{R_b}, \qquad \rho > R_b$$

A constante F_0 precisa de mais alguma condição de contorno para ser determinada.

Exemplo 6.16. *Suponha que os dois cilindros do exemplo anterior estejam submetidos aos seguintes potenciais:*

$$\mathbb{V}(\rho,\theta,z) = \begin{cases} \mathbb{V}_a, & para\ \rho = R_a \\ \mathbb{V}_b \cos 2\theta, & para\ \rho = R_b \end{cases}$$

Obtenha o potencial elétrico em todo o espaço.

Vamos iniciar a resolução deste problema pela região $\rho \leq R_a$, que é interna ao cilindro menor. Neste caso, como a condição de contorno sobre o cilindro menor é um potencial constante, a situação física é idêntica àquela do exemplo 6.13, em que calculamos o potencial elétrico dentro de um cilindro de raio R. O resultado que obtivemos lá foi a equação 6.113, que estabelece que o potencial dentro do cilindro é constante, e então, no nosso caso, temos

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = \mathbb{V}_a, \qquad \rho < R_a$$

Vejamos agora a região $R_a \leq \rho \leq R_b$. Partimos da solução geral para o potencial elétrico 6.111,

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = \left(A_0 + B_0 z\right)\Bigg[\left(E_0 + F_0 \ln\frac{\rho}{\rho_0}\right)\left(C_0 + D_0\theta\right) + \sum_{\nu\neq 0}\left(E_\nu\rho^\nu + F_\nu\rho^{-\nu}\right)\left(C_\nu\cos\nu\theta + D_\nu \operatorname{sen}\nu\theta\right)\Bigg]$$

e lembramos que o ângulo θ é ilimitado, assim como z, o que faz com que $B_0 = D_0 = 0$. Vamos considerar também $\rho_0 = R_b$, o que, como já vimos, não influi no resultado final. Obtemos, portanto,

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = E_0 + F_0\ln\frac{\rho}{R_b} + \sum_{\nu\neq 0}\left(E_\nu\rho^\nu + F_\nu\rho^{-\nu}\right)\left(C_\nu\cos\nu\theta + D_\nu\operatorname{sen}\nu\theta\right)$$

ou, explicitando alguns termos,

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = E_0 + F_0\ln\frac{\rho}{R_b} + E_1\rho\cos\theta + \frac{F_1}{\rho}\cos\theta + G_1\rho\operatorname{sen}\theta + \frac{H_1}{\rho}\operatorname{sen}\theta + E_2\rho^2\cos 2\theta + \frac{F_2}{\rho^2}\cos 2\theta + G_2\rho^2\operatorname{sen}2\theta + \frac{H_2}{\rho^2}\operatorname{sen}2\theta + \cdots$$

Em R_b, temos $\mathbb{V}(R_b, \theta, z) = \mathbb{V}_b \cos 2\theta$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_b \cos 2\theta = E_0 + F_0 \ln \frac{R_b}{R_b} + E_1 R_b \cos\theta + \frac{F_1}{R_b}\cos\theta \\ + G_1 R_b \operatorname{sen}\theta + \frac{H_1}{R_b}\operatorname{sen}\theta + E_2 R_b^2 \cos 2\theta + \frac{F_2}{R_b^2}\cos 2\theta \\ + G_2 R_b^2 \operatorname{sen} 2\theta + \frac{H_2}{R_b^2}\operatorname{sen} 2\theta + \cdots\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_b \cos 2\theta = E_0 + \left(E_1 R_b + \frac{F_1}{R_b}\right)\cos\theta + \left(G_1 R_b + \frac{H_1}{R_b}\right)\operatorname{sen}\theta \\ + \left(E_2 R_b^2 + \frac{F_2}{R_b^2}\right)\cos 2\theta + \left(G_2 R_b^2 + \frac{H_2}{R_b^2}\right)\operatorname{sen} 2\theta + \cdots\end{aligned}$$

Como resposta a esta equação, temos

$$\begin{aligned}E_0 &= 0 \\ \mathbb{V}_b &= E_2 R_b^2 + \frac{F_2}{R_b^2} \\ E_\nu R_b^\nu + \frac{F_\nu}{R_b^\nu} &= 0, \qquad \forall \nu \geq 1, \nu \neq 2 \\ G_\nu R_b^\nu + \frac{H_\nu}{R_b^\nu} &= 0, \qquad \forall \nu \geq 1\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}E_0 &= 0 \\ E_2 &= \frac{\mathbb{V}_b}{R_b^2} - \frac{F_2}{R_b^4} \\ E_\nu &= -\frac{F_\nu}{R_b^{2\nu}}, \qquad \forall \nu \geq 1, \nu \neq 2 \\ G_\nu &= -\frac{H_\nu}{R_b^{2\nu}}, \qquad \forall \nu \geq 1\end{aligned}$$

Voltando à equação do potencial, achamos

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = F_0 \ln\frac{\rho}{R_b} - \frac{F_1}{R_b^2}\rho\cos\theta + \frac{F_1}{\rho}\cos\theta - \frac{H_1}{R_b^2}\rho\,\text{sen}\,\theta + \frac{H_1}{\rho}\,\text{sen}\,\theta + \left(\frac{\mathbb{V}_b}{R_b^2} - \frac{F_2}{R_b^4}\right)\rho^2\cos 2\theta + \frac{F_2}{\rho^2}\cos 2\theta - \frac{H_2}{R_b^4}\rho^2\,\text{sen}\,2\theta + \frac{H_2}{\rho^2}\,\text{sen}\,2\theta + \cdots$$

ou

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = F_0 \ln\frac{\rho}{R_b} + F_1\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{R_b^2}\right)\cos\theta + H_1\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{R_b^2}\right)\text{sen}\,\theta + \left[\frac{\mathbb{V}_b\rho^2}{R_b^2} + F_2\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{R_b^4}\right)\right]\cos 2\theta + H_2\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{R_b^4}\right)\text{sen}\,2\theta + \cdots$$

Em $\rho = R_a$, temos a segunda condição de contorno, ou seja, $\mathbb{V}(R_a,\theta,z) = \mathbb{V}_a$. Assim, encontramos

$$\mathbb{V}_a = F_0 \ln\frac{R_a}{R_b} + F_1\left(\frac{1}{R_a} - \frac{R_a}{R_b^2}\right)\cos\theta + H_1\left(\frac{1}{R_a} - \frac{R_a}{R_b^2}\right)\text{sen}\,\theta + \left[\frac{\mathbb{V}_b R_a^2}{R_b^2} + F_2\left(\frac{1}{R_a^2} - \frac{R_a^2}{R_b^4}\right)\right]\cos 2\theta + H_2\left(\frac{1}{R_a^2} - \frac{R_a^2}{R_b^4}\right)\text{sen}\,2\theta + \cdots$$

Para que esta expressão seja verdadeira para qualquer valor de θ, é preciso que todos os termos que apresentam fatores angulares se anulem. Entretanto, os fatores entre parênteses nunca podem se anular, pois $R_a \neq R_b$, o que implica que os coeficientes F_ν e H_ν devem ser todos nulos, exceto F_0 e F_2, já que, neste último caso, o termo entre colchetes pode se anular. Desse modo, obtemos as expressões

$$\mathbb{V}_a = F_0 \ln\frac{R_a}{R_b}$$

$$F_0 = \frac{\mathbb{V}_a}{\ln\frac{R_a}{R_b}}$$

e

$$\frac{\mathbb{V}_b R_a^2}{R_b^2} + F_2\left(\frac{1}{R_a^2} - \frac{R_a^2}{R_b^4}\right) = 0$$

$$F_2\frac{R_b^4 - R_a^4}{R_a^2 R_b^4} = -\frac{\mathbb{V}_b R_a^2}{R_b^2}$$

$$F_2 = -\frac{\mathbb{V}_b R_a^4 R_b^2}{(R_b^4 - R_a^4)}$$

Voltando agora ao potencial, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) &= \frac{\mathbb{V}_a}{\ln\frac{R_a}{R_b}}\ln\frac{\rho}{R_b} + \left[\frac{\mathbb{V}_b\rho^2}{R_b^2} - \frac{\mathbb{V}_b R_a^4 R_b^2}{(R_b^4 - R_a^4)}\frac{R_b^4 - \rho^4}{\rho^2 R_b^4}\right]\cos 2\theta \\
&= \frac{\mathbb{V}_a}{\ln\frac{R_a}{R_b}}\ln\frac{\rho}{R_b} + \frac{\mathbb{V}_b}{R_b^2}\left[\rho^2 - \frac{R_a^4(R_b^4 - \rho^4)}{(R_b^4 - R_a^4)\rho^2}\right]\cos 2\theta \\
&= \frac{\mathbb{V}_a}{\ln\frac{R_a}{R_b}}\ln\frac{\rho}{R_b} + \frac{\mathbb{V}_b}{R_b^2}\frac{(R_b^4 - R_a^4)\rho^4 - R_a^4(R_b^4 - \rho^4)}{(R_b^4 - R_a^4)\rho^2}\cos 2\theta \\
&= \frac{\mathbb{V}_a}{\ln\frac{R_a}{R_b}}\ln\frac{\rho}{R_b} + \frac{\mathbb{V}_b}{R_b^2}\frac{R_b^4\rho^4 - R_a^4\rho^4 - R_a^4 R_b^4 + R_a^4\rho^4}{(R_b^4 - R_a^4)\rho^2}\cos 2\theta \\
&= \frac{\mathbb{V}_a}{\ln\frac{R_a}{R_b}}\ln\frac{\rho}{R_b} + \frac{\mathbb{V}_b}{R_b^2}\frac{R_b^4\rho^4 - R_a^4 R_b^4}{(R_b^4 - R_a^4)\rho^2}\cos 2\theta \\
\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) &= \frac{\mathbb{V}_a}{\ln\frac{R_a}{R_b}}\ln\frac{\rho}{R_b} + \frac{\mathbb{V}_b}{R_b^2}\frac{R_b^4(\rho^4 - R_a^4)}{(R_b^4 - R_a^4)\rho^2}\cos 2\theta
\end{aligned}$$

ou

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = \frac{\mathbb{V}_a}{\ln\frac{R_a}{R_b}}\ln\frac{\rho}{R_b} + \frac{\mathbb{V}_b}{\rho^2}\frac{R_b^2(\rho^4 - R_a^4)}{R_b^4 - R_a^4}\cos 2\theta, \qquad R_a \le \rho \le R_b$$

que é o potencial elétrico na região entre os dois cilindros.

Observe que a condição de contorno em $\rho = R_b$, dada por $\mathbb{V}(R_b,\theta,z) = \mathbb{V}_b\cos 2\theta$, impõe que, na solução do potencial elétrico, não pode aparecer nenhuma outra função de θ além de um múltiplo de $\cos 2\theta$ ou uma função constante em relação a θ. Isso porque $\cos 2\theta$ é um vetor da base do espaço vetorial definido pelas funções $\cos n\theta$ e $\operatorname{sen} n\theta$, e nós demonstramos que essas funções são ortogonais

entre si, quando tratamos da série de Fourier, na seção 2.2. Sendo assim, o potencial tem apenas duas "componentes". Uma está na "direção" definida pela função $\cos 2\theta$, e a outra está na "direção" definida pela função constante em relação a θ. As outras componentes são todas nulas, o que anula os coeficientes F_ν e H_ν, exceto F_2 e F_0. De fato, antes mesmo do desenvolvimento matemático, poderíamos ter explorado fisicamente um pouco mais o problema, fazendo estas considerações logo de início, o que aceleraria a resolução. Em todos os exemplos vistos no livro até aqui, as funções associadas às condições de contorno de um dado problema definem subespaços vetoriais, sejam de funções trigonométricas, sejam dos polinômios de Legendre, ou ainda, dos harmônicos esféricos, que foram as principais funções estudadas até agora. Assim, cada problema tem um subespaço vetorial associado e, em todos os casos, a solução para o potencial elétrico do problema envolve apenas combinações lineares das funções da base desse subespaço vetorial definido pelas condições de contorno. Todas as outras funções que não pertencem à base ou que não podem ser escritas como combinações lineares das funções da base ficam automaticamente excluídas da solução. Por exemplo, digamos que uma das condições de contorno fosse dada por um múltiplo da função $\cos^2\theta$. Como $\cos^2\theta = \cos 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta$, no potencial elétrico só podem aparecer, além da função constante, as funções $\cos 2\theta$ e $\operatorname{sen} 2\theta$. Isso suscita a seguinte questão: e se existir uma outra condição de contorno dada em termos de $\operatorname{sen}\theta$? Neste caso, deveria também aparecer esta função na solução do potencial, o que discorda do que foi estabelecido há pouco. Para responder a esta questão, lembrando que os potenciais elétricos podem ser superpostos, devemos considerar o problema em que estamos interessados como sendo constituído pela superposição de dois idênticos em todos os sentidos, exceto com relação às condições de contorno. Em um deles, uma das condições de contorno, digamos a segunda, é considerada nula, enquanto a outra não muda. No segundo, a situação se inverte. A condição de contorno que foi anulada não é mais nula, mas a outra é agora nula. O resultado final é a soma das duas soluções obtidas e, novamente, só aparecem funções associadas às condições de contorno, que são $\operatorname{sen}\theta$, $\operatorname{sen} 2\theta$ e $\cos 2\theta$.

Estas verificações são importantes, não só em problemas de Eletromagnetismo, mas em toda a Física, principalmente em Mecânica Quântica, em que a Álgebra Linear e conceitos como espaços vetoriais são importantíssimos! Por causa disso, aconselhamos fortemente a consulta de textos de Álgebra Linear, alguns dos quais constam nas referências bibliográficas, para o esclarecimento de eventuais dúvidas ou mesmo para uma revisão dos conceitos desta importante parte da Matemática.

Para obter o potencial elétrico para a região $\rho > R_b$, partimos da solução geral 6.111 e lembramos que θ e z são ilimitados. Além disso, pela discussão anterior, os coeficientes que multiplicam as funções de θ que não sejam a função $\cos 2\theta$ ou a função constante são todos nulos, por causa da condição de contorno em $\rho = R_b$. Quando $\rho \to \infty$, o único termo que pode divergir é o que tem o fator logarítmico, e assim, $E_2 = 0$. Com todas estas considerações,

o potencial fica

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = E_0 + F_0 \ln\frac{\rho}{R_b} + \frac{F_2}{\rho^2}\cos 2\theta$$

Em $\rho = R_b$, temos

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(R_b,\theta,z) = E_0 + F_0 \ln\frac{R_b}{R_b} + \frac{F_2}{R_b^2}\cos 2\theta$$

$$\mathbb{V}_b \cos 2\theta = E_0 + \frac{F_2}{R_b^2}\cos 2\theta$$

Desta expressão, obtemos

$$E_0 = 0$$

$$\mathbb{V}_b = \frac{F_2}{R_b^2} \Rightarrow F_2 = \mathbb{V}_b R_b^2$$

e o potencial elétrico fora dos cilindros é

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho,\theta,z) = F_0 \ln\frac{\rho}{R_b} + \frac{\mathbb{V}_b R_b^2}{\rho^2}\cos 2\theta, \qquad \rho \geq R_b$$

Este exemplo encerra a discussão acerca do caso $k = 0$. Note que, em todos os exemplos vistos, z era ilimitado, e o potencial elétrico não dependia desta coordenada.

6.6.2 Solução da Equação de Laplace em Coordenadas Cilíndricas quando $k \neq 0$

Em todos os exemplos vistos na subseção anterior, a coordenada z era ilimitada, já que os cilindros considerados eram todos infinitos. Como conseqüência, nenhuma condição de contorno podia depender dessa coordenada. Se, no entanto, as regiões cilíndricas que estamos estudando são finitas, então, no cálculo do potencial dentro delas, devemos ter em mente que z agora é limitado pelas superfícies que formam essas regiões. Deste fato decorre que as condições de contorno agora podem depender de z. Além disso, como veremos ao resolver as equações 6.101 e 6.102, o fato de z ser limitado permite que a constante de separação k possa assumir outros valores que não apenas $k = 0$, o

que torna a resolução desses problemas mais complicada. Vamos então iniciar a resolução das equações 6.101 e 6.102, que são reproduzidas abaixo.

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-k^2$$

e

$$\frac{d^2Z}{dz^2}-k^2Z=0$$

Esta última equação pode ser facilmente resolvida, já que ela é uma equação diferencial com coeficientes constantes. Sua equação característica é

$$m^2-k^2=0\Rightarrow m=\pm k$$

Veja que as raízes são reais. Elas formam as soluções

$$m=k\Rightarrow Z=Ae^{kz}$$
$$m=-k\Rightarrow Z=Be^{-kz}$$

que, juntas, produzem a solução geral

$$Z_k(z)=A_ke^{kz}+B_ke^{-kz} \tag{6.118}$$

Agora, perceba o seguinte: quando z é limitado, nenhuma das funções exponenciais da solução acima diverge. Quando z é parcialmente limitado, digamos, por uma superfície em $z=a$ e outra em $z=\infty$, então a exponencial e^{kz} diverge em $z\to\infty$, se $k>0$. Quando $k<0$, é a outra exponencial, e^{-kz}, que diverge. Na solução da equação de Laplace para o potencial elétrico não podem existir divergências no potencial, já que estamos numa região sem cargas [11]. Isso significa que a constante que multiplica a exponencial deve ser anulada, para que o potencial fique finito. Assim, se $k>0$, devemos ter $A_k=0$, e se $k<0$, $B_k=0$. Se a região semi-infinita é limitada por $z=b$ e $z=-\infty$, então a discussão anterior deve ser invertida. A exponencial e^{-kz} diverge para $z\to-\infty$ quando $k>0$, e assim, $B_k=0$. Se $k<0$, o que diverge quando $z\to-\infty$ é a outra exponencial, e^{kz}, e neste caso, $A_k=0$.

---

[11] Excetuando a divergência logarítmica em $\ln\rho$, quando $\rho\to\infty$, por causa do potencial elétrico de um fio infinito.

Vamos considerar agora uma região ilimitada em z, estendendo-se de $-\infty$ até ∞. Se $k > 0$, quando $z \to \infty$ a exponencial e^{kz} diverge, de modo que devemos ter $A_k = 0$, restando como solução $Z_k = B_k e^{-kz}$. Entretanto, quando $z \to -\infty$, esta solução diverge, e devemos fazer também $B_k = 0$. Assim, a solução para Z torna-se $Z_k(z) = 0$, o que faz com que o potencial elétrico seja também nulo, já que ele é dado por $\mathbb{V} = R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)$. Esta solução é a solução trivial da equação de Laplace, mas ela não tem grande interesse físico, pois não acrescenta nada relevante ao problema. Quando $k < 0$, a situação é a mesma, e ambas as constantes A_k e B_k devem ser anuladas. Portanto, para encontrar uma solução não-nula para o potencial elétrico numa região em que z é ilimitado, devemos considerar apenas o caso $k = 0$, que é o único relevante e que já foi estudado na seção anterior. Assim, vamos supor que estamos numa região em que z não é totalmente ilimitado e que k possa ter um valor diferente de zero. Nesta região, devemos agora resolver a outra equação diferencial, para obter as funções $R(\rho)$ e $\Theta(\theta)$. A equação

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -k^2$$

pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\rho^2\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -k^2 - \frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)$$

Multiplicando-a por ρ^2, obtemos

$$\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -\rho^2 k^2 - \frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)$$

Esta equação está separada, e o lado esquerdo depende apenas de θ, enquanto o direito é função apenas de ρ. Ambos são iguais a uma constante, que consideraremos como sendo $-\nu^2$. Assim, temos duas equações,

$$\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -\nu^2$$

e

$$-\rho^2 k^2 - \frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) = -\nu^2$$

A equação para Θ é bastante simples de resolver. Vamos reescrevê-la como

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \nu^2\Theta = 0 \tag{6.119}$$

que é uma equação com coeficientes constantes cuja equação característica,

$$m^2 + \nu^2 = 0 \Rightarrow m = \pm i\nu$$

gera as soluções

$$m = i\nu \Rightarrow \Theta(\theta) = Ce^{i\nu\theta}$$
$$m = -i\nu \Rightarrow \Theta(\theta) = De^{-i\nu\theta}$$

que formam a solução geral

$$\Theta_\nu(\theta) = C_\nu e^{i\nu\theta} + D_\nu e^{-i\nu\theta}$$

Note que, por causa da unicidade do potencial elétrico em relação ao ângulo θ, quando $\theta \in [0, 2\pi]$, ν deve ser um inteiro. Se isso não ocorrer, ν não precisa ser inteiro. Utilizando a relação de Euler 6.6, podemos reescrever a solução para Θ como

$$\Theta_\nu(\theta) = C_\nu \cos \nu\theta + D_\nu \operatorname{sen} \nu\theta \tag{6.120}$$

Quando $\nu = 0$, a solução para Θ é a equação 6.106. Vejamos agora a equação diferencial para R, que podemos escrever como

$$\rho^2 k^2 + \frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) - \nu^2 = 0$$

Multiplicando-a por R e efetuando as derivadas,

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho} + \left(\rho^2k^2 - \nu^2\right)R = 0$$

Vamos dividi-la por ρ^2, isto é,

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0$$

Agora, definimos a variável $\varrho = k\rho$ e escrevemos a equação diferencial nesta variável. Temos que calcular

$$\frac{d}{d\rho} = \frac{d\varrho}{d\rho}\frac{d}{d\varrho}$$
$$\frac{d}{d\rho} = k\frac{d}{d\varrho}$$

e

$$\frac{d^2}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{d}{d\rho}\right)$$
$$= \left(k\frac{d}{d\varrho}\right)\left(k\frac{d}{d\varrho}\right)$$
$$\frac{d^2}{d\rho^2} = k^2\frac{d^2}{d\varrho^2}$$

Substituindo estas expressões na equação diferencial, temos

$$k^2\frac{d^2R}{d\varrho^2} + \frac{k^2}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho} + \left(k^2 - \frac{k^2\nu^2}{\varrho^2}\right)R = 0$$

ou

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\varrho^2}\right)R = 0 \qquad (6.121)$$

Esta equação diferencial é conhecida como *equação de Bessel*, e suas soluções são as *funções de Bessel*, que podem ser do primeiro tipo, ou $J_\nu(\varrho)$, de segundo tipo, ou $N_\nu(\varrho)$, também chamadas de *funções de Neumann*, ou ainda, de terceiro tipo, ou $H_\nu^1(\varrho)$ e $H_\nu^2(\varrho)$, conhecidas por *funções de Hankel*. Como fizemos com a equação diferencial de Legendre, vamos utilizar as soluções da equação de Bessel, sem apresentar a resolução, que pode ser vista, em detalhes, no apêndice D. Sugerimos a consulta desse apêndice para verificar os detalhes envolvendo a resolução desta importante equação diferencial.

As funções de Bessel do primeiro tipo $J_\nu(\varrho)$ são expressas em termos de uma série, ou seja, utilizando a equação D.10,

$$J_\nu(\varrho) = \left(\frac{\varrho}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

que é válida para qualquer ν. Nesta expressão, $\Gamma(n)$ representa a função Gama, que é discutida no apêndice D. Também neste apêndice podemos ver que a solução geral para a função R é dada por

$$R(\varrho) = E_\nu J_\nu(\varrho) + F_\nu J_{-\nu}(\varrho)$$

ou, voltando para ρ,

$$R(\rho) = E_\nu J_\nu(k\rho) + F_\nu J_{-\nu}(k\rho) \tag{6.122}$$

desde que, e isso é muito importante, ν não seja um número inteiro. Se ν for um número inteiro m, as funções de Bessel J_m e J_{-m} não são mais linearmente independentes, já que elas estão relacionadas pela equação D.20,

$$J_{-m} = (-1)^m J_m$$

e portanto, é preciso utilizar as funções de Bessel de segundo tipo $N_\nu(\varrho)$, ou funções de Neumann, para formar a solução geral. As funções de Neumann são obtidas das funções de Bessel J_ν através da equação D.21,

$$N_\nu(\varrho) = \frac{J_\nu(\varrho)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(\varrho)}{\operatorname{sen}\nu\pi}$$

válida para qualquer ν, inclusive ν inteiro (veja o apêndice D). Mediante a utilização das funções de Neumann, a solução para a parte em ρ do potencial fica

$$R(\varrho) = E_\nu J_\nu(\varrho) + F_\nu N_\nu(\varrho)$$

ou, em termos de ρ,

$$R(\rho) = E_\nu J_\nu(k\rho) + F_\nu N_\nu(k\rho) \tag{6.123}$$

que é correta para qualquer valor de ν, sem exceção. Uma observação importante é que, devido à forma explícita de N_ν quando $\nu = m$ é um inteiro, dada pela expressão D.22, a função de Neumann diverge em $\varrho \to 0$, o que pode fazer com que seja necessário zerar o coeficiente F_m que multiplica N_m, para que o potencial seja finito. Além disso, as funções de Bessel podem ser utilizadas para expandir uma função $f(\rho)$, definida no intervalo $\rho \in [0, a]$, em uma série, conhecida como *série de Fourier-Bessel*, dada pela equação D.26,

$$f(\rho) = \sum_{p=1}^{\infty} A_{\nu,p} J_\nu\left(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a}\right)$$

onde os números $x_{\nu,p}$ são as raízes da função de Bessel J_ν, ou seja,

$$J_\nu(x_{\nu,p}) = 0, \qquad p = 1, 2, 3, \ldots$$

Cada uma das funções de Bessel possui infinitas raízes. Os coeficientes $A_{\nu,p}$ são obtidos através da expressão D.27, ou seja,

$$A_{\nu,p} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu,p})} \int_0^a f(\rho) J_\nu\Big(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a}\Big)\, \rho\, d\rho$$

Para formar a solução geral do potencial elétrico em coordenadas cilíndricas quando $k \neq 0$, reunimos as equações 6.118, 6.120 e 6.123, e então,

$$\mathbb{V}_{k,\nu}(\rho,\theta,z) = \\ \big[E_\nu J_\nu(k\rho) + F_\nu N_\nu(k\rho)\big]\big(C_\nu \cos\nu\theta + D_\nu \,\mathrm{sen}\,\nu\theta\big)\big(A_k e^{kz} + B_k e^{-kz}\big)$$

A solução geral é formada pela soma de todas as soluções possíveis, logo,

$$\mathbb{V}(\rho,\theta,z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k\neq 0} \big[E_\nu J_\nu(k\rho) + F_\nu N_\nu(k\rho)\big] \\ \times \big(C_\nu \cos\nu\theta + D_\nu \,\mathrm{sen}\,\nu\theta\big)\big(A_k e^{kz} + B_k e^{-kz}\big) \quad (6.124)$$

se k for um parâmetro discreto. Se for contínuo, a soma torna-se uma integral, ou seja,

$$\mathbb{V}(\rho,\theta,z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big\{ \big(C_\nu \cos\nu\theta + D_\nu \,\mathrm{sen}\,\nu\theta\big) \\ \times \int \Big\{ \big[E_\nu J_\nu(k\rho) + F_\nu N_\nu(k\rho)\big]\big(A(k) e^{kz} + B(k) e^{-kz}\big)\Big\}\, dk \Big\} \quad (6.125)$$

Das expressões acima, é fácil perceber que os problemas envolvendo as coordenadas cilíndricas quando $k \neq 0$ são os mais complicados do ponto de vista matemático. Vejamos alguns deles.

Exemplo 6.17. *Vamos considerar um cilindro, de altura L e raio R, cujo eixo é paralelo ao eixo z, como mostra a figura 6.9. Queremos obter o potencial elétrico dentro do cilindro.*

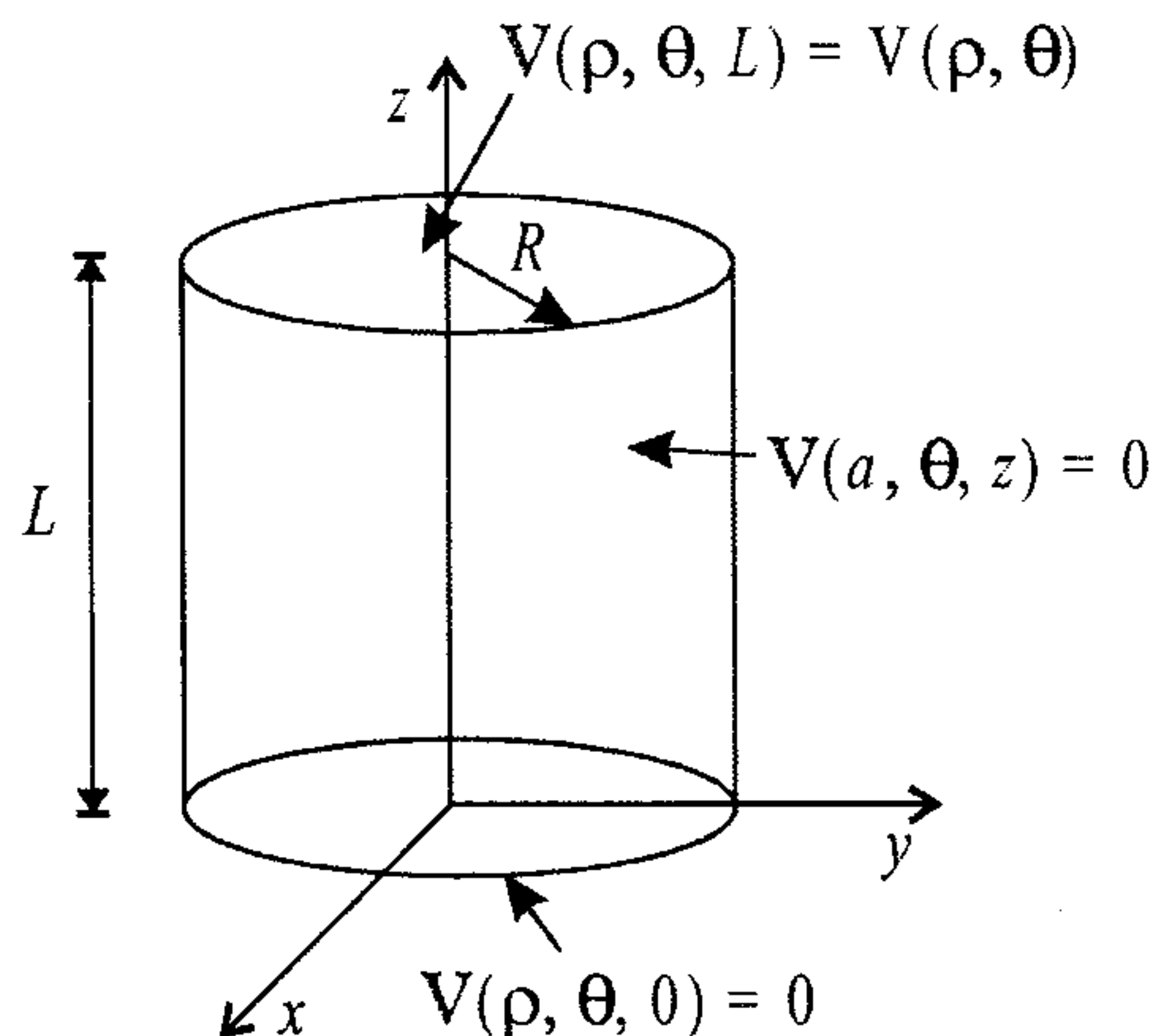



Figura 6.9: Um cilindro finito de altura L e raio R.

Este cilindro está sujeito às seguintes condições de contorno: na base em $z = 0$, o potencial é nulo, bem como na superfície lateral. Na outra base, em $z = L$, temos um potencial $\mathbb{V}(\rho, \theta, L) = V(\rho, \theta)$. Para encontrar o potencial elétrico, partimos da expressão geral 6.124,

$$\mathbb{V}(\rho, \theta, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k \neq 0} \left[E_\nu J_\nu(k\rho) + F_\nu N_\nu(k\rho)\right] \times \left(C_\nu \cos \nu\theta + D_\nu \operatorname{sen} \nu\theta\right)\left(A_k e^{kz} + B_k e^{-kz}\right)$$

A origem faz parte do domínio da solução, e assim, como a função de Neumann diverge em $\rho \to 0$, os coeficientes F_ν devem ser tais que $F_\nu = 0, \forall \nu$. Além disso, como θ é ilimitado, para que o potencial seja unívoco, ν deve ser um inteiro m. Assim, temos

$$\mathbb{V}(\rho, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k \neq 0} J_m(k\rho)\left(C_m \cos m\theta + D_m \operatorname{sen} m\theta\right)\left(A_k e^{kz} + B_k e^{-kz}\right)$$

Em $z = 0$, o potencial é nulo, logo,

$$\mathbb{V}(\rho, \theta, 0) = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k \neq 0} J_m(k\rho)\left(C_m \cos m\theta + D_m \operatorname{sen} m\theta\right)\left(A_k + B_k\right) = 0$$

Para que esta expressão seja válida para qualquer valor de ρ e θ, devemos ter

$$B_k = -A_k$$

e então,

$$\mathbb{V}(\rho,\theta,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k\neq 0} J_m(k\rho)\big(C_m \cos m\theta + D_m \operatorname{sen} m\theta\big)\big(A_k e^{kz} - A_k e^{-kz}\big)$$

ou, lembrando que

$$\operatorname{senh}\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$

e incorporando as constantes em apenas duas,

$$\mathbb{V}(\rho,\theta,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k\neq 0} J_m(k\rho)\big(C_{m,k} \cos m\theta + D_{m,k} \operatorname{sen} m\theta\big) \operatorname{senh} kz$$

O potencial é nulo quando $\rho = R$, e portanto,

$$\mathbb{V}(R,\theta,z) = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k\neq 0} J_m(kR)\big(C_{m,k} \cos m\theta + D_{m,k} \operatorname{sen} m\theta\big) \operatorname{senh} kz = 0$$

Para que esta expressão esteja correta para qualquer valor de θ e z, é necessário que

$$J_m(kR) = 0$$

ou seja, k deve assumir os valores

$$k_{m,p} = \frac{x_{m,p}}{R}, \qquad p = 1, 2, \ldots$$

onde $x_{m,p}$ são as raízes de J_m. O potencial fica

$$\mathbb{V}(\rho,\theta,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} J_m(k_{m,p}\rho)\big(C_{m,p} \cos m\theta + D_{m,p} \operatorname{sen} m\theta\big) \operatorname{senh} k_{m,p} z$$

sendo que trocamos a soma em k por uma soma em p completamente equivalente. A última condição de contorno, em $z = L$, diz que

$$\mathbb{V}(\rho, \theta, L) = V(\rho, \theta)$$

$$V(\rho, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} J_m(k_{m,p}\rho)\big(C_{m,p} \cos m\theta + D_{m,p} \operatorname{sen} m\theta\big) \operatorname{senh} k_{m,p}L$$

Esta expressão é uma expansão de $V(\rho, \theta)$ em uma série de Fourier em θ combinada com uma série de Fourier-Bessel em ρ. Para obtermos os coeficientes $C_{m,p}$, vamos multiplicá-la por $\rho J_{m'}(k_{m',p'}\rho) \cos m'\theta$ e integrá-la sobre os intervalos $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \rho \leq R$, ou seja,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R V(\rho, \theta) \rho J_{m'}(k_{m',p'}\rho) \cos m'\theta \, d\rho d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} J_m(k_{m,p}\rho)\big(C_{m,p} \cos m\theta + D_{m,p} \operatorname{sen} m\theta\big)$$
$$\times \rho J_{m'}(k_{m',p'}\rho) \cos m'\theta \operatorname{senh} k_{m,p}L \, d\rho d\theta$$

ou, trocando os sinais de integração com os das somatórias,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R V(\rho, \theta) J_{m'}(k_{m',p'}\rho) \cos m'\theta \, \rho d\rho d\theta =$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m,p} \operatorname{senh} k_{m,p}L$$
$$\times \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho J_m(k_{m,p}\rho) J_{m'}(k_{m',p'}\rho) \cos m\theta \cos m'\theta \, d\rho d\theta$$
$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} D_{m,p} \operatorname{senh} k_{m,p}L$$
$$\times \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho J_m(k_{m,p}\rho) J_{m'}(k_{m',p'}\rho) \operatorname{sen} m\theta \cos m'\theta \, d\rho d\theta \qquad (6.126)$$

Note que invertemos a ordem em que as somatórias são feitas, o que está correto, porque os dois índices são independentes. Invertemos também a or-

dem em que as integrais são efetuadas, pelo mesmo motivo. Para realizar as integrais em θ, vamos precisar das equações 2.14,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \pi \delta_{n,m}$$

e 2.15,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx = 0, \qquad \forall n, m$$

Nestas integrais, fazemos $y = x + \pi$ e $dy = dx$. A primeira torna-se

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \int_{0}^{2\pi} \cos n(y - \pi) \cos m(y - \pi) \, dy$$

ou

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx =$$

$$\int_{0}^{2\pi} [\cos ny \overbrace{\cos n\pi}^{(-1)^n} + \operatorname{sen} ny \overbrace{\operatorname{sen} n\pi}^{0}][\cos my \overbrace{\cos m\pi}^{(-1)^m} + \operatorname{sen} my \overbrace{\operatorname{sen} m\pi}^{0}] \, dy$$

ou ainda,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \int_{0}^{2\pi} (-1)^{n+m} \cos ny \cos my \, dy$$

$$\pi \delta_{n,m} = (-1)^{n+m} \int_{0}^{2\pi} \cos ny \cos my \, dy$$

ou então,

$$\int_{0}^{2\pi} \cos ny \cos my \, dy = \frac{\pi}{(-1)^{n+m}} \delta_{n,m}$$

Como o único valor não-nulo ocorre para $n = m$, e considerando que, neste caso, teremos $(-1)^{2m} = 1$, podemos escrever

$$\int_{0}^{2\pi} \cos ny \cos my \, dy = \pi \delta_{n,m} \tag{6.127}$$

A segunda integral, com a mesma substituição, fica

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx = \int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen} n(y-\pi) \cos m(y-\pi) \, dy$$

ou

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx =$$

$$\int_{0}^{2\pi} [\operatorname{sen} ny \overbrace{\cos n\pi}^{(-1)^n} - \overbrace{\operatorname{sen} n\pi}^{0} \cos ny][\cos my \overbrace{\cos m\pi}^{(-1)^m} + \operatorname{sen} my \overbrace{\operatorname{sen} m\pi}^{0}] \, dy$$

ou então,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx = \int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen} ny (-1)^n \cos my (-1)^m \, dy$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx = (-1)^{n+m} \int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen} ny \cos my \, dy$$

$$0 = (-1)^{n+m} \int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen} ny \cos my \, dy$$

ou seja,

$$\int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen} ny \cos my \, dy = 0 \tag{6.128}$$

De posse destas expressões, a equação 6.126 fica, se m e m' não são ambos nulos,

$$\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{R} V(\rho,\theta) J_{m'}(k_{m',p'}\rho) \cos m'\theta \, \rho d\rho d\theta =$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m,p} \operatorname{senh} k_{m,p} L \int_{0}^{R} \pi \delta_{m,m'} \rho J_m(k_{m,p}\rho) J_{m'}(k_{m',p'}\rho) \, d\rho$$

ou

$$\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{R} V(\rho,\theta) J_{m'}(k_{m',p'}\rho) \cos m'\theta \, \rho d\rho d\theta =$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m,p} \operatorname{senh} k_{m,p} L \, \pi \delta_{m,m'} \int_{0}^{R} \rho J_m(k_{m,p}\rho) J_{m'}(k_{m',p'}\rho) \, d\rho$$

Ao efetuarmos a soma em m, resta apenas o termo em que $m = m'$, isto é,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R V(\rho,\theta) J_{m'}(k_{m',p'}\rho)\cos m'\theta\,\rho d\rho d\theta = \pi\sum_{p=1}^{\infty} C_{m',p}\,\mathrm{senh}\,k_{m',p}L\int_0^R \rho J_{m'}(k_{m',p}\rho) J_{m'}(k_{m',p'}\rho)\,d\rho$$

Agora, utilizamos a condição de ortogonalidade das funções de Bessel, expressa pela equação D.33, que é

$$\int_0^a \rho J_\nu(k_{\nu,p}\rho) J_\nu(k_{\nu,p'}\rho)\,d\rho = \frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}(x_{\nu,p})\right]^2 \delta_{p,p'}$$

para realizar a integral em ρ, que fica

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R V(\rho,\theta) J_{m'}(k_{m',p'}\rho)\cos m'\theta\,\rho d\rho d\theta = \pi\sum_{p=1}^{\infty} C_{m',p}\,\mathrm{senh}\,k_{m',p}L\frac{R^2}{2}J^2_{m'+1}(x_{m',p})\delta_{p,p'}$$

ou, como o único termo que sobrevive é aquele em que $p = p'$,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R V(\rho,\theta) J_{m'}(k_{m',p'}\rho)\cos m'\theta\,\rho d\rho d\theta = \frac{\pi R^2}{2} C_{m',p'}\,\mathrm{senh}\,k_{m',p'}L\,J^2_{m'+1}(x_{m',p'})$$

e então, o coeficiente $C_{m,p}$ vale, ao eliminarmos as linhas dos termos do lado direito, que são desnecessárias,

$$C_{m,p} = \frac{2\,\mathrm{cossech}\,k_{m,p}L}{\pi R^2 J^2_{m+1}(x_{m,p})}\int_0^{2\pi}\int_0^R V(\rho,\theta) J_{m'}(k_{m',p'}\rho)\cos m'\theta\,\rho d\rho d\theta \quad (6.129)$$

Quando $m = m' = 0$, a expressão 6.126 torna-se

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R V(\rho,\theta)J_0(k_{0,p'}\rho)\,\rho d\rho d\theta =$$
$$\sum_{p=1}^{\infty} C_{0,p}\,\mathrm{senh}\,k_{0,p}L\int_0^R\int_0^{2\pi}\rho J_0(k_{0,p}\rho)J_0(k_{0,p'}\rho)\,d\rho d\theta$$

A integral em θ fornece 2π, e assim,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R V(\rho,\theta)J_0(k_{0,p'}\rho)\,\rho d\rho d\theta =$$
$$2\pi\sum_{p=1}^{\infty} C_{0,p}\,\mathrm{senh}\,k_{0,p}L\int_0^R \rho J_0(k_{0,p}\rho)J_0(k_{0,p'}\rho)\,d\rho$$

A ortogonalidade das funções de Bessel nos fornece, para a integral,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R V(\rho,\theta)J_0(k_{0,p'}\rho)\,\rho d\rho d\theta = 2\pi\sum_{p=1}^{\infty} C_{0,p}\,\mathrm{senh}\,k_{0,p}L\,\frac{R^2}{2}J_1^2(x_{0,p})\delta_{p,p'}$$

e portanto, como o termo que sobrevive é aquele em que $p = p'$, achamos

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R V(\rho,\theta)J_0(k_{0,p'}\rho)\,\rho d\rho d\theta = \pi R^2 C_{0,p'}\,\mathrm{senh}\,k_{0,p'}L\;J_1^2(x_{0,p'})$$

de modo que o coeficiente $C_{0,p}$ fica

$$C_{0,p} = \frac{\mathrm{cossech}\,k_{0,p}L}{\pi R^2 J_1^2(x_{0,p})}\int_0^{2\pi}\int_0^R V(\rho,\theta)J_0(k_{0,p'}\rho)\,\rho d\rho d\theta \qquad (6.130)$$

Após encontrar os coeficientes $C_{m,p}$, devemos obter os coeficientes $D_{m,p}$. Neste caso, multiplicamos a expressão

$$V(\rho,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} J_m(k_{m,p}\rho)\big(C_{m,p}\cos m\theta + D_{m,p}\,\mathrm{sen}\,m\theta\big)\,\mathrm{senh}\,k_{m,p}L$$

por $\rho J_{m'}(k_{m',p'}) \operatorname{sen} m'\theta$ e a integramos nos intervalos $[0, 2\pi]$ para θ e $[0, R]$ para ρ, ou seja,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R V(\rho,\theta)\rho J_{m'}(k_{m',p'}) \operatorname{sen} m'\theta\, d\rho d\theta =$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^R \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} J_m(k_{m,p}\rho)\big(C_{m,p}\cos m\theta + D_{m,p}\operatorname{sen} m\theta\big)$$
$$\times\, \rho J_{m'}(k_{m',p'}) \operatorname{sen} m'\theta \operatorname{senh} k_{m,p}L\, d\rho d\theta$$

Trocando a ordem dos sinais de integração com os de somatória, e invertendo a ordem em que as somas são feitas, bem como a ordem em que as integrais são feitas, obtemos

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R V(\rho,\theta)\rho J_{m'}(k_{m',p'}) \operatorname{sen} m'\theta\, d\rho d\theta =$$
$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{m,p} \operatorname{senh} k_{m,p}L$$
$$\times \int_0^R\int_0^{2\pi} \rho J_m(k_{m,p}\rho) J_{m'}(k_{m',p'}) \cos m\theta \operatorname{sen} m'\theta d\rho d\theta$$
$$+\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} D_{m,p} \operatorname{senh} k_{m,p}L$$
$$\times \int_0^R\int_0^{2\pi} \rho J_m(k_{m,p}\rho) J_{m'}(k_{m',p'}) \operatorname{sen} m\theta \operatorname{sen} m'\theta d\rho d\theta$$

Para o primeiro termo, temos que a integral do produto de seno por cosseno é nulo, como mostra a equação 6.128. Sendo assim, este fator é nulo identicamente. Para o outro termo, precisamos utilizar a integral do produto de senos dada pela expressão 2.18,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, dx = \pi\delta_{m,n}$$

Essa expressão pode ser reescrita, se chamarmos $y = x + \pi$ e $dy = dx$. Assim, obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, dx = \int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen} n(y-\pi) \operatorname{sen} m(y-\pi) \, dy$$

ou

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, dx =$$

$$\int_{0}^{2\pi} (\operatorname{sen} ny \overbrace{\cos n\pi}^{(-1)^n} - \overbrace{\operatorname{sen} n\pi}^{0} \cos ny)(\operatorname{sen} my \overbrace{\cos m\pi}^{(-1)^m} - \overbrace{\operatorname{sen} n\pi}^{0} \cos my) \, dy$$

ou ainda,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, dx = \int_{0}^{2\pi} (-1)^{m+n} \operatorname{sen} ny \operatorname{sen} my \, dy$$

$$\pi\delta_{m,n} = (-1)^{m+n} \int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen} ny \operatorname{sen} my \, dy$$

Como o único valor não-nulo dado pela expressão acima ocorre quando $n = m$, e considerando que, neste caso, o fator $(-1)^{m+n}$ vale 1, podemos escrever

$$\int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen} ny \operatorname{sen} my \, dy = \pi\delta_{m,n}$$

e então, voltando à integral inicial, temos

$$\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{R} V(\rho,\theta)\rho J_{m'}(k_{m',p'}) \operatorname{sen} m'\theta \, d\rho d\theta =$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} D_{m,p} \operatorname{senh} k_{m,p}L \int_{0}^{R} \pi\delta_{m,m'} \rho J_m(k_{m,p}\rho) J_{m'}(k_{m',p'}) d\rho$$

ou

$$\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{R} V(\rho,\theta)\rho J_{m'}(k_{m',p'}) \operatorname{sen} m'\theta \, d\rho d\theta =$$

$$\pi \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} D_{m,p} \operatorname{senh} k_{m,p}L \, \delta_{m,m'} \int_{0}^{R} \rho J_m(k_{m,p}\rho) J_{m'}(k_{m',p'}) d\rho$$

Ao realizarmos a soma sobre m, o único termo não-nulo é aquele em que $m = m'$. O resultado é

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R V(\rho,\theta)\rho J_{m'}(k_{m',p'})\,\mathrm{sen}\, m'\theta\, d\rho d\theta = \pi\sum_{p=1}^{\infty} D_{m',p}\,\mathrm{senh}\, k_{m',p}L\int_0^R \rho J_{m'}(k_{m',p}\rho)J_{m'}(k_{m',p'})d\rho$$

Agora, utilizamos a condição de ortogonalidade das funções de Bessel D.33, e então, a integral fica

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R V(\rho,\theta)\rho J_{m'}(k_{m',p'})\,\mathrm{sen}\, m'\theta\, d\rho d\theta = \pi\sum_{p=1}^{\infty} D_{m',p}\,\mathrm{senh}\, k_{m',p}L\,\frac{R^2}{2}J^2_{m'+1}(x_{m',p})\delta_{p,p'}$$

O único termo da somatória que sobrevive é aquele que tem $p = p'$. Portanto,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R V(\rho,\theta)\rho J_{m'}(k_{m',p'})\,\mathrm{sen}\, m'\theta\, d\rho d\theta = \frac{\pi R^2}{2}D_{m',p'}\,\mathrm{senh}\, k_{m',p'}L\, J^2_{m'+1}(x_{m',p'})$$

e desse modo, os coeficientes $D_{m,p}$ são dados por

$$D_{m,p} = \frac{2\,\mathrm{cossech}\, k_{m,p}L}{\pi R^2 J^2_{m+1}(x_{m,p})}\int_0^{2\pi}\int_0^R V(\rho,\theta)\rho J_m(k_{m,p})\,\mathrm{sen}\, m\theta\, d\rho d\theta \qquad (6.131)$$

e o potencial elétrico dentro do cilindro de tamanho L é

$$\mathbb{V}(\rho,\theta,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} J_m(k_{m,p}\rho)\big(C_{m,p}\cos m\theta + D_{m,p}\,\mathrm{sen}\, m\theta\big)\,\mathrm{senh}\, k_{m,p}z$$

sendo que os coeficientes $C_{m,p}$ e $D_{m,p}$ são obtidos através das equações 6.129, 6.130 e 6.131. Observe que a expressão é matematicamente mais complicada do que a dos exemplos anteriores.

Exemplo 6.18. *Vamos considerar o mesmo cilindro do exemplo anterior, dado na figura 6.9, só que agora submetido a outras condições de contorno. Nesse cilindro, as bases estão no potencial nulo, ao passo que, sobre a superfície lateral, o potencial vale* $\mathbb{V}(a,\theta,z) = V(\theta,z)$. *Queremos achar o potencial elétrico dentro do cilindro.*

Para obter o potencial elétrico dentro do cilindro, devemos partir da equação 6.124,

$$\mathbb{V}(\rho,\theta,z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k\neq 0}\left[E_\nu J_\nu(k\rho) + F_\nu N_\nu(k\rho)\right] \times \left(C_\nu \cos\nu\theta + D_\nu \operatorname{sen}\nu\theta\right)\left(A_k e^{kz} + B_k e^{-kz}\right)$$

Como queremos o potencial dentro do cilindro, $\rho = 0$ faz parte da solução, e como não há nenhuma distribuição de cargas nesta região, a constante que multiplica a função de Neumann deve ser nula, pois esta função diverge em $\rho \to 0$. Assim, $F_\nu = 0, \forall\nu$. Além disso, θ é ilimitado e, por causa disso, ν deve ser um inteiro m. Com estas considerações, encontramos

$$\mathbb{V}(\rho,\theta,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k\neq 0} J_\nu(k\rho)\left(C_m \cos m\theta + D_m \operatorname{sen} m\theta\right)\left(A_k e^{kz} + B_k e^{-kz}\right)$$

Em $z = 0$, devemos ter $\mathbb{V} = 0$, ou seja,

$$\mathbb{V}(\rho,\theta,0) = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k\neq 0} J_\nu(k\rho)\left(C_m \cos m\theta + D_m \operatorname{sen} m\theta\right)\left(A_k + B_k\right) = 0$$

Para que a expressão acima seja válida para qualquer θ e ρ, devemos ter

$$B_k = -A_k$$

Assim, o potencial fica

$$\mathbb{V}(\rho,\theta,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k\neq 0} J_\nu(k\rho)\left(C_m \cos m\theta + D_m \operatorname{sen} m\theta\right)\left(A_k e^{kz} - A_k e^{-kz}\right)$$

ou, lembrando que

$$\operatorname{senh}\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$

podemos escrever

$$\mathbb{V}(\rho,\theta,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k\neq 0} J_\nu(k\rho)\big(C_m\cos m\theta + D_m \operatorname{sen} m\theta\big)\operatorname{senh} kz$$

Agora, temos a segunda condição de contorno, dada em $z = L$, ou seja, $\mathbb{V}(\rho,\theta,L) = 0$. Assim, obtemos

$$\mathbb{V}(\rho,\theta,L) = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k\neq 0} J_\nu(k\rho)\big(C_m\cos m\theta + D_m \operatorname{sen} m\theta\big)\operatorname{senh} kL = 0$$

Para que a expressão acima seja válida para qualquer ρ e θ, devemos ter

$$\operatorname{senh} kL = 0$$

o que só ocorre, se k e L forem números reais, quando um deles for nulo. Entretanto, L, o tamanho do cilindro, é uma grandeza física real e diferente de zero, e k, por hipótese, é diferente de zero, como está explícito no índice da somatória. Assim, k deve ser um número complexo e, lembrando a seção D.3 do apêndice D, ele deve ser um número imaginário puro, de modo que podemos escrever $k = i\kappa$, onde κ é real. Com isso, o seno hiperbólico torna-se

$$\begin{aligned}\operatorname{senh} kL &= \frac{e^{kL} - e^{-kL}}{2}\\ &= \frac{e^{i\kappa L} - e^{-i\kappa L}}{2}\\ &= i\frac{e^{i\kappa L} - e^{-i\kappa L}}{2i}\\ \operatorname{senh} kL &= i\operatorname{sen}\kappa L\end{aligned}$$

e então, a condição

$$\operatorname{senh} kL = 0$$

fica

$$i \operatorname{sen} \kappa L = 0$$
$$\operatorname{sen} \kappa L = 0$$

que é satisfeita se κL for um múltiplo inteiro de π, ou seja,

$$\kappa L = n\pi \Rightarrow \kappa_n = \frac{n\pi}{L}$$

O potencial elétrico fica, com esta condição,

$$\mathbb{V}(\rho, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} i J_\nu(i\kappa_n \rho)\big(C_m \cos m\theta + D_m \operatorname{sen} m\theta\big) \operatorname{sen} \kappa_n z$$

Veja que o argumento da função de Bessel é agora um número imaginário puro. Por causa disso, é possível reescrever esta expressão, se lembrarmos das *funções de Bessel modificadas* vistas na seção D.3 do apêndice D. Essas funções são obtidas das funções de Bessel usuais mediante a equação D.36,

$$\mathfrak{I}_\nu(\varrho) = i^\nu J_\nu(i\varrho)$$

e assim, temos, incorporando as constantes nos coeficientes C e D,

$$\mathbb{V}(\rho, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{I}_m(\kappa_n \rho)\big(C_{m,n} \cos m\theta + D_{m,n} \operatorname{sen} m\theta\big) \operatorname{sen} \kappa_n z$$

Por fim, a última condição, em $\rho = R$, é $\mathbb{V}(R, \theta, z) = V(\theta, z)$, e ela nos fornece

$$V(\theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{I}_m(\kappa_n R)\big(C_{m,n} \cos m\theta + D_{m,n} \operatorname{sen} m\theta\big) \operatorname{sen} \kappa_n z$$

ou, utilizando o valor de κ_n,

$$V(\theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{I}_m\left(\frac{n\pi R}{L}\right)\big(C_{m,n} \cos m\theta + D_{m,n} \operatorname{sen} m\theta\big) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{L} \tag{6.132}$$

que é uma expansão de $V(\theta, z)$ em uma série de Fourier normal, em θ, combinada com uma série de Fourier em senos, em z. Para obter os coeficientes

$C_{m,n}$, multiplicamos esta expressão por $\cos m'\theta \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L}$ e a integramos nos intervalos $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq L$, ou seja,

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} V(\theta, z) \cos m'\theta \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L}\, d\theta dz =$$
$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Im_m\left(\frac{n\pi R}{L}\right) \cos m'\theta \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L}$$
$$\times \left(C_{m,n} \cos m\theta + D_{m,n} \operatorname{sen} m\theta\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{L}\, d\theta dz$$

Vamos trocar a ordem em que as integrais e as somatórias são feitas, ou seja,

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} V(\theta, z) \cos m'\theta \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L}\, d\theta dz =$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} \Im_m\left(\frac{n\pi R}{L}\right) \int_0^L \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos m'\theta \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{L} \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L}\, d\theta dz$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{m,n} \Im_m\left(\frac{n\pi R}{L}\right)$$
$$\times \int_0^L \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} m\theta \cos m'\theta \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{L} \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L}\, d\theta dz \quad (6.133)$$

As integrais em θ, já conhecidas, valem, segundo as equações 6.127 e 6.128,

$$\int_0^{2\pi} \cos ny \cos my\, dy = \pi \delta_{n,m}$$

e

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} ny \cos my\, dy = 0$$

respectivamente. Portanto, a integral que envolve o coeficiente $D_{m,n}$ se anula, de modo que obtemos

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} V(\theta, z) \cos m'\theta \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L} \, d\theta dz =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} \Im_m \left(\frac{n\pi R}{L} \right) \int_0^L \pi \delta_{m,m'} \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{L} \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L} \, dz$$

ou, invertendo a ordem em que as somatórias são efetuadas,

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} V(\theta, z) \cos m'\theta \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L} \, d\theta dz =$$

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m,n} \Im_m \left(\frac{n\pi R}{L} \right) \delta_{m,m'} \int_0^L \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{L} \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L} \, dz$$

O único termo que sobrevive na somatória em m é aquele que tem $m = m'$, e assim, considerando que $m' \neq 0$,

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} V(\theta, z) \cos m'\theta \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L} \, d\theta dz =$$

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} C_{m',n} \Im_{m'} \left(\frac{n\pi R}{L} \right) \int_0^L \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{L} \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L} \, dz$$

A integral restante é obtida da equação 2.18,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, dx = \pi \delta_{m,n}$$

se fizermos a substituição

$$y = \frac{Lx}{\pi} \qquad dy = \frac{L}{\pi} dx$$

$$y_1 = \frac{L(-\pi)}{\pi} = -L \qquad y_2 = \frac{L\pi}{\pi} = L$$

e então,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, dx = \int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{L} \frac{\pi}{L} \, dy = \pi \delta_{m,n}$$

ou seja,

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{L}\,dy = L\,\delta_{m,n}$$

Podemos reescrever a integral acima como

$$\int_{-L}^{0} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{L}\,dy + \int_{0}^{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{L}\,dy = L\,\delta_{m,n}$$

Fazendo $z = -y$ na primeira integral, obtemos

$$\int_{L}^{0} \operatorname{sen}\frac{-n\pi z}{L}\operatorname{sen}\frac{-m\pi z}{L}\,d(-z) + \int_{0}^{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{L}\,dy = L\,\delta_{m,n}$$

ou, como $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$,

$$-\int_{L}^{0} \operatorname{sen}\frac{n\pi z}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi z}{L}\,dz + \int_{0}^{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{L}\,dy = L\,\delta_{m,n}$$

Ao invertermos os limites de integração, a integral muda de sinal, ou seja,

$$\int_{0}^{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi z}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi z}{L}\,dz + \int_{0}^{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{L}\,dy = L\delta_{m,n}$$

Como as integrais são iguais, elas resultam no mesmo valor, que é

$$2\int_{0}^{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{L}\,dy = L\,\delta_{m,n}$$

e então,

$$\int_{0}^{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{L}\,dy = \frac{L}{2}\,\delta_{m,n} \tag{6.134}$$

Voltando agora à expressão inicial, achamos

$$\int_{0}^{L}\int_{0}^{2\pi} V(\theta,z)\cos m'\theta\operatorname{sen}\frac{n'\pi z}{L}\,d\theta dz = \pi\sum_{n=1}^{\infty} C_{m',n}\mathfrak{I}_{m'}\left(\frac{n\pi R}{L}\right)\frac{L}{2}\,\delta_{n,n'}$$

Na somatória resta apenas o termo $n = n'$, e assim,

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} V(\theta, z) \cos m'\theta \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L}\, d\theta dz = \frac{\pi L}{2} C_{m',n'} \mathfrak{I}_{m'}\left(\frac{n'\pi R}{L}\right)$$

de forma que o coeficiente $C_{m,n}$ fica, ao retirarmos as linhas dos termos do lado direito, que são desnecessárias,

$$C_{m,n} = \frac{2}{\pi L} \mathfrak{I}_m^{-1}\left(\frac{n\pi R}{L}\right) \int_0^L \int_0^{2\pi} V(\theta, z) \cos m\theta \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{L}\, d\theta dz \qquad (6.135)$$

Quando $m = m' = 0$, a expressão 6.133 torna-se

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} V(\theta, z) \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L}\, d\theta dz = \sum_{n=1}^{\infty} C_{0,n} \mathfrak{I}_0\left(\frac{n\pi R}{L}\right) \int_0^L \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{L} \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L}\, d\theta dz$$

ou

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} V(\theta, z) \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L}\, d\theta dz = \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi C_{0,n} \mathfrak{I}_0\left(\frac{n\pi R}{L}\right) \int_0^L \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{L} \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L}\, dz$$

A integral é fornecida pela expressão 6.134, e assim,

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} V(\theta, z) \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L}\, d\theta dz = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} C_{0,n} \mathfrak{I}_0\left(\frac{n\pi R}{L}\right) \frac{L}{2}\, \delta_{n,n'}$$

e como o único termo que sobrevive é aquele que tem $n = n'$, achamos

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} V(\theta, z) \operatorname{sen} \frac{n'\pi z}{L}\, d\theta dz = \frac{\pi}{L} C_{0,n'} \mathfrak{I}_0\left(\frac{n'\pi R}{L}\right)$$

de modo que o coeficiente $C_{0,n}$ é

$$C_{0,n} = \frac{L}{\pi}\mathfrak{I}_0^{-1}\left(\frac{n'\pi R}{L}\right)\int_0^L\int_0^{2\pi} V(\theta, z)\,\text{sen}\,\frac{n'\pi z}{L}\,d\theta dz \tag{6.136}$$

Para obter os coeficientes $D_{m,n}$, devemos multiplicar a expansão 6.132 por $\text{sen}\,m'\theta\,\text{sen}\,\frac{n'\pi z}{L}$ e integrá-la nos intervalos $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le z \le L$, ou seja,

$$\int_0^L\int_0^{2\pi} V(\theta, z)\,\text{sen}\,m'\theta\,\text{sen}\,\frac{n'\pi z}{L}\,d\theta dz =$$
$$\int_0^L\int_0^{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{I}_m\left(\frac{n\pi R}{L}\right)\text{sen}\,m'\theta\,\text{sen}\,\frac{n'\pi z}{L}$$
$$\times\left(C_{m,n}\cos m\theta + D_{m,n}\,\text{sen}\,m\theta\right)\text{sen}\,\frac{n\pi z}{L}\,d\theta dz$$

Se seguirmos os cálculos efetuados na obtenção de $D_{m,n}$ do exemplo anterior, obteremos, para $D_{m,n}$, o valor

$$D_{m,n} = \frac{2}{\pi L}\mathfrak{I}_m^{-1}\left(\frac{n\pi R}{L}\right)\int_0^L\int_0^{2\pi} V(\theta, z)\,\text{sen}\,m\theta\,\text{sen}\,\frac{n\pi z}{L}\,d\theta dz \tag{6.137}$$

e a demonstração desta expressão é deixada como exercício (veja o exercício 6.8). Observe que o cálculo das integrais, para um problema específico em que L e R são conhecidos, pode precisar do auxílio de computadores para ser efetuado, devido à complexidade dessas expressões.

Este exemplo encerra nossa discussão sobre a equação de Laplace. Vimos a resolução dessa equação nos sistemas de coordenadas mais importantes e estudamos relevantes exemplos de aplicação para ela. Vejamos agora algumas experiências relacionadas a esse assunto.

6.7 Mãos à Obra: Simulação de Raios e Poder das Pontas

No exemplo 6.3 da seção 6.4, estudamos o comportamento do potencial e do campo elétrico numa região próxima à junção entre dois condutores. Neste "canto", o campo elétrico tende a zero quando nos aproximamos da ponta da junção se o ângulo formado pelos condutores é menor do que π,

formando uma região "côncava", ao passo que ele diverge quando esse ângulo é maior do que π (veja a discussão que inicia na página 346). Isso explica a eficiência dos pára-raios, como foi discutido naquela seção. Nosso objetivo agora é "visualizar" alguns efeitos decorrentes do poder das pontas e montar um pára-raios em miniatura.

6.7.1 Vento Elétrico

Para esta experiência você vai precisar do seguinte.

1. Um gerador de Van de Graaff, discutido na seção 5.5.
2. Um bastão metálico com uma das extremidades bem pontuda.
3. Um suporte isolante para segurar esse bastão.
4. Uma vela e fósforos.
5. Um pedaço de fio, para ligar o Van de Graaff ao suporte.
6. Um eletroscópio ou pêndulo eletrostático.

A montagem da experiência é bastante simples. Você deve colocar o bastão metálico no suporte de modo que a extremidade pontiaguda fique na horizontal. Depois, utilize o fio para ligar o Van de Graaff ao condutor. Observe que você usará apenas um fio, e não dois, como seria de se esperar, já que nesta experiência não queremos um circuito elétrico fechado. A figura 6.10 ilustra a montagem experimental.

Ponha o Van de Graaff para funcionar. Após um certo tempo, verifique se ele está carregado, aproximando o pêndulo eletrostático ou o eletroscópio da ponta aguda do bastão. Quando o desvio das folhas do eletroscópio ou da bolinha do pêndulo eletrostático for razoável, acenda a vela e aproxime-a da ponta. Ao fazer isso, você verá que a chama da vela se inclina, como se fosse soprada por uma brisa. Isso ocorre porque na ponta metálica existe um forte campo elétrico que age sobre as moléculas dos constituintes do ar que se encontram próximos a ela. Quando a carga adquirida pelo Van de Graaff e, conseqüentemente, pela ponteira, é negativa, o campo elétrico produzido por ela age sobre as moléculas de ar, de modo que alguns dos elétrons delas são arrancados e repelidos para longe da ponteira. Os íons positivos assim formados são atraídos para a ponteira e arrastam consigo outras moléculas de

ar, de forma que a chama da vela se inclina em direção à ponteira. Quando a carga adquirida pelo Van de Graaff é positiva, ocorre o processo inverso. Alguns elétrons das moléculas de ar são atraídos para a ponta, e os íons positivos são repelidos, de forma que a chama da vela se inclina, afastando-se da ponteira. Esse efeito é conhecido como *vento elétrico*.

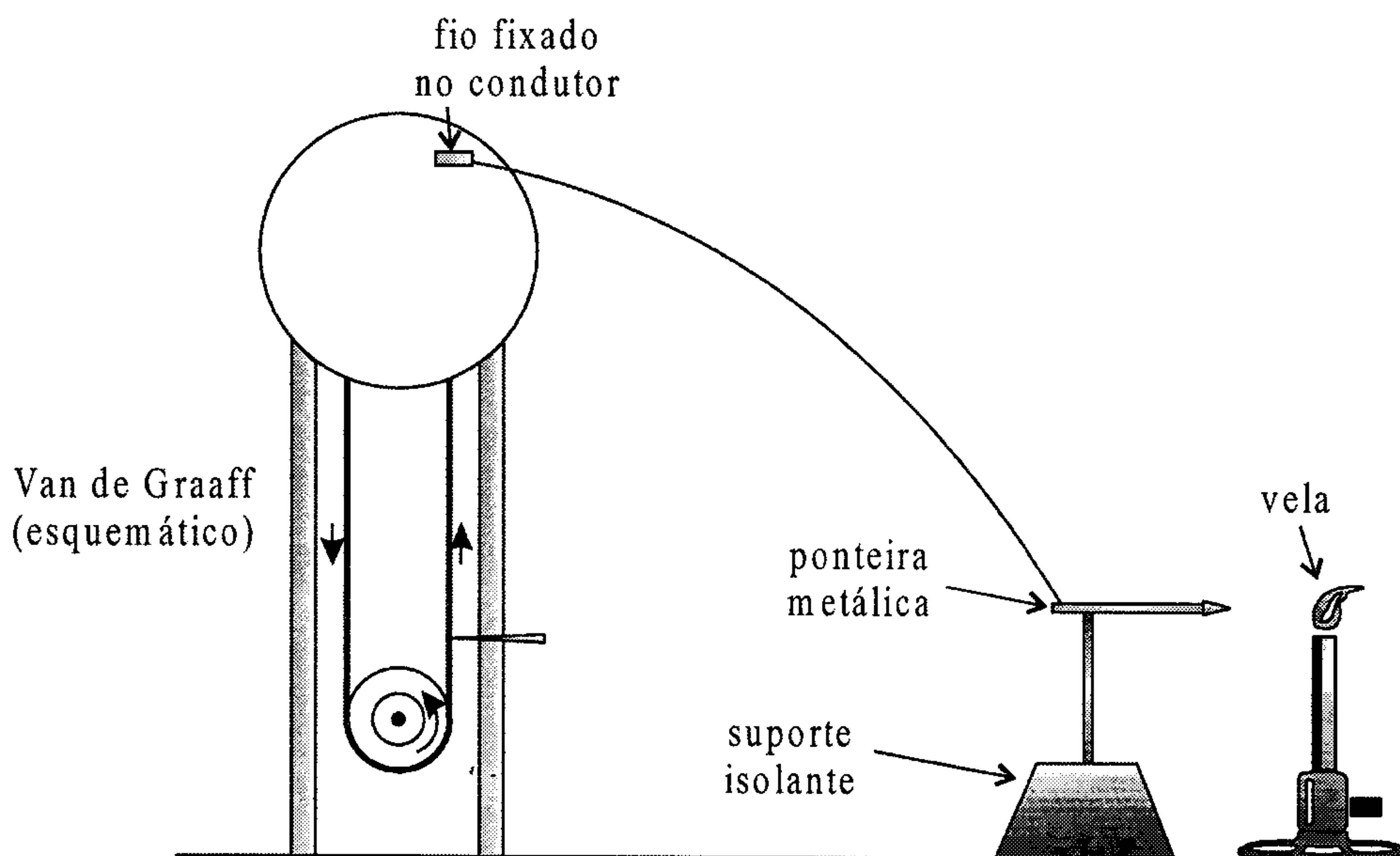



Figura 6.10: Esquema para a experiência do vento elétrico.

6.7.2 Torniquete Elétrico

O vento elétrico pode produzir alguns efeitos bastante interessantes. Um deles é estudado nesta experiência, que utiliza os materiais seguintes.

1. Um gerador de Van de Graaff.

2. Uma folha de papel-alumínio, ou outro material metálico bem leve.

3. Fita adesiva.

4. Pêndulo eletrostático ou eletroscópio.

Esta experiência é bastante simples. Utilizando o papel-alumínio, monte um cata-vento, de forma que as pás fiquem bem pontudas, como na figura 6.11. Usando o próprio papel-alumínio, faça também um suporte e coloque o cata-vento na horizontal (por que isso deve ser feito?). Depois, ligue o Van de Graaff e espere alguns minutos. Então, observe o que ocorre com o cata-vento, e procure explicar detalhadamente esse efeito.

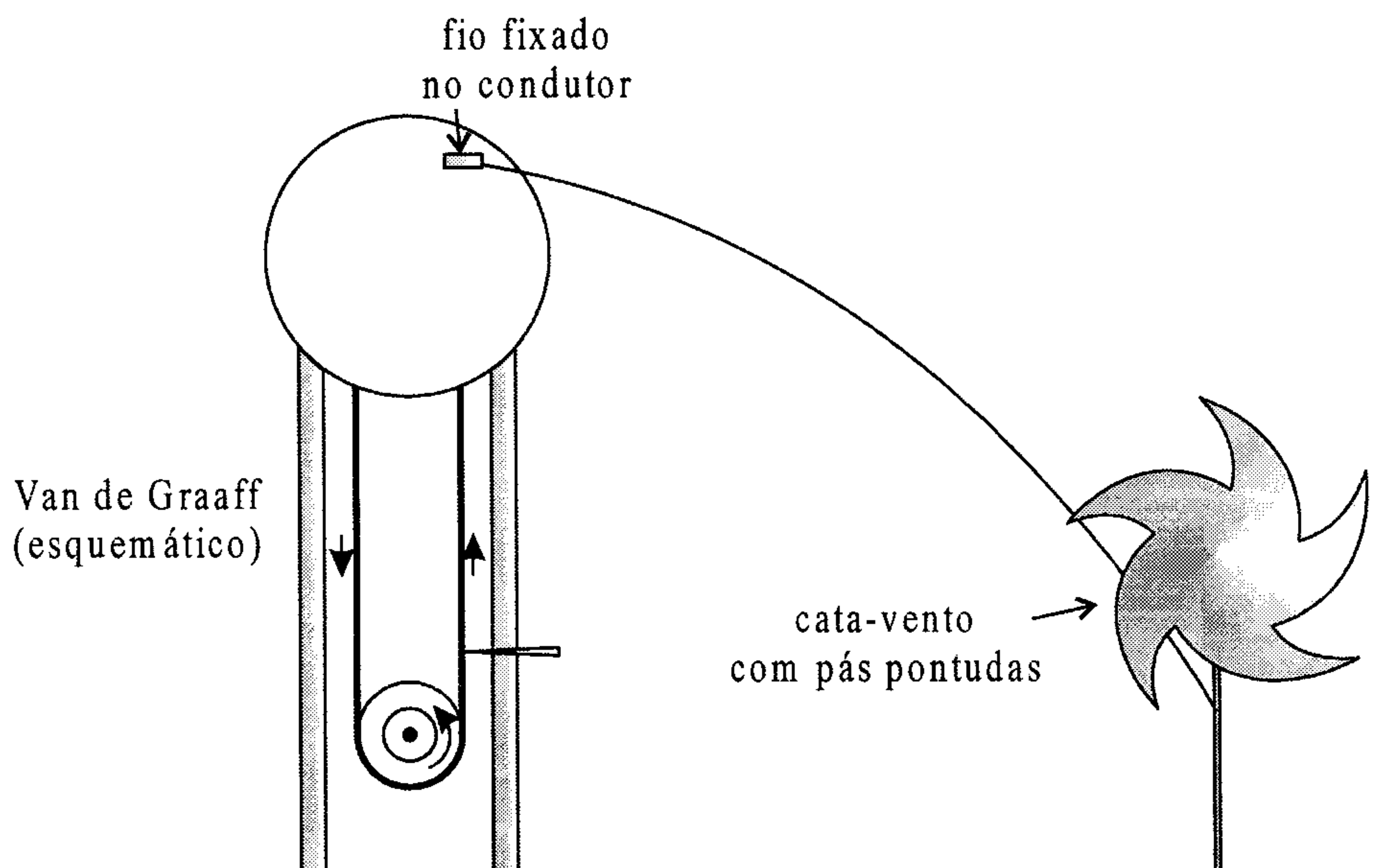



Figura 6.11: Diagrama de um cata-vento à base do torniquete elétrico.

6.7.3 Simulação de Raios

Para esta experiência, você vai precisar do seguinte.

1. Um gerador de Van de Graaff.
2. Duas ponteiras metálicas.
3. Dois suportes isolantes.
4. Dois garfos e duas colheres.
5. Dois fios.

Nesta experiência, vamos produzir algumas descargas entre os condutores, que serão nossos "raios". A montagem da experiência é simples e semelhante às duas anteriores. Primeiro, fixe as duas ponteiras metálicas nos suportes e as ligue ao gerador de Van de Graaff, utilizando os dois fios, como mostra a figura 6.12. Ponha o Van de Graaff para funcionar e, após alguns minutos, à medida que a distância d entre as ponteiras é alterada, você verá que aparecem algumas descargas. Anote a distância a partir da qual as faíscas surgem. É interessante realizar esta e as outras experiências tanto em dias secos e quentes como em frios e úmidos, ou mesmo chuvosos, para verificar as mudanças qualitativas que ocorrem.

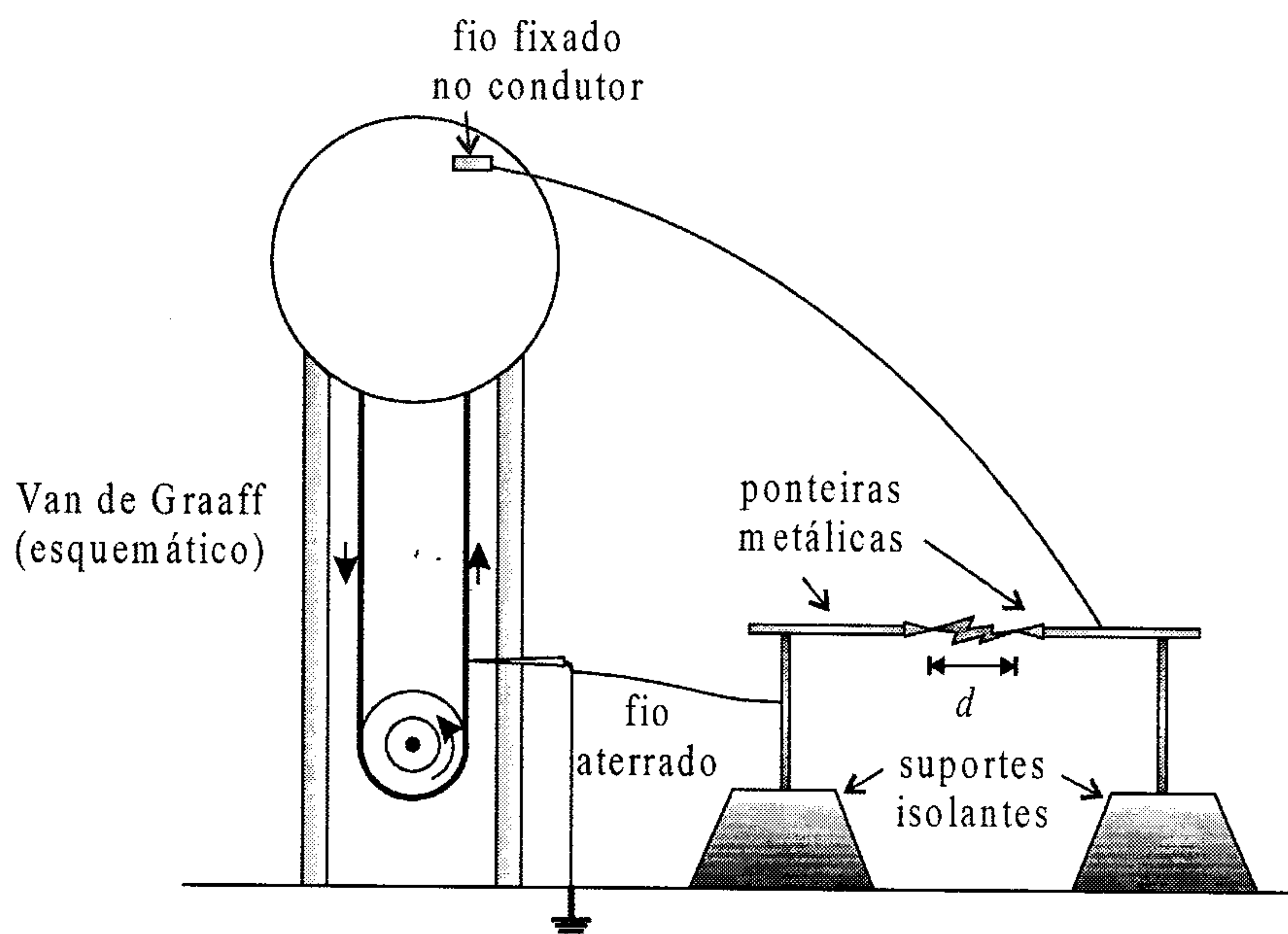



Figura 6.12: Esquema para a experiência de produção de raios.

Depois de realizar as experiências com as ponteiras, troque uma delas por um garfo e refaça o procedimento. Agora podem aparecer dois raios simultâneos dos dentes do garfo, convergindo para a ponteira. Depois, troque a segunda ponteira pelo outro garfo, e veja que são possíveis vários raios, dependendo do número de dentes dos garfos.

Substitua um dos garfos por uma colher, e o outro por uma ponteira. Verifique se ainda há raios. Procure colocar várias partes da colher próximo à ponteira, principalmente as laterais da região oval. Por fim, retire a ponteira,

coloque a segunda colher e observe se existe produção de raios. Depois de todas essas verificações, procure responder às seguintes questões.

- Explique qualitativamente o motivo pelo qual as descargas aparecem. É preciso que haja duas pontas, ou uma é suficiente?
- O que ocorre quando não há pontas? Existem descargas? Elas aparecem à mesma distância que no caso de haver uma ou duas pontas?
- Qual é a influência da distância no aparecimento das descargas?
- Considerando que o Van de Graaff produz uma diferença de potencial de cerca de 10000 V e que o módulo dielétrico do ar vale aproximadamente 10^6 N/C, por que você obtém descargas até uma distância de aproximadamente 1 cm?

6.8 Exercícios

6.1 Calcule o campo elétrico, mediante o gradiente negativo da expressão 6.38, para o potencial elétrico dentro da caixa do exemplo 6.2.

6.2 Considere uma caixa retangular submetida às condições de contorno

$$\begin{cases} \mathbb{V}(0,y,z) = 0 & \mathbb{V}(a,y,z) = V_0 \\ \mathbb{V}(x,0,z) = 0 & \mathbb{V}(x,b,z) = V_0 \operatorname{sen} x \\ \mathbb{V}(x,y,0) = 0 & \mathbb{V}(x,y,c) = V_0 \cos y \end{cases}$$

Encontre o potencial elétrico dentro da caixa, utilizando as superposições convenientes.

6.3 Obtenha o campo elétrico e a densidade de carga sobre a superfície da esfera do exemplo 6.6.

6.4 Obtenha o valor do campo elétrico para a região dentro da esfera do exemplo 6.11. Calcule também a densidade de carga induzida e a carga total na superfície da esfera.

6.5 Numa certa região do espaço existe um dipolo elétrico pontual $\vec{p} = p_0\,\hat{\mathbf{k}}$, situado em $\vec{r}_p = a\,\hat{\mathbf{k}}$, e uma carga Q, situada em $\vec{r}_Q = \frac{a}{2}\,\hat{\mathbf{j}}$. Ache o potencial elétrico em todo o espaço, tanto exatamente como em termos de uma expansão em harmônicos esféricos.

6.6 Um cilindro infinito de raio R está submetido ao potencial

$$\mathbb{V}(R,\theta) = V_0 \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta$$

sobre a sua superfície. Ache o potencial em todo o espaço.

6.7 No exemplo 6.12, estudamos um quadrupolo elétrico situado dentro de uma esfera de cargas. Usando a expressão 6.100, ache o campo elétrico dentro da esfera, a densidade de cargas induzidas na sua superfície e a carga total induzida.

6.8 Demonstre que os coeficientes $D_{m,n}$ do exemplo 6.18 são dados pela expressão 6.137.

Capítulo 7

Potenciais Elétricos, III: Método das Imagens

Em Eletrostática, existem problemas que envolvem condições de contorno e distribuições de carga especificados de uma forma tal que se torna muito complicado resolver a equação de Poisson 6.1 associada a eles. Nesses casos, podemos tentar uma abordagem diferente, que consiste na substituição das condições de contorno dadas por uma distribuição de cargas situada *fora* da região de interesse, que é aquela na qual queremos obter o potencial. Essa distribuição de cargas, chamadas de *cargas-imagem*, deve ser escolhida de modo a reproduzir exatamente as condições de contorno *dentro* da região em que o problema está definido, não importando o que ocorre *fora* dos seus limites. Esse procedimento configura o *método das imagens*, que ficará mais claro em seguida, com os exemplos de sua aplicação.

7.1 Exemplos de Aplicação do Método das Imagens em Coordenadas Retangulares

Nesta seção, veremos alguns exemplos relacionados ao método das imagens para problemas que envolvem cargas e planos. Tais problemas são melhor descritos em coordenadas retangulares, e vamos iniciar com o mais simples deles.

7.1.1 Carga Pontual Situada em frente a um Plano Infinito Aterrado

O problema mais elementar em relação ao método das imagens consiste no estudo de um sistema formado por uma carga Q pontual localizada na frente de um plano condutor infinito mantido num potencial fixo nulo, o que é conseguido mediante o aterramento do plano, como mostra a figura 7.1.

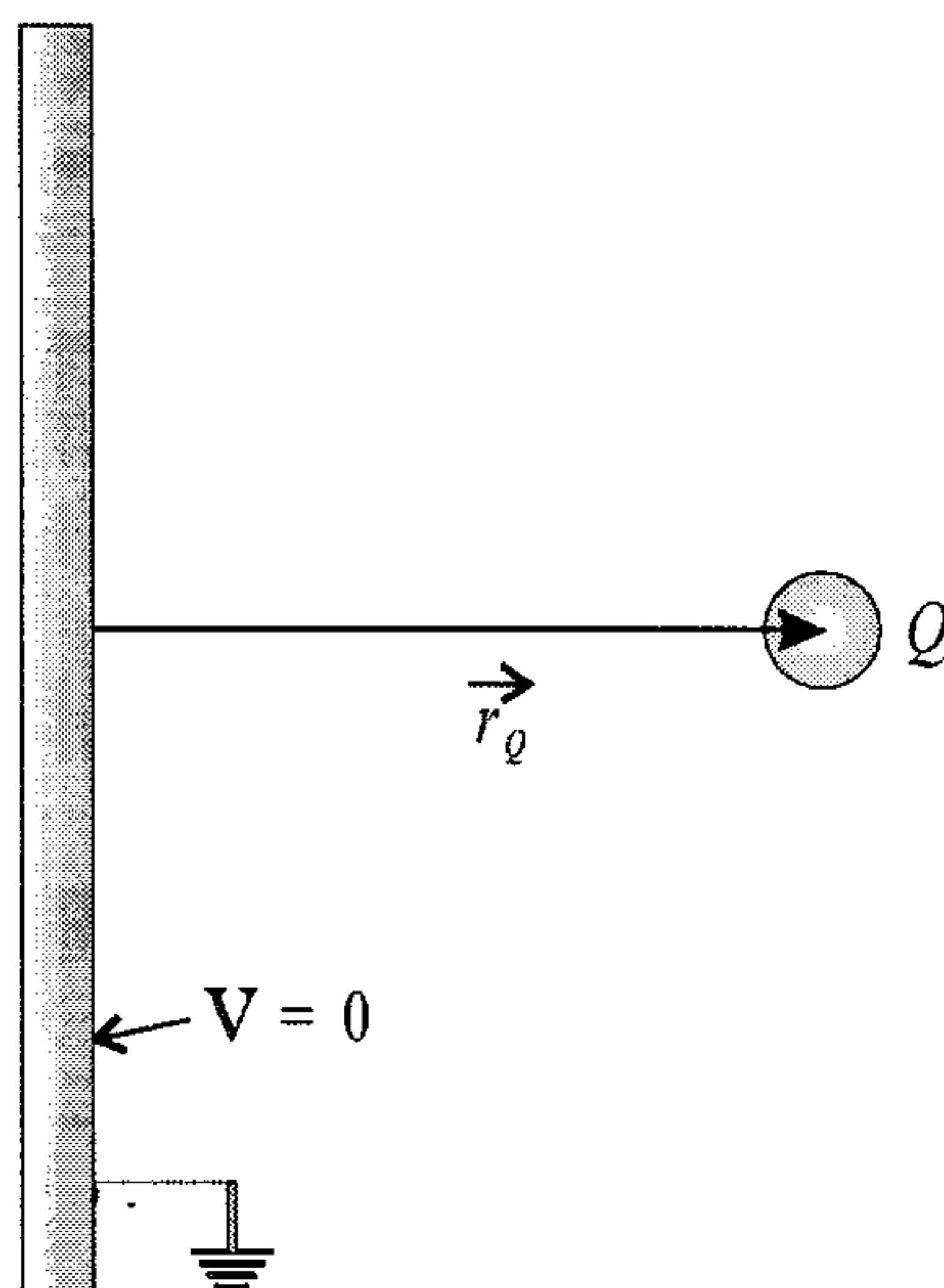



Figura 7.1: Carga pontual Q na frente de um plano condutor aterrado, para o método das imagens.

Fisicamente, o que ocorre neste caso é que o plano fica submetido ao campo elétrico gerado pela carga, e isso faz com que seus elétrons se movam, produzindo uma carga elétrica induzida sobre o plano. Essa carga induzida, por sua vez, gera um campo elétrico que se soma vetorialmente ao da carga pontual, produzindo o campo total. É instrutivo observar as linhas de campo elétrico na região de interesse, que é aquela à direita do plano. Essas linhas são mostradas na figura 7.2. Observe que elas são perpendiculares ao plano na região bem próxima a ele, já que o campo elétrico é sempre normal ao condutor em equilíbrio. O plano intercepta todas as linhas de campo que partem para a esquerda, e esta configuração de campo elétrico poderia ser substituída por uma outra, idêntica, em que existe a carga pontual Q, situada na posição $\vec{r}_Q$, como mostra a figura 7.1, e uma carga-imagem, de valor $-Q$, situada de forma simétrica em relação ao plano, na posição $\vec{r}_{-Q}$, sendo $|\vec{r}_Q| = |\vec{r}_{-Q}|$, como se

fosse a imagem num espelho, conforme mostra a figura 7.3. Nesta figura, também vemos as linhas de campo, que, na região de interesse, à direita do plano, são iguais às da figura 7.2. Atente para o fato de que o plano agora não existe mais, razão pela qual ele está desenhado de forma tracejada, e que o campo elétrico na região à esquerda do plano não é mais o mesmo que antes. Mas isso não importa, pois o que deve permanecer inalterado é o campo na região de interesse, à direita do plano.

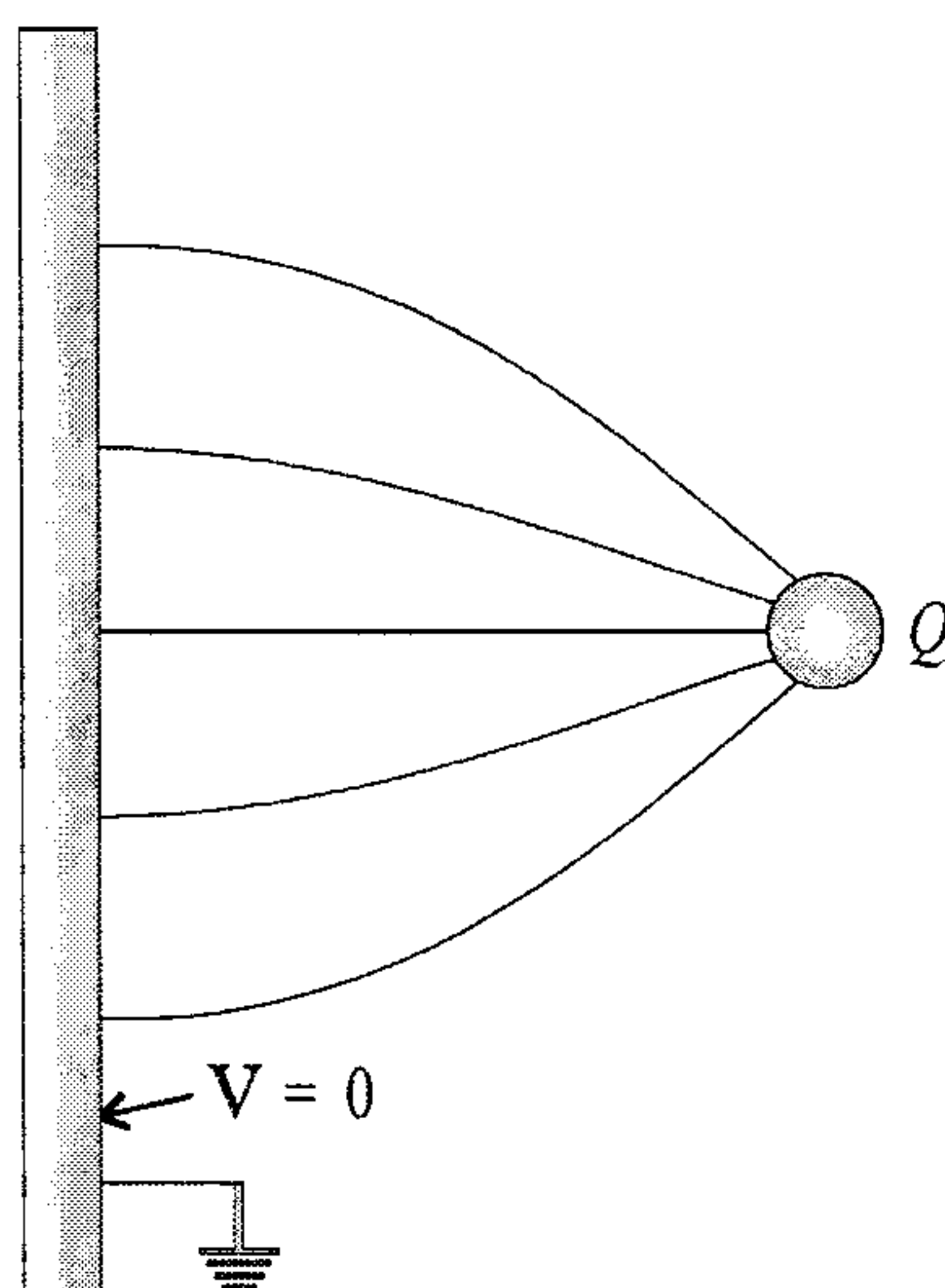



Figura 7.2: Linhas de campo elétrico do problema da carga pontual em frente ao plano condutor aterrado.

Ainda que possa soar repetitivo, é preciso ressaltar que a região à esquerda do plano está fora da região de interesse, que é aquela situada à direita do plano. Sendo assim, apenas nesta região é que podemos colocar cargas-imagem, conforme foi discutido no início do capítulo. Não podemos acrescentar cargas-imagem dentro da região à direita do plano, pois é ela que possui cargas reais, e sabemos que a carga-imagem não é uma carga real, e sim, um artifício utilizado para resolver um problema que seria complicado se fosse tratado de outra forma. A colocação de cargas-imagem fora da região de interesse modifica o potencial e o campo elétrico neste local, mas isso não é relevante, já que queremos obter essas grandezas em outro local. Entretanto, a substituição das condições de contorno por cargas-imagem deve reproduzir, exatamente, o potencial elétrico nas superfícies em que as condições de con-

torno foram dadas para o problema inicial. Podemos verificar isso, calculando o potencial elétrico gerado pelas duas cargas. Vamos considerar que o eixo que as une seja o eixo y, sendo o eixo x perpendicular à página, saindo dela, e o eixo z, paralelo à página e ao plano. Assim, temos

$$\vec{r}_Q = Y\,\hat{\mathbf{j}}$$
$$\vec{r}_{-Q} = -Y\,\hat{\mathbf{j}}$$

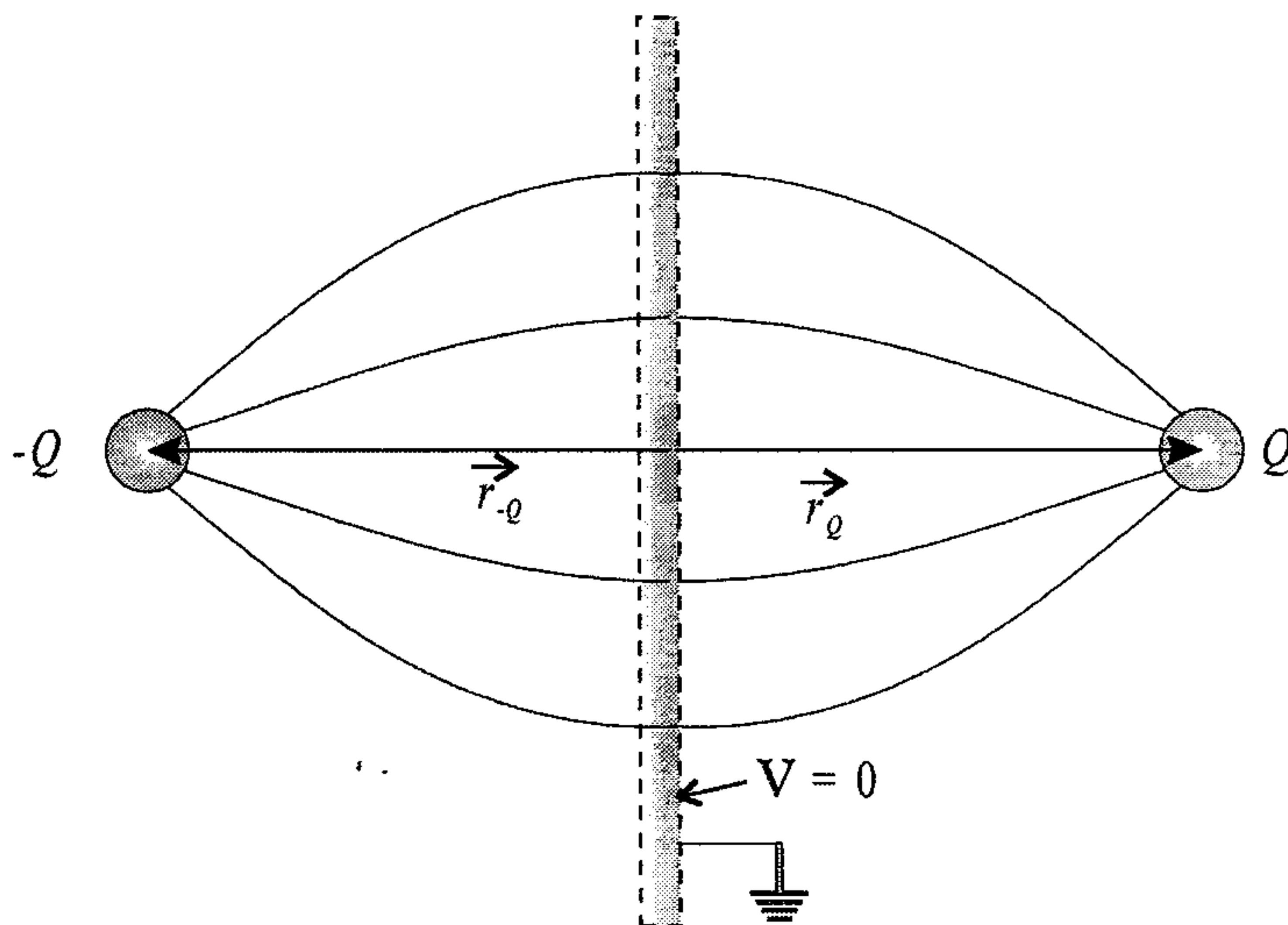



Figura 7.3: Configuração de cargas equivalente para o problema da carga pontual em frente ao plano condutor aterrado.

enquanto o potencial elétrico num ponto $\vec{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$ fica

$$\mathbb{V}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Q}{|\vec{r}-\vec{r}_{-Q}|}$$

Os denominadores ficam

$$\vec{r} - \vec{r}_Q = x\,\hat{\mathbf{i}} + (y-Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$|\vec{r} - \vec{r}_Q| = \sqrt{x^2 + (y-Y)^2 + z^2}$$
$$\vec{r} - \vec{r}_{-Q} = x\,\hat{\mathbf{i}} + (y+Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$|\vec{r} - \vec{r}_{-Q}| = \sqrt{x^2 + (y+Y)^2 + z^2}$$

e então,

$$\mathbb{V}(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-Y)^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+(y+Y)^2+z^2}}\right) \quad (7.1)$$

Sobre o plano, que está situado em $y = 0$, estendendo-se nos eixos x e z, temos o potencial

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(x,0,z) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(0-Y)^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+(0+Y)^2+z^2}}\right) \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+Y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+Y^2+z^2}}\right) \\
\mathbb{V}(x,0,z) &= 0
\end{aligned}$$

que reproduz a condição de contorno inicial, dada sobre o plano aterrado. Este fato é essencial, porque, se não ocorresse, toda a discussão já feita estaria errada.

O potencial elétrico 7.1 é o potencial gerado pelas duas cargas, mas ele também é o produzido pelo plano condutor e pela carga situada na sua frente, na região em que $x \geq 0$. Sendo assim, o campo elétrico nessa região pode ser obtido através do gradiente negativo da expressão, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V}$$

ou

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}} = -\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] \\
\times\left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-Y)^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+(y+Y)^2+z^2}}\right)\right]
\end{aligned}$$

No entanto, como temos duas cargas, é mais simples utilizar a expressão 4.4 para o campo gerado por elas, isto é,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q(\vec{r}-\vec{r}_Q)}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Q(\vec{r}-\vec{r}_{-Q})}{|\vec{r}-\vec{r}_{-Q}|^3}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y-Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + (y-Y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y+Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + (y+Y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

O campo elétrico sobre o plano é obtido mediante a consideração de que $y = 0$ na equação acima, isto é,

$$\vec{\mathcal{E}}(x,0,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} - Y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + Y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + Y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + Y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(x,0,z) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0}\frac{Y}{\left[x^2 + Y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,\hat{\mathbf{j}}$$

e ele é orientado perpendicularmente ao plano, como deve ser. A densidade de carga induzida pode ser obtida através da expressão 6.44,

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}$$

sendo $\hat{n}$ o vetor normal à superfície sobre a qual σ está distribuída. No nosso caso, $\hat{n} = \hat{\mathbf{j}}$, e portanto,

$$\sigma = \epsilon_0\left(-\frac{Q}{2\pi\epsilon_0}\frac{Y}{\left[x^2 + Y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,\hat{\mathbf{j}}\right)\cdot\hat{\mathbf{j}}$$

ou

$$\sigma(x,z) = -\frac{Q}{2\pi}\frac{Y}{\left[x^2 + Y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

A força que age sobre o plano, provocada pela carga Q, pode ser calculada de dois modos. Em qualquer um dos dois, é mais simples calcular a força que o plano exerce sobre a carga Q, já que, pela terceira lei de Newton, da ação e reação, a força que a carga exerce sobre o plano tem mesma direção, mesmo módulo, mas sentido oposto ao da força que o plano faz sobre a carga Q.

Para o primeiro modo, percebemos que a força que o plano exerce sobre a carga Q é a mesma que a carga-imagem $-Q$ faz sobre esta carga, pois podemos substituir um problema pelo outro. Assim, lembrando que a distância

entre as duas cargas é $2Y$, e também que a força é atrativa, já que as cargas têm sinais opostos, temos, usando a lei de Coulomb 3.1,

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{4Y^2}\,\hat{\mathbf{j}}$$

ou

$$\vec{F} = -\frac{1}{16\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{Y^2}\,\hat{\mathbf{j}} \tag{7.2}$$

Esta expressão pode também ser obtida através da integração direta da força gerada por cada carga elementar $dq = \sigma dA$ sobre a carga Q. A força é dada pela lei de Coulomb, que neste caso fica

$$d\vec{F} = \frac{Q\sigma(x,z)dA}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

onde $\vec{r}\,'$ indica as posições das cargas elementares, sendo $\vec{r}$ a posição da carga que sofre a ação das forças geradas pelas cargas situadas em $\vec{r}\,'$. Assim,

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= Y\,\hat{\mathbf{j}} \\
\vec{r}\,' &= x\,\hat{\mathbf{i}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \\
\vec{r}-\vec{r}\,' &= -x\,\hat{\mathbf{i}} + Y\,\hat{\mathbf{j}} - z\,\hat{\mathbf{k}} \\
|\vec{r}-\vec{r}\,'| &= \sqrt{x^2+Y^2+z^2}
\end{aligned}$$

e

$$d\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{Q}{2\pi}\right)\frac{Y}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\frac{-x\,\hat{\mathbf{i}}+Y\,\hat{\mathbf{j}}-z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left(x^2+Y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dxdz$$

ou

$$d\vec{F} = \frac{Q^2Y}{8\pi^2\epsilon_0}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}}-Y\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left(x^2+Y^2+z^2\right)^3}\,dxdz$$

A força total é obtida através da integração da expressão acima sobre todo o plano (que é infinito), ou seja,

$$\vec{F} = \frac{Q^2Y}{8\pi^2\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}}-Y\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left(x^2+Y^2+z^2\right)^3}\,dxdz$$

ou

$$\vec{F} = \frac{Q^2 Y\,\hat{\mathbf{i}}}{8\pi^2\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dxdz}{\left(x^2+Y^2+z^2\right)^3} - \frac{Q^2 Y^2\,\hat{\mathbf{j}}}{8\pi^2\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdz}{\left(x^2+Y^2+z^2\right)^3} + \frac{Q^2 Y\,\hat{\mathbf{k}}}{8\pi^2\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z\,dxdz}{\left(x^2+Y^2+z^2\right)^3}$$

Vamos resolver inicialmente a primeira integral, usando a substituição

$$x = \sqrt{Y^2+z^2}\,\mathrm{tg}\,\theta \qquad dx = \sqrt{Y^2+z^2}\,\sec^2\theta\,d\theta$$

$$x_1 = -\infty \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \qquad x_2 = \infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

A componente em x da força fica

$$\begin{aligned}
F_x &= \frac{Q^2 Y}{8\pi^2\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{Y^2+z^2}\,\mathrm{tg}\,\theta\sqrt{Y^2+z^2}\,\sec^2\theta\,d\theta dz}{\left[\left(Y^2+z^2\right)\mathrm{tg}^2\,\theta+Y^2+z^2\right]^3} \\
&= \frac{Q^2 Y}{8\pi^2\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(Y^2+z^2\right)\mathrm{tg}\,\theta\sec^2\theta\,d\theta dz}{\left(Y^2+z^2\right)^3\left(\mathrm{tg}^2\,\theta+1\right)^3} \\
&= \frac{Q^2 Y}{8\pi^2\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}\,\theta\sec^2\theta\,d\theta dz}{\left(Y^2+z^2\right)^2\sec^6\theta} \\
F_x &= \frac{Q^2 Y}{8\pi^2\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\left(Y^2+z^2\right)^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}\,\theta\cos^3\theta\,d\theta
\end{aligned}$$

Para realizar esta integral, definimos

$$u = -\frac{\cos^4}{4}\theta \qquad du = \cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta$$

e assim,

$$F_x = \frac{Q^2 Y}{8\pi^2\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\left(Y^2+z^2\right)^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}du$$

ou

$$F_x = \frac{Q^2 Y}{8\pi^2\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\left(Y^2+z^2\right)^2}\left[-\frac{\cos^4\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$F_x = 0$$

De maneira análoga, a componente da força na direção z se anula, o que é deixado como exercício (veja o exercício 7.1). A componente na direção y é

$$F_y = -\frac{Q^2 Y^2}{8\pi^2\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdz}{\left(x^2+Y^2+z^2\right)^3}$$

e vamos utilizar a substituição

$$x = \sqrt{Y^2+z^2}\,\mathrm{tg}\,\theta \qquad dx = \sqrt{Y^2+z^2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$x_1 = -\infty \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \qquad x_2 = \infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
F_y &= -\frac{Q^2 Y^2}{8\pi^2\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{Y^2+z^2}\sec^2\theta\, d\theta dz}{\left[\left(Y^2+z^2\right)\mathrm{tg}^2\theta+Y^2+z^2\right]^3} \\
&= -\frac{Q^2 Y^2}{8\pi^2\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{Y^2+z^2}\sec^2\theta\, d\theta dz}{\left(Y^2+z^2\right)^3\left(\mathrm{tg}^2\theta+1\right)^3} \\
&= -\frac{Q^2 Y^2}{8\pi^2\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2\theta\, d\theta dz}{\left(Y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}\sec^6\theta} \\
F_y &= -\frac{Q^2 Y^2}{8\pi^2\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\left(Y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta
\end{aligned}$$

Vamos resolver a integral do cosseno separadamente. Ela fica

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\cos^2\theta\, d\theta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3\theta}{2} + \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{8}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{8}$$

então,

$$F_y = -\frac{3Q^2Y^2}{64\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\left(Y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Esta integral utiliza a substituição

$$z = Y \operatorname{tg}\theta \qquad dz = Y\sec^2\theta\, d\theta$$

$$z_1 = -\infty \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \qquad z_2 = \infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

e portanto,

$$F_y = -\frac{3Q^2Y^2}{64\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Y\sec^2\theta\, d\theta}{\left(Y^2+Y^2\operatorname{tg}^2\theta\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= -\frac{3Q^2Y^3}{64\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{Y^5\left(1+\operatorname{tg}^2\theta\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= -\frac{3Q^2}{64\pi\epsilon_0 Y^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^5\theta}$$

$$= -\frac{3Q^2}{64\pi\epsilon_0 Y^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta$$

$$F_y = -\frac{3Q^2}{64\pi\epsilon_0 Y^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\left(1-\operatorname{sen}^2\theta\right) d\theta$$

$$
\begin{aligned}
F_y &= -\frac{3Q^2}{64\pi\epsilon_0 Y^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta + \frac{3Q^2}{64\pi\epsilon_0 Y^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \\
&= -\frac{3Q^2}{64\pi\epsilon_0 Y^2}\left[\operatorname{sen}\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3Q^2}{64\pi\epsilon_0 Y^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \\
F_y &= -\frac{3Q^2}{32\pi\epsilon_0 Y^2} + \frac{3Q^2}{64\pi\epsilon_0 Y^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta
\end{aligned}
$$

Para calcular a integral, definimos

$$
u = \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3} \qquad\qquad du = \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta\, d\theta
$$

Assim, obtemos

$$
\begin{aligned}
F_y &= -\frac{3Q^2}{32\pi\epsilon_0 Y^2} + \frac{3Q^2}{64\pi\epsilon_0 Y^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du \\
&= -\frac{3Q^2}{32\pi\epsilon_0 Y^2} + \frac{3Q^2}{64\pi\epsilon_0 Y^2}\left[\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{3Q^2}{32\pi\epsilon_0 Y^2} + \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 Y^2} \\
F_y &= -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 Y^2}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\vec{F} = \vec{F}_y = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 Y^2}\,\hat{\mathbf{j}}
$$

que concorda com a equação 7.2 obtida anteriormente.

7.1.2 Carga Pontual Situada em frente a Dois Planos Infinitos Aterrados que Formam um Ângulo Reto

Uma variação do problema visto na seção anterior é o caso de uma carga na frente de dois planos semi-infinitos aterrados que se interceptam num ângulo de 90^{O}, como mostra a figura 7.4.

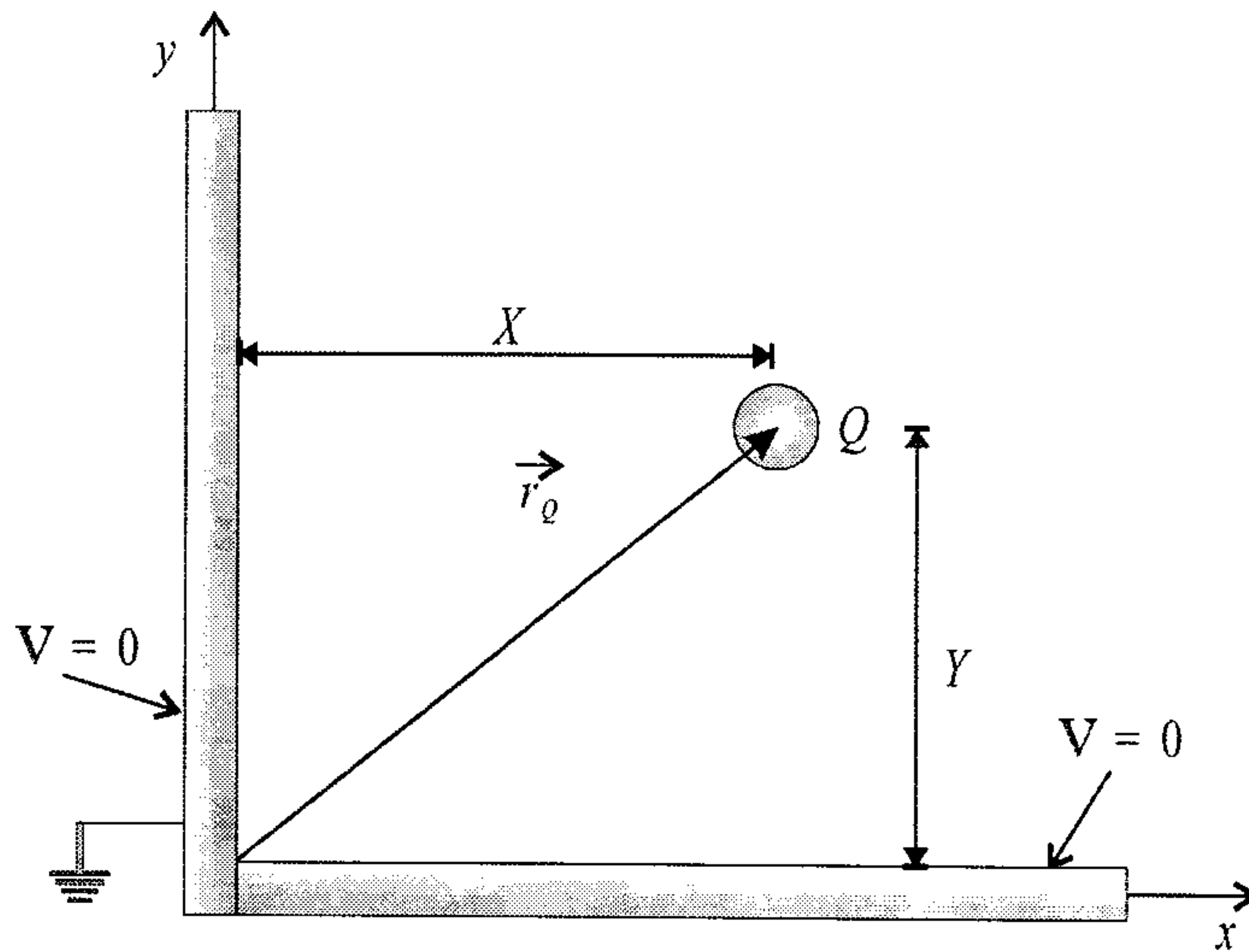



Figura 7.4: Carga situada na frente de dois planos que fazem um ângulo de 90º entre si.

À semelhança do que ocorre quando um objeto é colocado na frente de dois espelhos que formam um ângulo de 90º entre si, o que provoca o aparecimento de três imagens ou reflexos, aqui precisaremos de três cargas-imagem para reproduzir as condições de contorno sobre os planos. Essas cargas devem ser colocadas fora da região de interesse, que é aquela em que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. A figura 7.5 apresenta as posições das cargas-imagem para este problema. As duas cargas $-Q$ são as imagens da carga Q original nos dois planos, enquanto a carga-imagem Q é a "imagem" das cargas-imagem $-Q$ no prolongamento dos planos, que aparecem como retas tracejadas na figura. Na verdade, existem quatro imagens, só que a imagem da carga-imagem $-Q$ à esquerda do plano vertical cai no mesmo lugar que a imagem da outra carga $-Q$ que está abaixo do plano horizontal. Resultam, portanto, apenas três imagens.

A posição da carga real Q é

$$\vec{r}_Q = X\,\hat{\mathbf{i}} + Y\,\hat{\mathbf{j}}$$

enquanto as posições das imagens são

$$\vec{r}_{-Q_{\text{esq.}}} = -X\,\hat{\mathbf{i}} + Y\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{r}_{Q_{\text{imagem}}} = -X\,\hat{\mathbf{i}} - Y\,\hat{\mathbf{j}}$$
$$\vec{r}_{-Q_{\text{abaixo}}} = X\,\hat{\mathbf{i}} - Y\,\hat{\mathbf{j}}$$

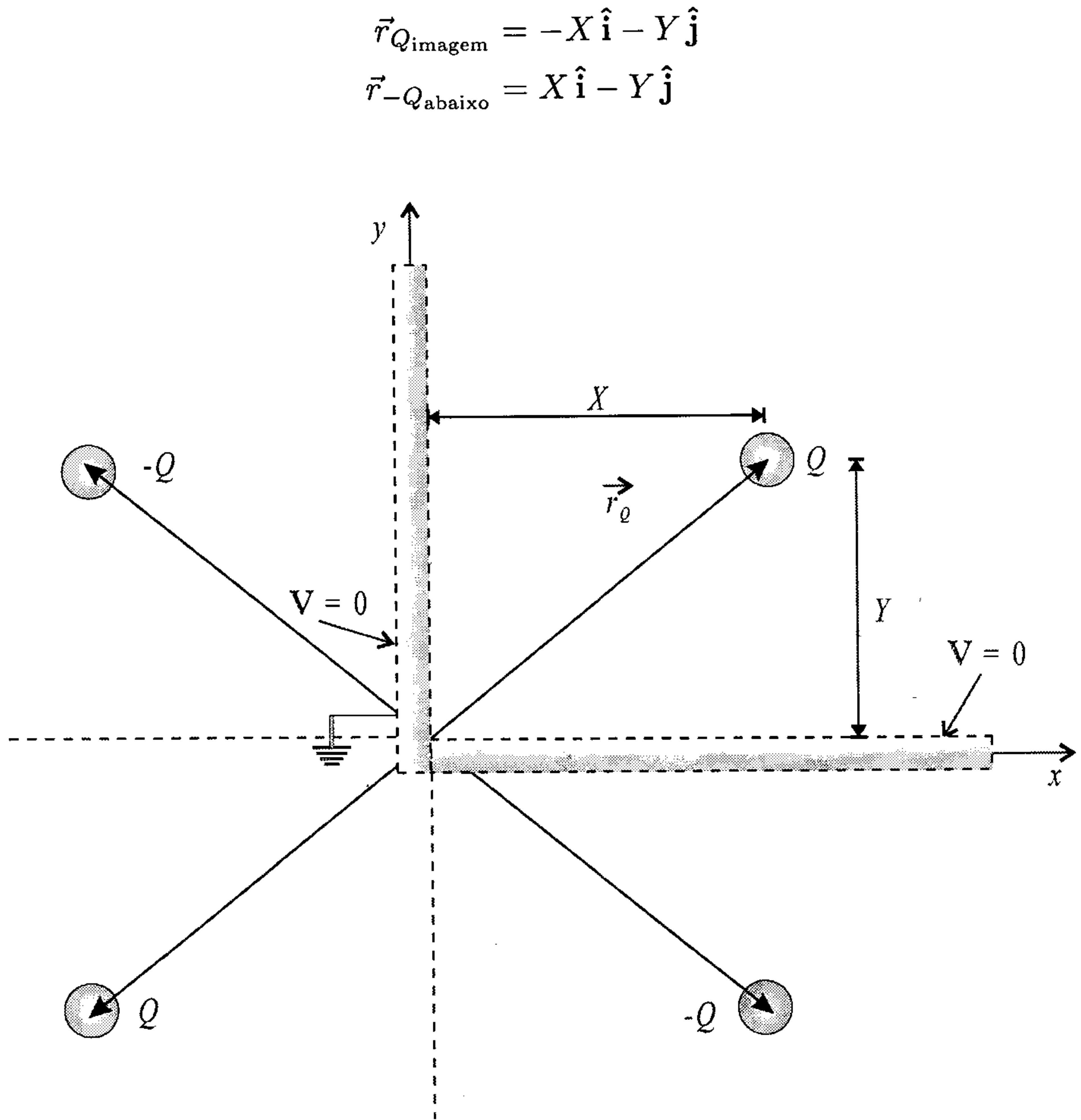



Figura 7.5: Configuração das cargas-imagem para dois planos que se interceptam em ângulo reto.

O potencial elétrico gerado por estas quatro cargas num ponto $\vec{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$ do espaço é dado pela soma dos potenciais elétricos de cada carga, isto é,

$$\mathbb{V}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Q}{|\vec{r}-\vec{r}_{Q_{\text{esq.}}}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_{Q_{\text{imagem}}}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Q}{|\vec{r}-\vec{r}_{Q_{\text{abaixo}}}|}$$

Como

$$\begin{aligned}
\vec{r}-\vec{r}_Q &= (x-X)\,\hat{\mathbf{i}}+(y-Y)\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}\\
|\vec{r}-\vec{r}_Q| &= \sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2+z^2}\\
\vec{r}-\vec{r}_{Q_{\text{esq.}}} &= (x+X)\,\hat{\mathbf{i}}+(y-Y)\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}\\
|\vec{r}-\vec{r}_{Q_{\text{esq.}}}| &= \sqrt{(x+X)^2+(y-Y)^2+z^2}\\
\vec{r}-\vec{r}_{Q_{\text{imagem}}} &= (x+X)\,\hat{\mathbf{i}}+(y+Y)\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}\\
|\vec{r}-\vec{r}_{Q_{\text{imagem}}}| &= \sqrt{(x+X)^2+(y+Y)^2+z^2}\\
\vec{r}-\vec{r}_{Q_{\text{abaixo}}} &= (x-X)\,\hat{\mathbf{i}}+(y+Y)\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}\\
|\vec{r}-\vec{r}_{Q_{\text{abaixo}}}| &= \sqrt{(x-X)^2+(y+Y)^2+z^2}
\end{aligned}$$

o potencial fica

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\Bigg[&\frac{1}{\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2+z^2}}\\
&-\frac{1}{\sqrt{(x+X)^2+(y-Y)^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+X)^2+(y+Y)^2+z^2}}\\
&-\frac{1}{\sqrt{(x-X)^2+(y+Y)^2+z^2}}\Bigg]
\end{aligned}$$

Sobre o plano horizontal, situado em $x=0$, o potencial é

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(0,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\Bigg[&\frac{1}{\sqrt{(-X)^2+(y-Y)^2+z^2}}\\
&-\frac{1}{\sqrt{X^2+(y-Y)^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{X^2+(y+Y)^2+z^2}}\\
&-\frac{1}{\sqrt{(-X)^2+(y+Y)^2+z^2}}\Bigg]
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(0,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\Bigg[&\frac{1}{\sqrt{X^2+(y-Y)^2+z^2}}\\
&-\frac{1}{\sqrt{X^2+(y-Y)^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{X^2+(y+Y)^2+z^2}}\\
&-\frac{1}{\sqrt{X^2+(y+Y)^2+z^2}}\Bigg]
\end{aligned}$$

e então,

$$\mathbb{V}(0, y, z) = 0$$

como deve ser. O potencial no outro plano, situado em $y = 0$, torna-se

$$\mathbb{V}(x, 0, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-X)^2+(-Y)^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+X)^2+(-Y)^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+X)^2+Y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-X)^2+Y^2+z^2}}\right]$$

ou

$$\mathbb{V}(x, 0, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-X)^2+Y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+X)^2+Y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+X)^2+Y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-X)^2+Y^2+z^2}}\right]$$

e então, da mesma forma como acontece com o outro plano, temos

$$\mathbb{V}(x, 0, z) = 0$$

e assim, as duas condições de contorno são satisfeitas, como deve ser. Podemos encontrar o campo elétrico através do gradiente negativo do potencial, ou então, mediante a soma vetorial dos campos elétricos das cargas pontuais. De posse do campo elétrico, podemos obter as densidades de cargas sobre os planos, bem como a força que a carga faz sobre cada um dos planos. Esta parte é deixada como exercício (veja o exercício 7.3).

7.1.3 Carga Pontual entre Dois Planos Paralelos

Continuando a trabalhar com planos, podemos estudar o sistema formado por uma carga pontual situada na região entre dois planos condutores

infinitos, aterrados e paralelos, separados por uma distância h, como mostra a figura 7.6.

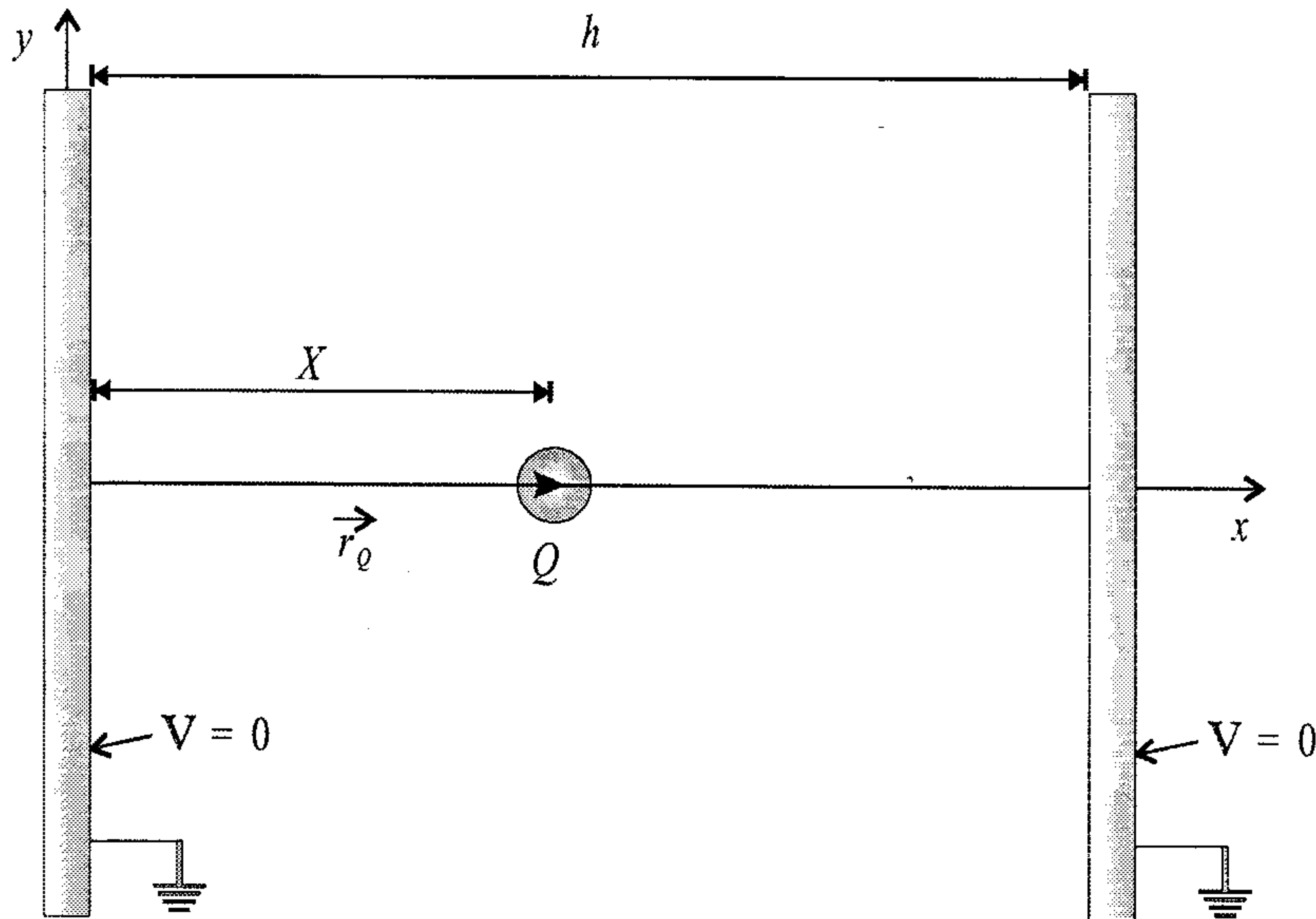



Figura 7.6: Carga pontual entre dois planos paralelos condutores aterrados.

Neste caso, os planos paralelos se comportam como espelhos paralelos, e se você colocar um objeto entre espelhos paralelos, verá infinitas imagens.

Na prática, o número de imagens é grande mas não infinito, porque os espelhos absorvem um pouco da luz. Se eles fossem perfeitos e refletissem toda a luz incidente, aí sim o número de imagens seria infinito.

Assim, para o problema eletrostático, teremos infinitas cargas-imagem, pois cada imagem tem sua própria imagem em relação aos dois planos. A figura 7.7 apresenta algumas dessas imagens.

Os planos estão colocados em $x = 0$ e $x = h$, e a posição da carga real é

$$\vec{r}_Q = X\,\hat{\mathbf{i}}$$

Esta carga produz duas imagens, situadas à esquerda do plano em $x = 0$ e à direita do plano em $x = h$. Ambas possuem carga $-Q$, e suas posições são

$$\vec{r}_{-Q_{1e}} = -X\,\hat{\mathbf{i}}$$
$$\vec{r}_{-Q_{1d}} = (2h - X)\,\hat{\mathbf{i}}$$

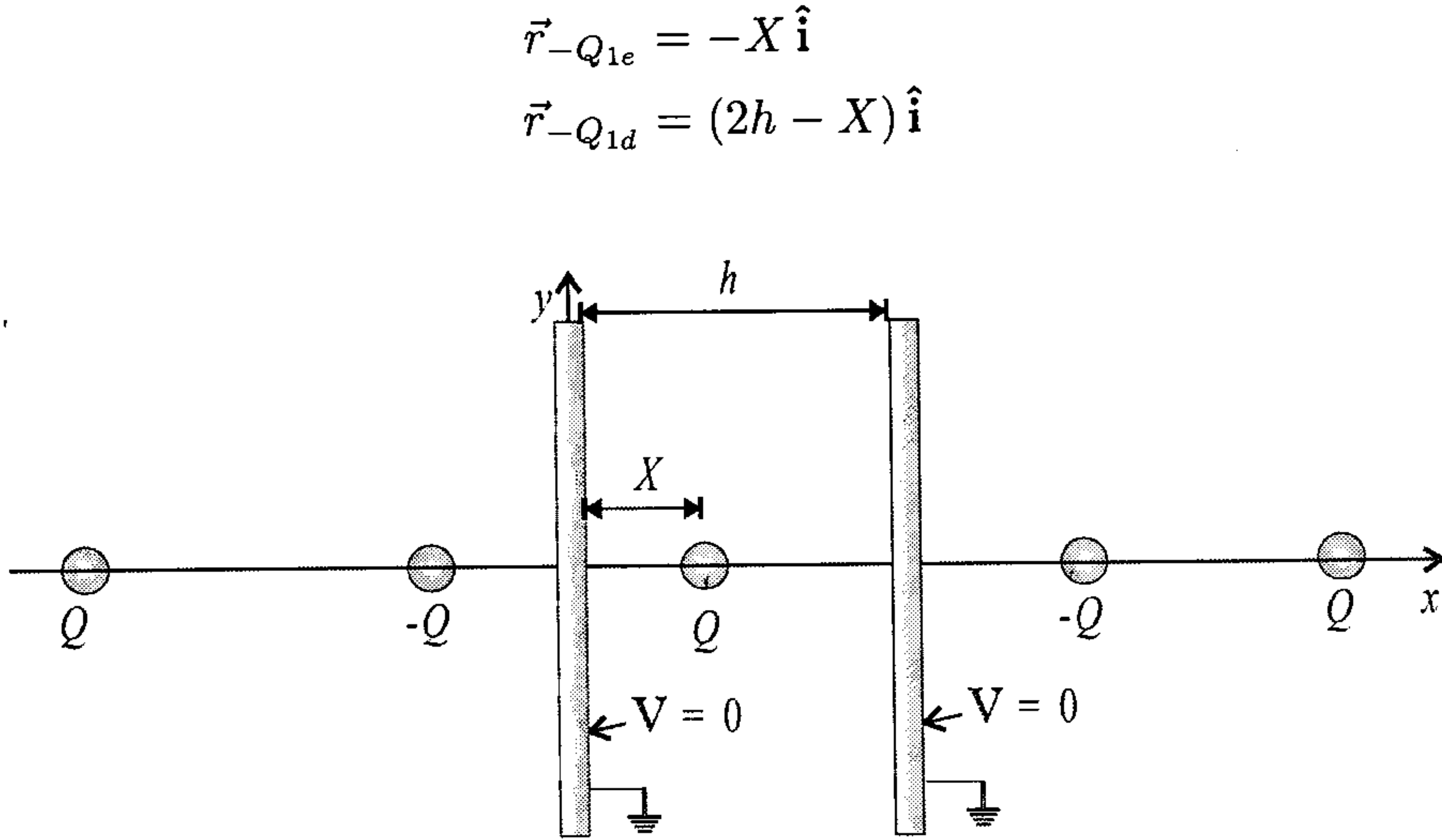



Figura 7.7: Algumas das infinitas cargas-imagem para o problema de uma carga pontual entre dois planos condutores paralelos.

onde o índice 1 representa as primeiras cargas-imagem, e os índices e e d indicam, respectivamente, as posições à esquerda do plano em $x = 0$ e à direita do plano em $x = h$. Estas cargas têm suas imagens, de carga Q, situadas em

$$\vec{r}_{Q_{2e}} = (X - 2h)\,\hat{\mathbf{i}}$$
$$\vec{r}_{Q_{2d}} = (2h + X)\,\hat{\mathbf{i}}$$

Por sua vez, estas cargas também têm suas imagens, que agora têm cargas $-Q$. Elas estão nas posições

$$\vec{r}_{-Q_{3e}} = -(X + 2h)\,\hat{\mathbf{i}}$$
$$\vec{r}_{-Q_{3d}} = (4h - X)\,\hat{\mathbf{i}}$$

As imagens das cargas estão localizadas em

$$\vec{r}_{Q_{4e}} = (X - 4h)\,\hat{\mathbf{i}}$$
$$\vec{r}_{Q_{4d}} = (4h + X)\,\hat{\mathbf{i}}$$

e elas têm cargas Q, e assim sucessivamente. As distâncias entre as cargas-imagem e a carga Q real são

$$\vec{r}_Q - \vec{r}_{-Q_{1e}} = 2X\,\hat{\mathbf{i}} \qquad |\vec{r}_Q - \vec{r}_{-Q_{1e}}| = 2X$$
$$\vec{r}_Q - \vec{r}_{-Q_{1d}} = 2(X-h)\,\hat{\mathbf{i}} \qquad |\vec{r}_Q - \vec{r}_{-Q_{1d}}| = 2(h-X)$$
$$\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q_{2e}} = 2h\,\hat{\mathbf{i}} \qquad |\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q_{2e}}| = 2h$$
$$\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q_{2d}} = -2h\,\hat{\mathbf{i}} \qquad |\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q_{2d}}| = 2h$$
$$\vec{r}_Q - \vec{r}_{-Q_{3e}} = 2(X+h)\,\hat{\mathbf{i}} \qquad |\vec{r}_Q - \vec{r}_{-Q_{3e}}| = 2(X+h)$$
$$\vec{r}_Q - \vec{r}_{-Q_{3d}} = 2(X-2h)\,\hat{\mathbf{i}} \qquad |\vec{r}_Q - \vec{r}_{-Q_{3d}}| = 2(2h-X)$$
$$\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q_{4e}} = 4h\,\hat{\mathbf{i}} \qquad |\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q_{4e}}| = 4h$$
$$\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q_{4d}} = -4h\,\hat{\mathbf{i}} \qquad |\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q_{4d}}| = 4h$$

A partir das grandezas acima, poderíamos calcular o potencial elétrico, somando as contribuições de todas as cargas. Entretanto, uma grandeza relevante aqui é a força que os planos fazem sobre a carga real Q, que é a mesma força que as cargas-imagem exercem sobre Q, e que pode ser calculada através da lei de Coulomb, mediante a soma de todas as forças envolvidas entre a carga Q e as cargas Q', dadas por

$$\vec{F} = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q'}}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q'}|^3}$$

e assim, obtemos

$$\begin{aligned}\vec{F} = {}& \frac{Q(-Q_{1e})}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_{-Q_{1e}}}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_{-Q_{1e}}|^3} + \frac{Q(-Q_{1d})}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_{-Q_{1d}}}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_{-Q_{1d}}|^3} \\ & + \frac{QQ_{2e}}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q_{2e}}}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q_{2e}}|^3} + \frac{QQ_{2d}}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q_{2d}}}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q_{2d}}|^3} \\ & + \frac{Q(-Q_{3e})}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_{-Q_{3e}}}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_{-Q_{3e}}|^3} + \frac{Q(-Q_{3d})}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_{-Q_{3d}}}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_{-Q_{3d}}|^3} \\ & + \frac{QQ_{4e}}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q_{4e}}}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q_{4e}}|^3} + \frac{QQ_{4d}}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q_{4d}}}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q_{4d}}|^3} + \cdots\end{aligned}$$

ou

$$\vec{F} = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{2X\,\hat{\mathbf{i}}}{(2X)^3} - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{2(X-h)\,\hat{\mathbf{i}}}{\left[2(h-X)\right]^3} + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{2h\,\hat{\mathbf{i}}}{(2h)^3}$$
$$+ \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{-2h\,\hat{\mathbf{i}}}{(2h)^3} - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{2(X+h)\,\hat{\mathbf{i}}}{\left[2(X+h)\right]^3} - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{2(X-2h)\,\hat{\mathbf{i}}}{\left[2(2h-X)\right]^3}$$
$$+ \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{4h\,\hat{\mathbf{i}}}{(4h)^3} + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{-4h\,\hat{\mathbf{i}}}{(4h)^3} + \cdots$$

É importante notar que, na expressão acima, as forças de repulsão que envolvem a carga real e as imagens Q se anulam mutuamente. Encontramos então,

$$\vec{F} = -\frac{Q^2\,\hat{\mathbf{i}}}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{4X^2} - \frac{1}{4(h-X)^2} + \frac{1}{4(X+h)^2} - \frac{1}{4(2h-X)^2} + \cdots\right\}$$

Vamos definir $r = \frac{X}{h}$, ou $X = rh$, e assim,

$$\vec{F} = -\frac{Q^2\,\hat{\mathbf{i}}}{16\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{r^2h^2} - \frac{1}{(h-rh)^2} + \frac{1}{(rh+h)^2} - \frac{1}{(2h-rh)^2} + \cdots\right\}$$

ou

$$\vec{F} = -\frac{Q^2\,\hat{\mathbf{i}}}{16\pi\epsilon_0 h^2}\left\{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(1-r)^2} + \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{1}{(2-r)^2} + \cdots\right\}$$

que pode ser escrita, em termos de uma série, como

$$\vec{F} = -\frac{Q^2\,\hat{\mathbf{i}}}{16\pi\epsilon_0 h^2}\left\{\frac{1}{r^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(r+n)^2} - \frac{1}{(n-r)^2}\right]\right\}$$

que fornece a força sobre a carga Q. Obtemos o campo elétrico através de

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{Q\,\hat{\mathbf{i}}}{16\pi\epsilon_0 h^2}\left\{\frac{1}{r^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(r+n)^2} - \frac{1}{(n-r)^2}\right]\right\}$$

O potencial elétrico fica como exercício (veja o exercício 7.5). Agora vamos estudar alguns problemas em coordenadas esféricas.

7.2 Exemplos do Método das Imagens em Coordenadas Esféricas

Passamos agora ao estudo de alguns problemas em que aplicamos o método das imagens em coordenadas esféricas.

7.2.1 Carga Pontual e uma Esfera Condutora Aterrada

O problema mais simples envolvendo coordenadas esféricas e o método das imagens é o de uma carga pontual Q situada em frente a uma esfera condutora de raio R, ligada à Terra, como mostra a figura 7.8.

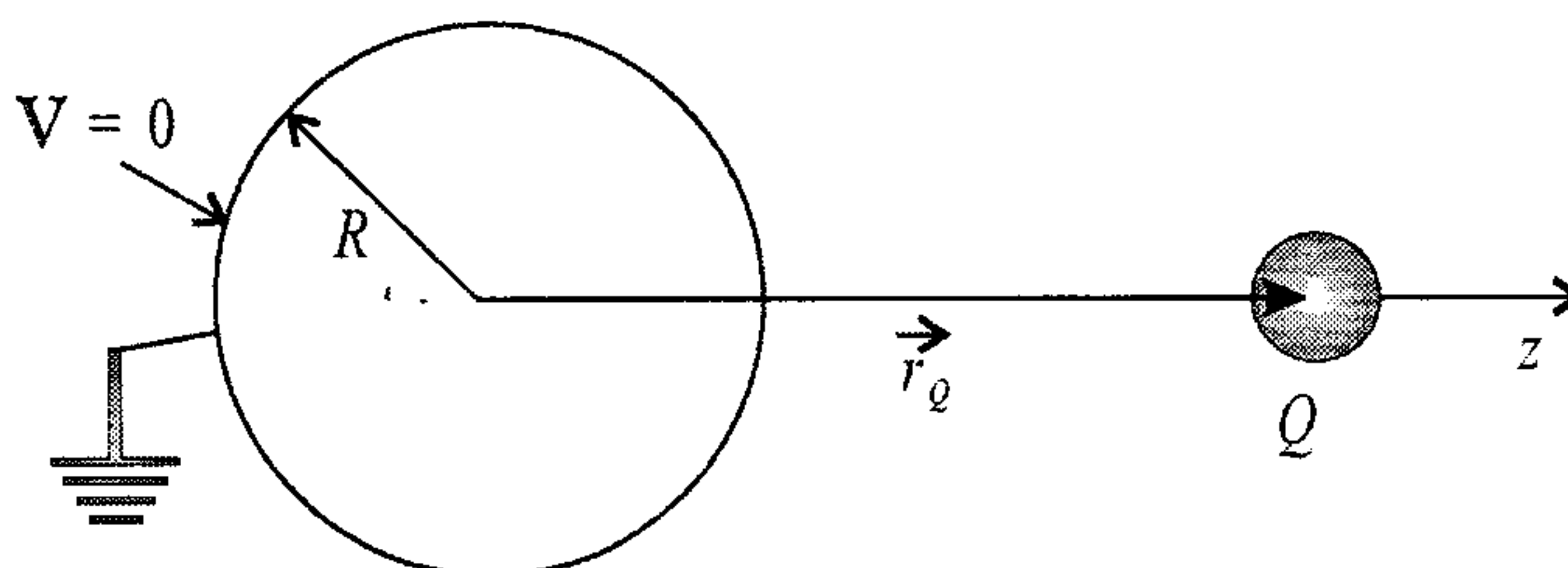



Figura 7.8: Uma carga pontual Q em frente a uma esfera condutora aterrada.

Desta figura, percebemos que, para reproduzir a condição de potencial nulo sobre a esfera, devemos colocar uma carga q dentro dela, na linha que une o seu centro com a carga Q, como mostra a figura 7.9.

Nos casos anteriores, em que as superfícies de contorno eram planos, sabíamos de antemão que as cargas-imagem tinham o mesmo valor que as cargas das quais elas eram imagens, mas sinais opostos. Isso pode ser entendido mediante uma analogia com a reflexão por espelhos planos, cuja imagem, do mesmo tamanho que o objeto, é invertida. Agora temos uma superfície esférica, e o valor da carga-imagem não pode ser conhecido *a priori*. Para determiná-lo, precisamos considerar explicitamente a condição de que, sobre a superfície esférica condutora aterrada, o potencial deve ser $\mathbb{V} = 0$. Assim, vamos escrever o potencial elétrico para um ponto qualquer $P(r, \theta, \phi)$ do espaço.

As posições das cargas são

$$\vec{r}_Q = D\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\vec{r}_q = d\,\hat{\mathbf{k}}$$

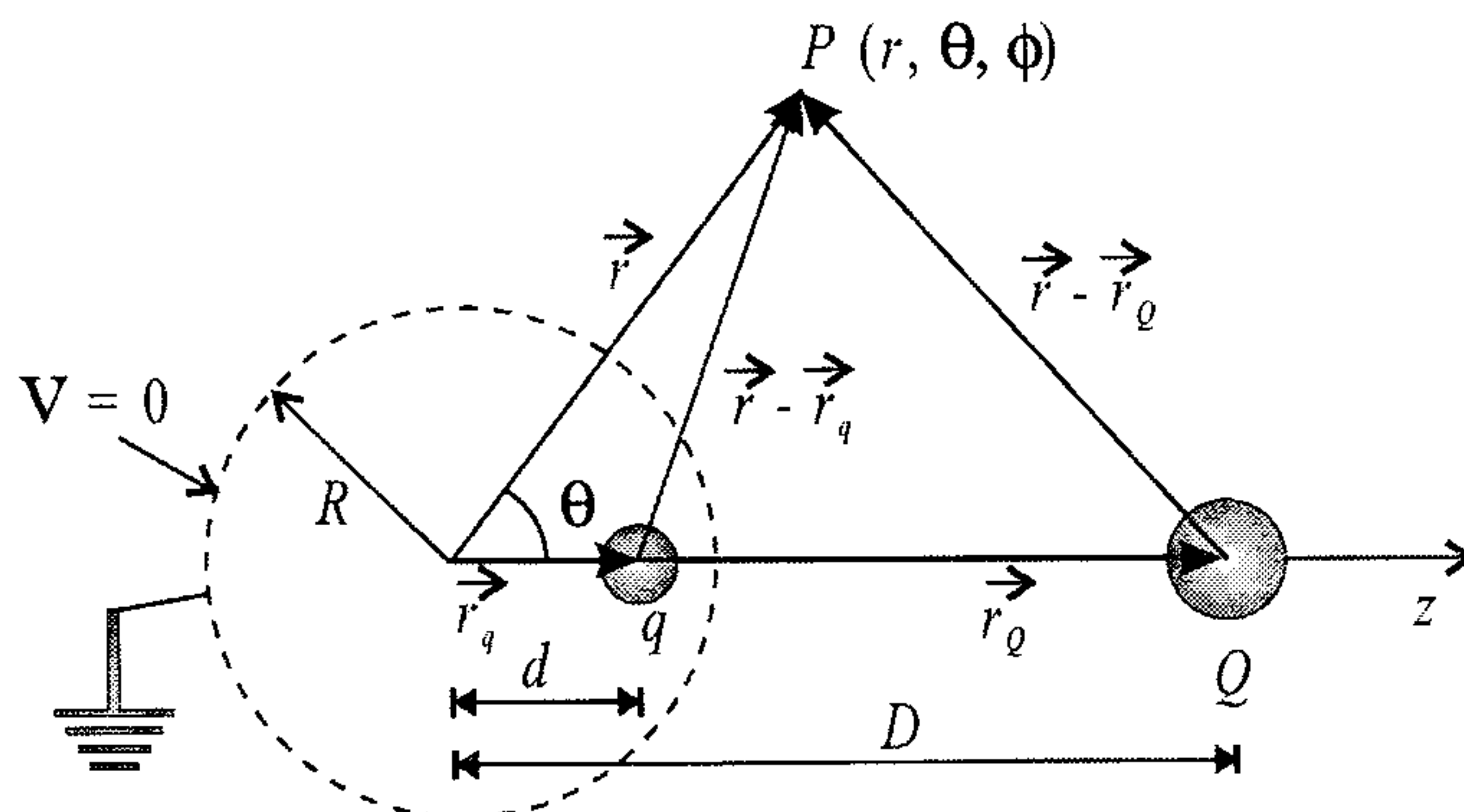



Figura 7.9: Carga-imagem para o problema da esfera condutora aterrada.

e o ponto P está situado em

$$\vec{r} = r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$

Temos, desse modo,

$$\vec{r} - \vec{r}_Q = r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{j}} + (r\cos\theta - D)\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$|\vec{r} - \vec{r}_Q| = \sqrt{r^2\,\text{sen}^2\,\theta\cos^2\phi + r^2\,\text{sen}^2\,\theta\,\text{sen}^2\,\phi + r^2\cos^2\theta - 2rD\cos\theta + D^2}$$
$$|\vec{r} - \vec{r}_Q| = \sqrt{r^2 - 2rD\cos\theta + D^2}$$
$$\vec{r} - \vec{r}_q = r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{j}} + (r\cos\theta - d)\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$|\vec{r} - \vec{r}_q| = \sqrt{r^2\,\text{sen}^2\,\theta\cos^2\phi + r^2\,\text{sen}^2\,\theta\,\text{sen}^2\,\phi + r^2\cos^2\theta - 2rd\cos\theta + d^2}$$
$$|\vec{r} - \vec{r}_q| = \sqrt{r^2 - 2rd\cos\theta + d^2}$$

e o potencial elétrico das duas cargas é

$$\mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|}$$

ou

$$\mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{r^2 - 2rD\cos\theta + D^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2 - 2rd\cos\theta + d^2}}$$

Em $r = R$, que é a superfície da esfera, devemos ter $\mathbb{V} = 0$. Assim,

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2 - 2RD\cos\theta + D^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{R^2 - 2Rd\cos\theta + d^2}} = 0$$

ou

$$\frac{Q}{\sqrt{R^2 - 2RD\cos\theta + D^2}} = -\frac{q}{\sqrt{R^2 - 2Rd\cos\theta + d^2}}$$

Vamos colocar R em evidência no lado esquerdo da expressão acima, e d no lado direito, ou seja,

$$\frac{Q}{R\sqrt{1 - 2\frac{D}{R}\cos\theta + \frac{D^2}{R^2}}} = -\frac{q}{d\sqrt{1 - 2\frac{R}{d}\cos\theta + \frac{R^2}{d^2}}}$$

As duas raízes tornam-se iguais se fizermos

$$\frac{D}{R} = \frac{R}{d}$$

pois assim,

$$\frac{Q}{R\sqrt{1 - 2\frac{D}{R}\cos\theta + \frac{D^2}{R^2}}} = -\frac{q}{d\sqrt{1 - 2\frac{D}{R}\cos\theta + \frac{D^2}{R^2}}}$$

e então, obtemos, para o valor da carga q, a relação

$$\frac{Q}{R} = -\frac{q}{d}$$

e encontramos a posição da carga q como sendo

$$d = \frac{R^2}{D} \tag{7.3}$$

tendo a carga o valor

$$q = -\frac{d}{R}Q = -\frac{R}{D}Q \tag{7.4}$$

É importante notar que, quando a carga Q se afasta da esfera, D aumenta, a carga-imagem q tende ao centro da esfera, e o valor de q diminui. Por outro lado, quando Q se aproxima da esfera, D diminui, e a carga q se aproxima da superfície da esfera, pelo lado de dentro. E finalmente, se Q está sobre a superfície da esfera, pelo lado de fora, $D = R$, e a carga q também está sobre a superfície da esfera, só que pelo lado de dentro, e ela vale $-Q$.

Com as definições acima, o potencial elétrico fica

$$\mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{r^2 - 2rD\cos\theta + D^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{RQ}{D\sqrt{r^2 - 2r\frac{R^2}{D}\cos\theta + \frac{R^4}{D^2}}} \tag{7.5}$$

e podemos obter o campo elétrico externo à esfera através da soma vetorial dos campos produzidos pelas duas cargas, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q(\vec{r} - \vec{r}_Q)}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q(\vec{r} - \vec{r}_q)}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{j}} + (r\cos\theta - D)\,\hat{\mathbf{k}}}{\left(r^2 - 2rD\cos\theta + D^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right.$$
$$\left. - \frac{R}{D}\frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{j}} + (r\cos\theta - \frac{R^2}{D})\,\hat{\mathbf{k}}}{\left(r^2 - 2r\frac{R^2}{D}\cos\theta + \frac{R^4}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Podemos reescrever este campo mediante a consideração de que, pelas equações 1.37 e 1.38,

$$r\,\hat{\mathbf{r}} = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{j}} + r\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\hat{\mathbf{k}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Obtemos, portanto,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{r\,\hat{\mathbf{r}} - D(\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\left(r^2 - 2rD\cos\theta + D^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R}{D}\frac{r\,\hat{\mathbf{r}} - \frac{R^2}{D}(\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\left(r^2 - 2r\frac{R^2}{D}\cos\theta + \frac{R^4}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(r - D\cos\theta)\,\hat{\mathbf{r}} + D\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\left(r^2 - 2rD\cos\theta + D^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R}{D}\frac{(r - \frac{R^2}{D}\cos\theta)\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{R^2}{D}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\left(r^2 - 2r\frac{R^2}{D}\cos\theta + \frac{R^4}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Sobre a superfície da esfera, em $r = R$, o campo elétrico vale

$$\vec{\mathcal{E}}(r = R, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(R - D\cos\theta)\,\hat{\mathbf{r}} + D\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\left(R^2 - 2RD\cos\theta + D^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R}{D}\frac{(R - \frac{R^2}{D}\cos\theta)\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{R^2}{D}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\left(R^2 - 2\frac{R^3}{D}\cos\theta + \frac{R^4}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

ou, colocando D^2 em evidência no primeiro termo e R^2 no segundo,

$$\vec{\mathcal{E}}(r = R, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(R - D\cos\theta)\,\hat{\mathbf{r}} + D\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{D^3\left(\frac{R^2}{D^2} - 2\frac{R}{D}\cos\theta + 1\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R}{D}\frac{(R - \frac{R^2}{D}\cos\theta)\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{R^2}{D}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{R^3\left(1 - 2\frac{R}{D}\cos\theta + \frac{R^2}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

ou então,

$$\vec{\mathcal{E}}(r = R, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\left(1 - 2\frac{R}{D}\cos\theta + \frac{R^2}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \times \left[\frac{R}{D^3}\hat{\mathbf{r}} - \frac{\cos\theta}{D^2}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{D^2}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{RD}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\cos\theta}{D^2}\hat{\mathbf{r}} - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{D^2}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}}(r = R, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\left(1 - 2\frac{R}{D}\cos\theta + \frac{R^2}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{RD}\left[\frac{R^2}{D^2} - 1\right]\hat{\mathbf{r}}$$

A densidade de carga induzida sobre a esfera pode ser obtida através da equação 6.44, ou seja, considerando que a normal à superfície é dada pelo versor $\hat{\mathbf{r}}$, temos

$$\begin{aligned}\sigma(R, \theta) &= \epsilon_0\vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{\mathbf{r}} \\ &= \epsilon_0\frac{1}{4\pi\epsilon_0 RD}\frac{Q}{\left(1 - 2\frac{R}{D}\cos\theta + \frac{R^2}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{R^2}{D^2} - 1\right]\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}} \\ \sigma(R, \theta) &= -\frac{1}{4\pi RD}\frac{Q}{\left(1 - 2\frac{R}{D}\cos\theta + \frac{R^2}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[1 - \frac{R^2}{D^2}\right]\end{aligned}$$

A carga total induzida sobre a esfera é obtida mediante a integração desta expressão sobre toda a área da esfera. Dentro da esfera está a carga-imagem,

de valor q, que induz, sobre a superfície interna da esfera, uma carga total $-q$. Entretanto, pela lei de Gauss, e considerando que as cargas devem ser conservadas, e além disso, lembrando que toda a carga transferida a um condutor se distribui sobre a sua superfície, na parte externa da esfera deve aparecer uma carga induzida de valor q, para que, ao considerarmos uma superfície gaussiana sobre a esfera, a carga total dentro da gaussiana seja q, que é o valor da carga-imagem. A verificação é deixada como exercício (veja o exercício 7.7). A força que a esfera faz sobre a carga Q pode ser obtida mediante a consideração de que ela tem o mesmo valor que a força que a carga q exerce sobre Q. Assim, como a distância entre as cargas é dada por

$$\begin{aligned} |\vec{r}_Q - \vec{r}_q| &= D - d \\ &= D - \frac{R^2}{D} \\ |\vec{r}_Q - \vec{r}_q| &= D\left(1 - \frac{R^2}{D^2}\right) \end{aligned}$$

a força entre elas fica, utilizando a lei de Coulomb,

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_q}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_q|^3} \\ &= -\frac{Q^2\frac{R}{D}}{4\pi\epsilon_0}\frac{(D - \frac{R^2}{D})\,\hat{\mathbf{k}}}{D^3\left(1 - \frac{R^2}{D^2}\right)^3} \\ &= -\frac{Q^2R}{4\pi\epsilon_0 D^3}\frac{1 - \frac{R^2}{D^2}}{\left(1 - \frac{R^2}{D^2}\right)^3}\,\hat{\mathbf{k}} \\ &= -\frac{Q^2R}{4\pi\epsilon_0 D^3}\left(1 - \frac{R^2}{D^2}\right)^{-2}\hat{\mathbf{k}} \\ &= -\frac{Q^2R}{4\pi\epsilon_0 D^3}\frac{D^4}{\left(D^2 - R^2\right)^2}\,\hat{\mathbf{k}} \\ \vec{F} &= -\frac{Q^2R}{4\pi\epsilon_0}\frac{D}{\left(D^2 - R^2\right)^2}\,\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Observe que a força entre as cargas e, conseqüentemente, entre a esfera condutora e a carga Q, é atrativa, como era de se esperar, já que as cargas induzidas na esfera têm sinal contrário ao da carga Q.

7.2.2 Carga Pontual e uma Esfera Condutora Carregada

Um problema semelhante ao que foi visto na seção anterior consiste em considerar a esfera como isolada, mas com uma carga inicial Q'. Para esta situação, a solução para o problema será imediata se percebermos que é válido, neste caso, supor que a situação física acima é obtida através de duas etapas. Na primeira, consideramos uma esfera condutora aterrada em frente à carga Q. Como já vimos no problema anterior, nesta situação aparece uma carga induzida q sobre a superfície da esfera. Na segunda, cortamos a ligação da esfera com a Terra e colocamos uma carga $Q' - q$ sobre a sua superfície. Isso faz com que a carga total sobre a esfera seja $Q' - q + q = Q'$, que é a situação inicial. Como a carga q está distribuída de forma que as forças elétricas estão todas compensadas, temos uma situação de equilíbrio, que não é perturbado quando as outras cargas $Q' - q$ são transferidas para a esfera, desde que elas se distribuam de forma homogênea sobre a superfície. Estas cargas, como já vimos antes com relação a pontos situados fora da esfera, podem ser consideradas como estando concentradas no centro da esfera, em $\vec{r} = 0$. Portanto, o potencial elétrico para este problema é a soma do potencial do problema anterior com o potencial gerado por uma carga pontual situada na origem, de valor $Q' - q$, isto é,

$$\mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{r^2 - 2rD\cos\theta + D^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{RQ}{D\sqrt{r^2 - 2r\frac{R^2}{D}\cos\theta + \frac{R^4}{D^2}}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q' - q}{r}$$

ou, utilizando o valor de $q = -\frac{R}{D}Q$,

$$\mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{r^2 - 2rD\cos\theta + D^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{RQ}{D\sqrt{r^2 - 2r\frac{R^2}{D}\cos\theta + \frac{R^4}{D^2}}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q' + \frac{R}{D}Q}{r} \tag{7.6}$$

O campo elétrico, a densidade de cargas e a carga total sobre a superfície da esfera são deixados como exercício (veja o exercício 7.8). A força entre a esfera e a carga Q pode ser obtida mediante a consideração das forças que as cargas q (situada em $\vec{r}_q = \frac{R^2}{D}\hat{\mathbf{k}}$) e $Q' - q$ (situada na origem) exercem sobre a carga Q. Utilizando a lei de Coulomb, temos

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_q}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_q|^3} + \frac{Q(Q'-q)}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q'-q}}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_{Q'-q}|^3} \\
&= -\frac{Q^2\frac{R}{D}}{4\pi\epsilon_0}\frac{(D-\frac{R^2}{D})\,\hat{\mathbf{k}}}{D^3\left(1-\frac{R^2}{D^2}\right)^3} + \frac{Q(Q'+Q\frac{R}{D})}{4\pi\epsilon_0}\frac{D\,\hat{\mathbf{k}}}{D^3} \\
&= \left[-\frac{Q^2R}{4\pi\epsilon_0 D^3}\frac{1-\frac{R^2}{D^2}}{\left(1-\frac{R^2}{D^2}\right)^3} + \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{D^2} - \frac{Q^2R}{4\pi\epsilon_0 D^3}\right]\hat{\mathbf{k}} \\
&= \left\{\frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{D^2} + \frac{Q^2R}{4\pi\epsilon_0 D^3}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{R^2}{D^2}\right)^2} + 1\right]\right\}\hat{\mathbf{k}} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D^2}\left\{Q' - \frac{QR}{D}\left[\frac{D^4}{\left(D^2-R^2\right)^2} - 1\right]\right\}\hat{\mathbf{k}} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D^2}\left[Q' - \frac{QR}{D}\frac{D^4-\left(D^2-R^2\right)^2}{\left(D^2-R^2\right)^2}\right]\hat{\mathbf{k}} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D^2}\left[Q' - \frac{QR^3(2D^2-R^2)}{D\left(D^2-R^2\right)^2}\right]\hat{\mathbf{k}} \\
\vec{F} &= \left[\frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 D^2} - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^3(2D^2-R^2)}{D\left(D^2-R^2\right)^2}\right]\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}
$$

Esta expressão é bastante interessante e merece uma discussão mais detalhada. Note que a segunda parcela da força é sempre atrativa, pois $D > R$. Já a primeira pode ser atrativa, quando Q' tem sinal oposto ao de Q, nula, quando a carga Q' é nula e a esfera está descarregada, ou repulsiva, quando Q' e Q têm mesmo sinal. Assim, se Q e Q' têm sinais opostos, a força resultante que a esfera exerce sobre a carga Q é sempre atrativa, o que era de se esperar.

Quando Q e Q' têm mesmo sinal, a situação é um pouco diferente. Como uma parcela da força é sempre atrativa, existe uma certa região em que essa parcela é maior do que a parte repulsiva, de modo que a resultante é atrativa, o que é interessante, porque significa que, embora as cargas Q e Q' sejam de mesmo sinal, aparece uma força atrativa entre a esfera e a carga Q. Quando $D \gg R$, podemos desconsiderar os termos que envolvem R nos parênteses, e assim, a força torna-se

$$
\vec{F} = \left[\frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 D^2} - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{2R^3D^2}{D^5}\right]\hat{\mathbf{k}}
$$

ou, como $D \gg R$, podemos desprezar o segundo termo em comparação com o primeiro, isto é,

$$\vec{F} = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 D^2}\,\hat{\mathbf{k}}$$

de forma que a força é repulsiva a grandes distâncias. No entanto, quando $D \gtrsim R$, a parcela atrativa é maior do que a repulsiva, como pode ser visto se fizermos $D = R + \Delta$, onde Δ é pequeno, ou seja,

$$\vec{F} = \left[\frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 (R+\Delta)^2} - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^3(2(R+\Delta)^2 - R^2)}{(R+\Delta)\big[(R+\Delta)^2 - R^2\big]^2}\right]\hat{\mathbf{k}}$$
$$\vec{F} = \left[\frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + 2R\Delta + \Delta^2)} - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^3(2R^2 + 4R\Delta + \Delta^2 - R^2)}{(R+\Delta)\big(R^2 + 2R\Delta + \Delta^2 - R^2\big)}\right]\hat{\mathbf{k}}$$

Como Δ é muito pequeno, podemos desprezar os termos que envolvem Δ^2, e assim,

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q'}{R^2 + 2R\Delta} - Q\frac{R^3(R^2 + 4R\Delta)}{2R^2\Delta + 2R\Delta^2}\right]\hat{\mathbf{k}} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q'}{R(R+2\Delta)} - Q\frac{R^4(R+4\Delta)}{2R^2\Delta}\right]\hat{\mathbf{k}} \\
\vec{F} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q'}{R(R+2\Delta)} - Q\frac{R^2(R+4\Delta)}{2\Delta}\right]\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Agora, considerando que $R \gg \Delta$, podemos fazer a aproximação $R + \Delta \approx R$, e assim,

$$\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q'}{R^2} - \frac{Q}{2}\frac{R^3}{\Delta}\right]\hat{\mathbf{k}}$$

e como Δ é bem pequeno, $\frac{1}{\Delta}$ é bem grande. Segue-se então que o termo negativo é maior do que o positivo, e a força é atrativa a curtas distâncias da esfera. Assim, quando uma certa quantidade de carga de uma superfície se afasta ligeiramente dela, a carga, ao invés de ser repelida pelas outras cargas de mesmo sinal que ficaram sobre a superfície, é atraída de volta por causa da força exercida pela carga-imagem, que é sempre atrativa. Quando a carga se afasta mais, o que ocorre quando algum trabalho é realizado sobre ela, a força passa a ser repulsiva, como era esperado. A função-trabalho de um metal, que é uma grandeza importante no efeito fotoelétrico, é dada, na

sua quase totalidade, por esse trabalho, o qual deve ser feito contra as forças atrativas que agem a curtas distâncias da superfície do metal e que dificultam a retirada dos fotoelétrons do material.

7.2.3 Carga Pontual e uma Esfera Condutora Mantida a um Potencial Fixo

Como último exemplo, vamos discutir o problema de uma carga Q situada em frente a uma esfera condutora isolada, cujo potencial elétrico na superfície está fixo no valor V_0. Para este caso, devemos lembrar o exemplo 6.4, em que estudamos uma esfera de raio R, submetida também a um potencial fixo, verificando que, para pontos situados fora da esfera, ela se comporta como se fosse uma carga pontual q', situada no centro da esfera, com um potencial dado pela equação 6.62, se a carga tiver o valor

$$q' = 4\pi\epsilon_0 R V_0$$

No problema anterior, supusemos que havia uma carga $q' = Q' - q = Q' + \frac{R}{D}Q$ no centro da esfera, para dar conta da condição de que a esfera estava isolada e possuía uma carga Q' sobre a sua superfície. Se usarmos a equivalência entre carga e potencial estabelecida no exemplo 6.4, podemos utilizar a expressão 7.6 e obter, para o potencial elétrico do problema atual,

$$\mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{r^2 - 2rD\cos\theta + D^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{RQ}{D\sqrt{r^2 - 2r\frac{R^2}{D}\cos\theta + \frac{R^4}{D^2}}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi\epsilon_0 R V_0}{r}$$

ou

$$\mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{r^2 - 2rD\cos\theta + D^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{RQ}{D\sqrt{r^2 - 2r\frac{R^2}{D}\cos\theta + \frac{R^4}{D^2}}} + V_0\frac{R}{r} \quad (7.7)$$

Podemos verificar se esta expressão está correta, calculando o potencial para $r = R$, ou seja,

$$\mathbb{V}(r=R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2 - 2RD\cos\theta + D^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{RQ}{D\sqrt{R^2 - 2R\frac{R^2}{D}\cos\theta + \frac{R^4}{D^2}}} + V_0\frac{R}{R}$$

ou

$$\mathbb{V}(r=R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{D\sqrt{\frac{R^2}{D^2} - 2\frac{R}{D}\cos\theta + 1}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{RQ}{DR\sqrt{1 - 2\frac{R}{D}\cos\theta + \frac{R^2}{D^2}}} + V_0$$

ou ainda,

$$\mathbb{V}(r=R) = V_0$$

que é a condição a que a esfera está submetida, como deve ser. Portanto, o potencial elétrico é dado corretamente pela equação 7.7. O campo elétrico é obtido através do gradiente negativo desse potencial, em coordenadas esféricas, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} = -\left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{r^2 - 2rD\cos\theta + D^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{RQ}{D\sqrt{r^2 - 2r\frac{R^2}{D}\cos\theta + \frac{R^4}{D^2}}} + \frac{V_0 R}{r}\right]$$

ou então,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{2r - 2D\cos\theta}{2\left[r^2 - 2rD\cos\theta + D^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{R(2r - 2\frac{R^2}{D}\cos\theta)}{2D\left[r^2 - 2r\frac{R^2}{D}\cos\theta + \frac{R^4}{D^2}\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}\hat{\mathbf{r}} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{2rD\,\text{sen}\,\theta}{2\left[r^2 - 2rD\cos\theta + D^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{2r\frac{R^2}{D}\,\text{sen}\,\theta R}{2D\left[r^2 - 2r\frac{R^2}{D}\cos\theta + \frac{R^4}{D^2}\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}\frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} + \frac{V_0 R\,\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{r - D\cos\theta}{\left[r^2 - 2rD\cos\theta + D^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{R(Dr - R^2\cos\theta)}{D^2\left[r^2 - 2r\frac{R^2}{D}\cos\theta + \frac{R^4}{D^2}\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}\hat{\mathbf{r}}$$
$$+ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{D\,\mathrm{sen}\,\theta}{\left[r^2 - 2rD\cos\theta + D^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{R^3\,\mathrm{sen}\,\theta}{D^2\left[r^2 - 2r\frac{R^2}{D}\cos\theta + \frac{R^4}{D^2}\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$
$$+ \frac{V_0 R\,\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Note que o campo elétrico gerado na posição $\vec{r} = r\,\hat{\mathbf{r}}$ pela carga Q, situada na posição $\vec{r}_Q = D\,\hat{\mathbf{k}} = D(\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$, é dado por

$$\vec{\mathcal{E}}_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(r - D\cos\theta)\,\hat{\mathbf{r}} + D\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\left[r^2 - 2rD\cos\theta + D^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$
$$\vec{\mathcal{E}}_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{r - D\cos\theta}{\left[r^2 - 2rD\cos\theta + D^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{D\,\mathrm{sen}\,\theta}{\left[r^2 - 2rD\cos\theta + D^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}$$

e assim, o campo elétrico gerado pela esfera é obtido mediante a subtração do campo gerado por Q, dado pela expressão acima, do campo total, isto é,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\text{esfera}} = \vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{E}}_Q$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_{\text{esfera}} = -\left\{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R(Dr - R^2\cos\theta)}{D^2\left[r^2 - 2r\frac{R^2}{D}\cos\theta + \frac{R^4}{D^2}\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{V_0 R}{r^2}\right\}\hat{\mathbf{r}}$$
$$- \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^3\,\mathrm{sen}\,\theta}{D^2\left[r^2 - 2r\frac{R^2}{D}\cos\theta + \frac{R^4}{D^2}\right]^{\frac{3}{2}}}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

O campo que age na posição da carga Q é obtido a partir da consideração de que $r = D$ e $\theta = 0$, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\text{esfera}}(D, 0) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R(D^2 - R^2)\,\hat{\mathbf{r}}}{D^2\left[D^2 - 2R^2 + \frac{R^4}{D^2}\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{V_0 R}{D^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\text{esfera}}(D,0) = \left\{ \frac{V_0 R}{D^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R(D^2 - R^2)}{\frac{D^2}{D^3}\left[D^4 - 2D^2R^2 + R^4\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \hat{\mathbf{r}}$$

$$= \left\{ \frac{V_0 R}{D^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{DR(D^2 - R^2)}{\left[(D^2 - R^2)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\text{esfera}}(D,0) = \left\{ \frac{V_0 R}{D^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{DR}{\left(D^2 - R^2\right)^2} \right\} \hat{\mathbf{r}}$$

e por fim, a força que age sobre a carga Q é dada por

$$\vec{F}_Q = Q\vec{\mathcal{E}}_{\text{esfera}}$$

e fica

$$\vec{F} = \left\{ \frac{QV_0 R}{D^2} - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{DR}{\left(D^2 - R^2\right)^2} \right\} \hat{\mathbf{r}}$$

e novamente vemos que a força é atrativa para pequenas distâncias e repulsiva para distâncias maiores.

7.3 Exemplo do Método das Imagens em Coordenadas Cilíndricas

Após estudar problemas envolvendo coordenadas retangulares e esféricas, vamos agora tratar apenas um deles, utilizando as coordenadas cilíndricas, para evitar repetição.

7.3.1 Linha de Cargas e um Plano Condutor Aterrado

A figura 7.10 apresenta um fio retilíneo com uma densidade linear de cargas λ situado na frente de um plano infinito condutor aterrado, a uma distância d deste.

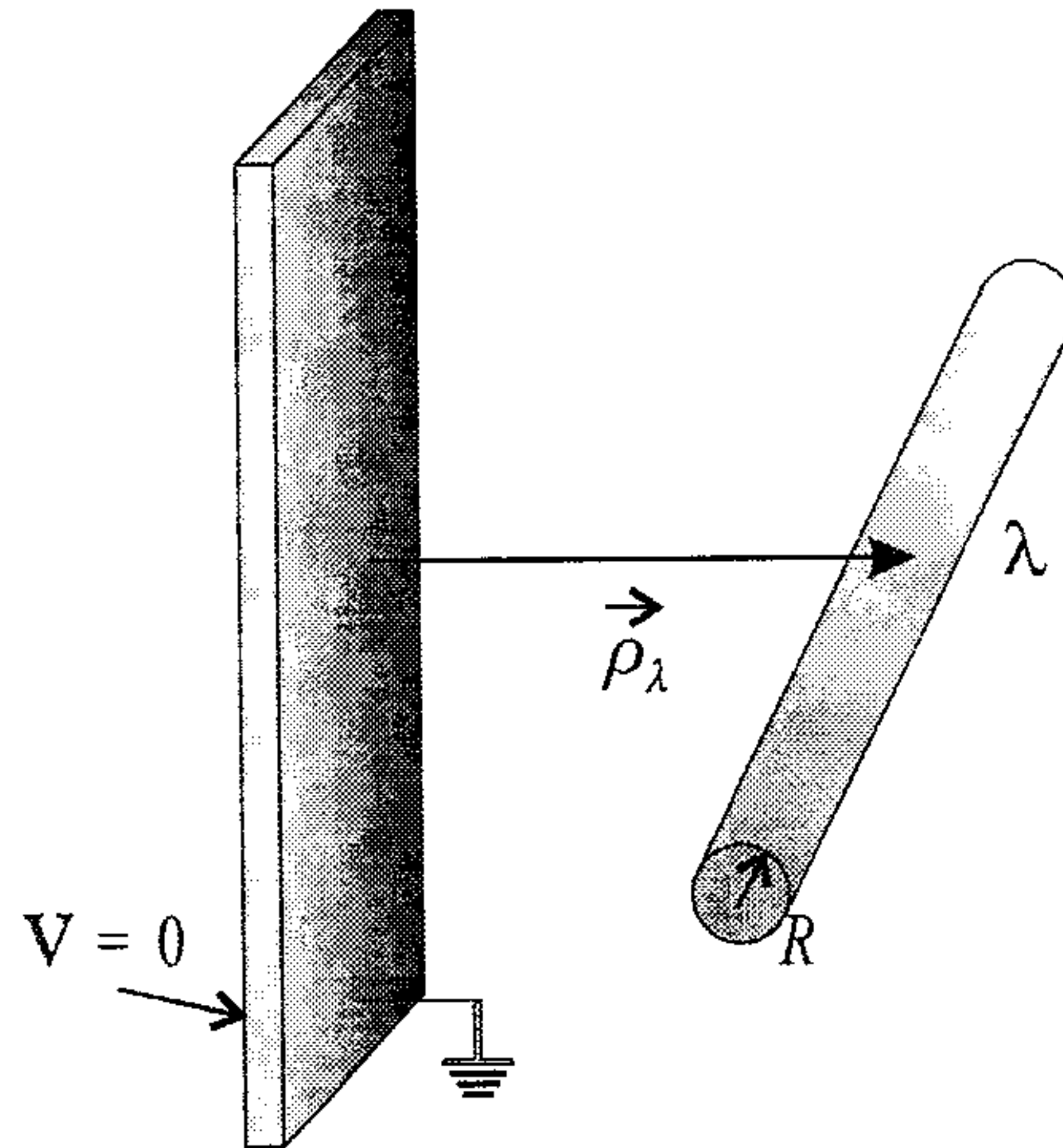



Figura 7.10: Fio infinito de cargas em frente a um plano infinito aterrado.

O eixo do fio é perpendicular ao plano, e esta configuração sugere, como imagem, um outro fio, de densidade linear $-\lambda$, situado à mesma distância do plano, à sua esquerda, como mostra a figura 7.11. Assim, o potencial elétrico total num ponto situado a uma distância perpendicular ρ do plano é a soma dos potenciais elétricos dos dois fios, dados pela equação 5.29, vista no exemplo 5.7, que é

$$\mathbb{V}_{\text{fio}}(\vec{r}) = \mathbb{V}(R) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{R}$$

ou seja,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}_\lambda(R) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_\lambda}{R} + \mathbb{V}_{-\lambda}(R) - \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_{-\lambda}}{R}$$

onde ρ_λ é a distância do fio de densidade λ ao ponto P, sendo $\rho_{-\lambda}$ a distância do fio-imagem a P. Esta expressão pode ser reescrita como

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \overbrace{\left(\mathbb{V}_\lambda(R) + \mathbb{V}_{-\lambda}(R)\right)}^{\mathbb{V}_0} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_\lambda}{R} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_{-\lambda}}{R}$$

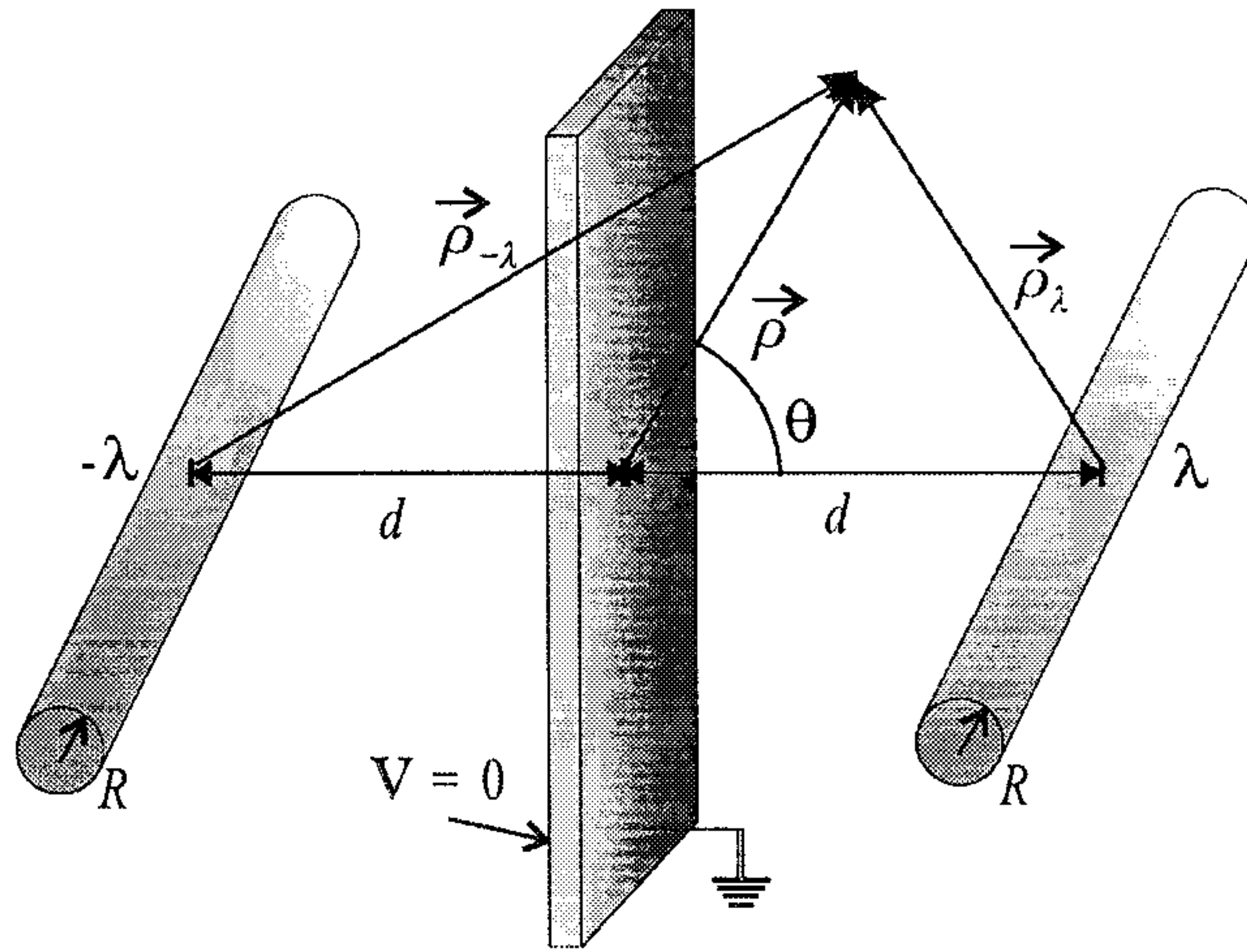



Figura 7.11: Fio de cargas-imagem para o problema do fio em frente ao plano aterrado.

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}_0 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{\rho_\lambda}{\rho_{-\lambda}}$$

Sobre o plano, temos

$$\mathbb{V}_{\text{plano}} = \mathbb{V}_0 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{\rho}{\rho}$$
$$\mathbb{V}_{\text{plano}} = \mathbb{V}_0$$

e como o plano está aterrado, $\mathbb{V}_0 = 0$. Assim, o potencial fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{\rho_{-\lambda}}{\rho_\lambda}$$

Podemos obter as superfícies equipotenciais para este problema, que são aquelas onde o potencial é constante. Uma delas, que ocorre sobre o plano, corresponde a $\mathbb{V} = 0$. As outras são encontradas mediante a consideração de que a razão dentro do logaritmo é uma constante, o que produz um potencial constante $\mathbb{V}_0$, isto é,

$$\mathbb{V}_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{\rho_{-\lambda}}{\rho_\lambda}$$

ou

$$\ln \frac{\rho_{-\lambda}}{\rho_{\lambda}} = \frac{2\pi\epsilon_0 \mathbb{V}_0}{\lambda}$$

Assim, chamando o lado direito desta expressão de $\ln C$, obtemos

$$\ln \frac{\rho_{-\lambda}}{\rho_{\lambda}} = \ln C$$

ou

$$\frac{\rho_{-\lambda}}{\rho_{\lambda}} = C$$

Deslocando a origem do plano para o fio de densidade λ, podemos escrever a distância ρ_{λ} como

$$\rho_{\lambda} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

sendo que estamos medindo a distância x a partir do fio. O fio-imagem está a uma distância $2d$ do outro fio, e assim, $\rho_{-\lambda}$ pode ser escrito como

$$\rho_{-\lambda} = \sqrt{(2d + x)^2 + y^2}$$

As superfícies equipotenciais são dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_{-\lambda}}{\rho_{\lambda}} &= C \\
\frac{\sqrt{(2d + x)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= C \\
4d^2 + 4dx + x^2 + y^2 &= C^2x^2 + C^2y^2 \\
(1 - C^2)x^2 + 4dx + (1 - C^2)y^2 &= -4d^2 \\
x^2 - \frac{4d}{(C^2 - 1)}x + y^2 &= \frac{4d^2}{(C^2 - 1)} \\
\left[x - \frac{2d}{(C^2 - 1)}\right]^2 - \frac{4d^2}{(C^2 - 1)^2} + y^2 &= \frac{4d^2}{(C^2 - 1)} \\
\left[x - \frac{2d}{(C^2 - 1)}\right]^2 + y^2 &= \frac{4d^2}{(C^2 - 1)} + \frac{4d^2}{(C^2 - 1)^2}
\end{aligned}$$

$$\left[x - \frac{2d}{(C^2-1)}\right]^2 + y^2 = \frac{4d^2}{(C^2-1)^2}(C^2 - 1 + 1)$$
$$\left[x - \frac{2d}{(C^2-1)}\right]^2 + y^2 = \frac{4d^2C^2}{(C^2-1)^2}$$

Esta equação define um círculo no plano xy, mas, como z é qualquer, ela na verdade é a equação de um cilindro, cujo centro está em

$$x_c = \frac{2d}{(C^2-1)}, \qquad y_c = 0$$

e que tem um raio R dado por

$$R = \frac{2dC}{C^2-1}$$

Desse modo, as superfícies equipotenciais são cilindros infinitos, definidos pela equação obtida acima, e seus centros e raios dependem da constante C, que está associada ao valor do potencial elétrico na equipotencial, pois

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 \mathbb{V}_0}{\lambda}$$

Isto encerra nossa discussão acerca do método das imagens. Outros problemas podem ser vistos nos exercícios.

7.4 Exercícios

7.1 Calcule a componente z da força 7.2 que age sobre a carga Q situada na frente do plano aterrado visto na seção 7.1.1.

7.2 Resolva o problema de duas cargas Q_1 e Q_2 situadas em frente a um plano condutor infinito aterrado nas posições $\vec{r}_{Q_1}$ e $\vec{r}_{Q_2}$, através do uso do método das imagens. Ache o potencial elétrico, o campo elétrico, a densidade de cargas induzidas, a carga total induzida sobre o plano e a força que age em cada carga.

7.3 Obtenha o campo elétrico, a densidade de cargas induzidas, a carga total induzida e a força elétrica que age sobre a carga Q para o

problema dos planos condutores que se encontram em ângulo reto estudado na seção 7.1.2.

7.4 Considere dois planos condutores que formam um ângulo de 60° entre si, com uma carga Q situada na região entre eles. Usando o método das imagens, obtenha o potencial elétrico nesta região, o campo elétrico, as densidades de carga induzidas, a carga total induzida em cada plano e a força que age sobre a carga Q.

7.5 Ache o potencial elétrico para o problema de uma carga Q situada entre dois planos paralelos condutores visto na seção 7.1.3.

7.6 Estude o problema de uma carga Q colocada dentro de uma esfera condutora aterrada, de raio R, mediante o uso do método das imagens.

7.7 Verifique que a carga total induzida sobre a superfície da esfera da seção 7.2.1 tem o mesmo valor que a carga-imagem.

7.8 Calcule o campo elétrico, a densidade de carga induzida e a carga total sobre a esfera condutora carregada e isolada que estudamos na seção 7.2.2.

7.9 Considere uma esfera de raio R, condutora e isolada, carregada com uma carga Q'. Dentro dessa esfera é colocada uma carga Q. Obtenha o potencial e o campo elétricos, a densidade de carga induzida, a carga total sobre a esfera e a força que age sobre a carga Q, usando o método das imagens.

7.10 Resolva o problema de um fio de densidade linear de cargas λ em frente a dois planos aterrados que se interceptam, formando um ângulo de 90°.

Capítulo 8

Potenciais Elétricos, IV: Expansão em Multipolos

Na seção 5.3, estudamos o potencial elétrico de um dipolo elétrico com momento de dipolo $\vec{p}$, e nos exemplos 6.11 e 6.12, vimos aplicações envolvendo o dipolo e o quadrupolo elétricos. Além disso, mencionamos o fato de que uma carga pontual é também chamada de monopolo. Nessas aplicações, percebemos que essas distribuições de carga produzem potenciais elétricos característicos, que apresentam um certo tipo de comportamento em função da distância r em coordenadas esféricas. A carga produz um potencial que decai com o inverso da distância, ou seja, com $\frac{1}{r}$. O dipolo gera um potencial que depende de $\frac{1}{r^2}$, enquanto o quadrupolo dá origem a um termo do tipo $\frac{1}{r^3}$. Nesses exemplos, comentamos a existência de outras distribuições de cargas, que são os multipolos elétricos. Assim, vamos agora estudar mais detalhadamente esses multipolos.

8.1 Expansão do Potencial Elétrico em Multipolos

Vamos começar com a equação 5.12,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dV$$

que estabelece o potencial elétrico para uma distribuição de cargas $\rho(\vec{r}\,')$ qualquer. Combinamos esta equação com a expressão 6.90,

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{4\pi}{r_>}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{1}{2\ell+1}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\ell} Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

que é a expansão, em harmônicos esféricos, do inverso da distância entre o ponto onde queremos obter o potencial elétrico, representado por $\vec{r}$, e o ponto onde estão as cargas, dado por $\vec{r}\,'$. Vamos considerar que precisamos resolver um problema exterior, ou seja, queremos o potencial fora da região de volume V que envolve a distribuição de cargas $\rho(\vec{r}\,')$, o que é, em geral, o que ocorre. Assim, $r_> = r$ e $r_< = r'$, ou seja, obtemos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{4\pi}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{1}{2\ell+1}\left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\,dV$$

ou, lembrando que a integral é feita sobre as variáveis com linha e que o sinal de integração pode ser trocado com os das somatórias,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{1}{2\ell+1}\left[\int_V \rho(\vec{r}\,')(r')^{\ell}Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')\,dV\right]\frac{Y_{\ell,m}(\theta,\phi)}{r^{\ell+1}}$$

Definimos o termo entre colchetes como

$$\mathfrak{q}_{\ell,m} = \int_V \rho(\vec{r}\,')r'^{\,\ell}Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')\,dV \tag{8.1}$$

de modo que o potencial fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{1}{2\ell+1}\mathfrak{q}_{\ell,m}\frac{Y_{\ell,m}(\theta,\phi)}{r^{\ell+1}} \tag{8.2}$$

que é uma expansão, em série de harmônicos esféricos, para o potencial. Essa expansão é conhecida como *expansão em multipolos*, e os coeficientes $\mathfrak{q}_{l,m}$ são os *momentos de multipolo* em coordenadas esféricas. Assim, uma distribuição de cargas qualquer pode ser entendida como sendo uma "soma" de distribuições particulares, que são as distribuições associadas aos multipolos. Cada multipolo está ligado a um valor de ℓ específico, e $\ell = 0$ corresponde ao monopolo, que é uma carga pontual. Desse modo, $\ell = 1$ é um dipolo, $\ell = 2$ é um quadrupolo, e assim por diante. Vejamos alguns dos momentos de multipolo explicitamente, começando com $\mathfrak{q}_{0,0}$, que está associado ao monopolo,

e utilizando a tabela 6.4 dos harmônicos esféricos quando necessário. Neste caso, temos

$$\mathfrak{q}_{0,0} = \int_V \rho(\vec{r}')Y^*_{0,0}(\theta', \phi')\, dV$$

ou, utilizando a tabela 6.4,

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_{0,0} &= \int_V \rho(\vec{r}')\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, dV \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_V \rho(\vec{r}')\, dV \\ \mathfrak{q}_{0,0} &= \frac{q}{\sqrt{4\pi}} \end{aligned} \tag{8.3}$$

O termo que envolve este momento de multipolo na expressão 8.2 é

$$\mathbb{V}_0 = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{2.0+1}\mathfrak{q}_{0,0}\frac{Y_{0,0}(\theta,\phi)}{r^{0+1}}$$

que fica, se usarmos os valores calculados,

$$\mathbb{V}_0 = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{\sqrt{4\pi}r}$$

ou

$$\mathbb{V}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

que é o potencial gerado por uma carga pontual, como deve ser, já que ele está associado ao momento de monopolo $\mathfrak{q}_{0,0}$.

Quando $\ell = 1$, temos os momentos de dipolo, que existem para $m = 0, \pm 1$. Para $m = 0$, temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_{1,0} &= \int_V \rho(\vec{r}')r'Y^*_{1,0}(\theta', \phi')\, dV \\ &= \int_V \rho(\vec{r}')r'\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta'\, dV \\ \mathfrak{q}_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int_V \rho(\vec{r}')\,\overbrace{r'\cos\theta'}^{z'}\, dV \end{aligned}$$

$$\mathfrak{q}_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_V \rho(\vec{r}\,')z'\, dV$$

ou

$$\mathfrak{q}_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z \tag{8.4}$$

onde nos valemos do fato de que o momento de dipolo em coordenadas retangulares é dado por

$$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'\, dV$$

Para $m = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q}_{1,1} &= \int_V \rho(\vec{r}\,')r'Y^*_{1,1}(\theta', \phi')\, dV \\
&= \int_V \rho(\vec{r}\,')r'\left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta' e^{-i\phi'}\right) dV \\
&= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int_V \rho(\vec{r}\,')r' \operatorname{sen}\theta'(\cos\phi' - i \operatorname{sen}\phi')\, dV \\
&= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int_V \rho(\vec{r}\,')\Big[\overbrace{r' \operatorname{sen}\theta' \cos\phi'}^{x'} - i(\overbrace{r' \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\phi'}^{y'})\Big]\, dV \\
&= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int_V \rho(\vec{r}\,')(x' - iy')\, dV
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{q}_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x - ip_y) \tag{8.5}$$

Para obter o momento de dipolo quando $m = -1$, vamos utilizar a propriedade

$$\mathfrak{q}_{\ell,-m} = (-1)^m \mathfrak{q}^*_{\ell,m} \tag{8.6}$$

que é demonstrada abaixo.

Demonstração. Para demonstrar a relação 8.6, consideramos a expressão 6.79,

$$Y_{\ell,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y^*_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

e tomamos o seu complexo conjugado, ou seja,

$$Y^*_{\ell,-m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

Agora, escrevemos a expressão 8.1 para $m = -m$, isto é,

$$\mathfrak{q}_{\ell,-m} = \int_V \rho(\vec{r}\,')(r')^\ell Y^*_{\ell,-m}(\theta',\phi')\,dV$$

e utilizando a penúltima equação, obtemos

$$\mathfrak{q}_{\ell,-m} = (-1)^m \int_V \rho(\vec{r}\,')(r')^\ell Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\,dV$$

Tomando o complexo conjugado da equação 8.1, temos

$$\mathfrak{q}^*_{\ell,m} = \int_V \rho(\vec{r}\,')(r')^\ell Y_{\ell,m}(\theta',\phi')\,dV$$

e assim, comparando as duas últimas expressões, achamos

$$\mathfrak{q}_{\ell,-m} = (-1)^m \mathfrak{q}^*_{\ell,m}$$

que é a equação 8.6, que foi, portanto, demonstrada.

□

Utilizando a expressão 8.6, obtemos, para $\mathfrak{q}_{1,-1}$, o valor

$$\mathfrak{q}_{1,-1} = (-1)^1 \mathfrak{q}^*_{1,1}$$

$$\mathfrak{q}_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x + ip_y) \tag{8.7}$$

Os termos que envolvem $\ell = 1$ na expressão 8.2 são

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{1,0} &= \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{2.1+1}\mathfrak{q}_{1,0}\frac{Y_{1,0}(\theta,\phi)}{r^{1+1}}\\ &= \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}p_z\frac{\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta}{r^2}\\ \mathbb{V}_{1,0} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_z\cos\theta}{r^2}\end{aligned}$$

$$\mathbb{V}_{1,1} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{2.1+1}\mathfrak{q}_{1,1}\frac{Y_{1,1}(\theta,\phi)}{r^{1+1}}$$

$$\mathbb{V}_{1,1} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{3}\left[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x - ip_y)\right]\frac{-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta e^{i\phi}}{r^2}$$

$$\mathbb{V}_{1,1} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}(p_x - ip_y)\frac{\mathrm{sen}\,\theta(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi)}{r^2}$$

ou

$$\mathbb{V}_{1,1} = \frac{p_x\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + ip_x\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi - ip_y\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + p_y\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi}{8\pi\epsilon_0 r^2}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{1,-1} &= \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{2.1+1}\mathfrak{q}_{1,-1}\frac{Y_{1,-1}(\theta,\phi)}{r^{1+1}} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{3}\left[\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x + ip_y)\right]\frac{\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta e^{-i\phi}}{r^2} \\
&= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}(p_x + ip_y)\frac{\mathrm{sen}\,\theta(\cos\phi - i\,\mathrm{sen}\,\phi)}{r^2} \\
\mathbb{V}_{1,-1} &= \frac{p_x\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi - ip_x\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi + ip_y\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + p_y\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi}{8\pi\epsilon_0 r^2}
\end{aligned}$$

E assim, o potencial para $\ell = 1$ vale

$$\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_{1,0} + \mathbb{V}_{1,1} + \mathbb{V}_{1,-1}$$

ou

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_z\cos\theta}{r^2} \\
&+ \frac{p_x\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + ip_x\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi - ip_y\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + p_y\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi}{8\pi\epsilon_0 r^2} \\
&+ \frac{p_x\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi - ip_x\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi + ip_y\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + p_y\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi}{8\pi\epsilon_0 r^2}
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_z\overbrace{r\cos\theta}^{z} + p_x\overbrace{r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi}^{x} + p_y\overbrace{r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi}^{y}}{r^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_z z + p_x x + p_y y}{r^3} \\
\mathbb{V}_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}
\end{aligned}$$

que é o potencial gerado pelo dipolo, como deve ser, já que $\ell = 1$ está associado ao momento de dipolo. O *tensor momento de quadrupolo* $\overleftrightarrow{Q}$ é definido através de

$$\overleftrightarrow{Q}_{i,j} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\left[3x_i'x_j' - r'^{\,2}\delta_{i,j}\right] dV \tag{8.8}$$

onde $\delta_{i,j}$ é a delta de Kronecker, i e j representam os elementos do tensor, e x_i é a coordenada i. Em retangulares, $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$.

Um tensor tem propriedades muito semelhantes àquelas das matrizes. Pode inclusive ser representado por uma matriz, em termos operacionais. O tensor momento de quadrupolo pode ser escrito como

$$\overleftrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{Q}_{1,1} & \overleftrightarrow{Q}_{1,2} & \overleftrightarrow{Q}_{1,3} \\ \overleftrightarrow{Q}_{2,1} & \overleftrightarrow{Q}_{2,2} & \overleftrightarrow{Q}_{2,3} \\ \overleftrightarrow{Q}_{3,1} & \overleftrightarrow{Q}_{3,2} & \overleftrightarrow{Q}_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz é simétrica, como podemos verificar facilmente ao aplicar a expressão 8.8 para os índices i e j, e depois, para j e i, ou seja,

$$\overleftrightarrow{Q}_{i,j} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\left[3x_i'x_j' - r'^{\,2}\delta_{i,j}\right] dV$$

e

$$\overleftrightarrow{Q}_{j,i} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\left[3x_j'x_i' - r'^{\,2}\right]\delta_{j,i}\, dV$$

Se $i = j$, estas expressões são obviamente iguais, e assim,

$$\overleftrightarrow{Q}_{i,i} = \overleftrightarrow{Q}_{i,i}$$

o que já era esperado. Quando $i \neq j$, elas tornam-se

$$\overleftrightarrow{Q}_{i,j} = 3\int_V \rho(\vec{r}\,')x_i'x_j'\, dV$$

e

$$\overleftrightarrow{Q}_{j,i} = 3\int_V \rho(\vec{r}\,')x_j'x_i'\, dV = 3\int_V \rho(\vec{r}\,')x_i'x_j'\, dV$$

e assim,

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}_{i,j} = \overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}_{j,i}$$

o que caracteriza uma matriz simétrica, e por conseqüência, um tensor simétrico. Isso significa que, das nove componentes do tensor, apenas seis são, até o momento, independentes. Na verdade, é possível eliminar mais uma componente, se considerarmos que a soma dos elementos da diagonal deste tensor é nula, o que significa que ele tem um *traço* nulo. Isso pode ser demonstrado mediante a soma dos elementos da diagonal principal, isto é,

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}_{1,1} + \overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}_{2,2} + \overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}_{3,3} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\left[3x_1'^{\,2} - r'^{\,2}\right] dV + \int_V \rho(\vec{r}\,')\left[3x_2'^{\,2} - r'^{\,2}\right] dV + \int_V \rho(\vec{r}\,')\left[3x_3'^{\,2} - r'^{\,2}\right] dV$$

ou, reunindo os termos numa única integral,

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}_{1,1} + \overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}_{2,2} + \overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}_{3,3} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\left[3x_1'^{\,2} + 3x_2'^{\,2} + 3x_3'^{\,2} - 3r'^{\,2}\right] dV$$

Como $r'^{\,2} = x'^{\,2} + y'^{\,2} + z'^{\,2}$, temos

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}_{1,1} + \overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}_{2,2} + \overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}_{3,3} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\left[3r'^{\,2} - 3r'^{\,2}\right] dV$$

ou

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}_{1,1} + \overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}_{2,2} + \overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}_{3,3} = 0$$

e assim,

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}_{3,3} = -(\overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}_{1,1} + \overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}_{2,2}) \tag{8.9}$$

de modo que o tensor $\overleftrightarrow{\mathfrak{Q}}$ tem cinco componentes independentes.

O momento de quadrupolo está associado a $\ell = 2$ em coordenadas esféricas, o que permite, para m, os valores $m = 0, \pm 1, \pm 2$. Vamos começar, calculando o momento de quadrupolo $\mathfrak{q}_{2,0}$, mediante o uso da expressão 8.1,

$$\mathfrak{q}_{2,0} = \int_V \rho(\vec{r}\,') r'^{\,2} Y_{2,0}^*(\theta', \phi')\, dV$$

$$\mathfrak{q}_{2,0} = \int_V \rho(\vec{r}\,') r'^{\,2} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right) dV$$

$$q_{2,0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int_V \rho(\vec{r}\,') \left[3(\overbrace{r' \cos\theta}^{z'})^2 - r'^{\,2}\right] dV$$
$$q_{2,0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int_V \rho(\vec{r}\,') \left[3z'^{\,2} - r'^{\,2}\right] dV$$

Como

$$\overleftrightarrow{Q}_{3,3} = \int_V \rho(\vec{r}\,') \left[3x'_3 x'_3 - r'^{\,2}\delta_{3,3}\right] dV$$
$$\overleftrightarrow{Q}_{3,3} = \int_V \rho(\vec{r}\,') \left[3z'^{\,2} - r'^{\,2}\right] dV$$

temos

$$q_{2,0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \overleftrightarrow{Q}_{3,3} \tag{8.10}$$

Quando $m = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
q_{2,1} &= \int_V \rho(\vec{r}\,') r'^{\,2} Y^*_{2,1}(\theta', \phi')\, dV \\
&= \int_V \rho(\vec{r}\,') r'^{\,2} \left(-\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta' \operatorname{sen}\theta' e^{-i\phi'}\right) dV \\
&= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int_V \rho(\vec{r}\,') r'^{\,2} \left[\cos\theta' \operatorname{sen}\theta' (\cos\phi' - i \operatorname{sen}\phi')\right] dV \\
&= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int_V \rho(\vec{r}\,') (\overbrace{r' \cos\theta'}^{z'}) \left[\overbrace{r' \operatorname{sen}\theta' \cos\phi'}^{x'} - i\, \overbrace{r' \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\phi'}^{y'}\right] dV \\
q_{2,1} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int_V \rho(\vec{r}\,') z'(x' - iy')\, dV
\end{aligned}$$

ou

$$q_{2,1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int_V \rho(\vec{r}\,') x' z'\, dV - i\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int_V \rho(\vec{r}\,') y' z'\, dV$$

Utilizando a expressão 8.8, achamos

$$\overleftrightarrow{Q}_{1,3} = \int_V \rho(\vec{r}\,') \left[3x'_1 x'_3 - r'^{\,2}\delta_{1,3}\right] dV$$
$$\overleftrightarrow{Q}_{1,3} = 3 \int_V \rho(\vec{r}\,') x' z'\, dV$$

e

$$\overleftrightarrow{Q}_{2,3} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\left[3x_2'x_3' - r'^{\,2}\delta_{2,3}\right] dV$$
$$\overleftrightarrow{Q}_{2,3} = 3\int_V \rho(\vec{r}\,')y'z'\, dV$$

e desse modo,

$$\mathfrak{q}_{2,1} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}(\overleftrightarrow{Q}_{1,3} - i\overleftrightarrow{Q}_{2,3})$$

O momento de quadrupolo para $m = -1$ pode ser encontrado através da expressão 8.6, ou seja,

$$\mathfrak{q}_{2,-1} = (-1)^1\mathfrak{q}^*_{2,1}$$
$$\mathfrak{q}_{2,-1} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}(\overleftrightarrow{Q}_{1,3} + i\overleftrightarrow{Q}_{2,3})$$

Por fim, quando $m = 2$, achamos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q}_{2,2} &= \int_V \rho(\vec{r}\,')r'^{\,2}Y^*_{2,1}(\theta', \phi')\, dV \\
&= \int_V \rho(\vec{r}\,')r'^{\,2}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\operatorname{sen}^2\theta' e^{-2i\phi'}\, dV \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int_V \rho(\vec{r}\,')r'^{\,2}\operatorname{sen}^2\theta'(\cos 2\phi - i\operatorname{sen} 2\phi')\, dV \\
\mathfrak{q}_{2,2} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int_V \rho(\vec{r}\,')r'^{\,2}\operatorname{sen}^2\theta'(\cos^2\phi' - \operatorname{sen}^2\phi' - 2i\operatorname{sen}\phi'\cos\phi')\, dV
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q}_{2,2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int_V \rho(\vec{r}\,')\Big[(\overbrace{r'\operatorname{sen}\theta'\cos\phi'}^{x'})^2 - (\overbrace{r'\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\phi'}^{y'})^2 \\
- 2i(\overbrace{r'\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\phi'}^{x'})(\overbrace{r'\operatorname{sen}\theta'\cos\phi'}^{y'})\Big]\, dV
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$q_{2,2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int_V \rho(\vec{r}\,')\left[x'^2 - y'^2 - 2ix'y'\right] dV$$

e finalmente,

$$q_{2,2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int_V \rho(\vec{r}\,')\left[x'^2 - y'^2\right] dV - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int_V \rho(\vec{r}\,')x'y'\, dV$$

Da expressão 8.8, temos

$$\overleftrightarrow{Q}_{1,1} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\left[3x'_1x'_1 - r'^2\delta_{1,1}\right] dV$$
$$\overleftrightarrow{Q}_{1,1} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\left[3x'^2 - r'^2\right] dV$$

$$\overleftrightarrow{Q}_{2,2} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\left[3x'_2x'_2 - r'^2\delta_{2,2}\right] dV$$
$$\overleftrightarrow{Q}_{2,2} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\left[3y'^2 - r'^2\right] dV$$

e

$$\overleftrightarrow{Q}_{1,2} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\left[3x'_1x'_2 - r'^2\delta_{1,2}\right] dV$$
$$\overleftrightarrow{Q}_{1,2} = 3\int_V \rho(\vec{r}\,')x'y'\, dV$$

Assim, fazendo

$$\overleftrightarrow{Q}_{1,1} - \overleftrightarrow{Q}_{2,2}$$

obtemos

$$\overleftrightarrow{Q}_{1,1} - \overleftrightarrow{Q}_{2,2} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\left[3x'^2 - r'^2\right] dV - \int_V \rho(\vec{r}\,')\left[3y'^2 - r'^2\right] dV$$
$$\overleftrightarrow{Q}_{1,1} - \overleftrightarrow{Q}_{2,2} = 3\int_V \rho(\vec{r}\,')\left[x'^2 - y'^2\right] dV$$

e então,

$$q_{2,2} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(\overleftrightarrow{Q}_{1,1} - \overleftrightarrow{Q}_{2,2}) - \frac{i}{6}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\overleftrightarrow{Q}_{1,2}$$

ou

$$\mathfrak{q}_{2,2} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1} - \overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2} - 2i\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,2})$$

O momento de quadrupolo para $m = -2$ fica, utilizando a expressão 8.6,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q}_{2,-2} &= (-1)^2\mathfrak{q}^*_{2,2} \\
\mathfrak{q}_{2,-2} &= \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1} - \overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2} + 2i\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,2})
\end{aligned}$$

Os potenciais associados a cada um dos valores de m, para $\ell = 2$, são, iniciando com $m = 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{2,0} &= \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{2.2+1}\mathfrak{q}_{2,0}\frac{Y_{2,0}(\theta,\phi)}{r^{2+1}} \\
&= \frac{1}{5\epsilon_0}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right)}{r^3} \\
&= \frac{1}{16\pi\epsilon_0}\frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3}\left[3(\overbrace{r\cos\theta}^{z})^2 - r^2\right]}{r^5} \\
\mathbb{V}_{2,0} &= \frac{1}{16\pi\epsilon_0}\frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3}\left(3z^2 - r^2\right)}{r^5}
\end{aligned}$$

Quando $m = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{2,1} &= \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{2.2+1}\mathfrak{q}_{2,1}\frac{Y_{2,1}(\theta,\phi)}{r^{2+1}} \\
&= \frac{1}{5\epsilon_0}\left[-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}(\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3} - i\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3})\right]\frac{-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\operatorname{sen}\theta e^{i\phi}}{r^3} \\
\mathbb{V}_{2,1} &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}(\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3} - i\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3})\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta e^{i\phi}}{r^3}
\end{aligned}$$

Para o caso $m = -1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{2,-1} &= \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{2.2+1}\mathfrak{q}_{2,-1}\frac{Y_{2,-1}(\theta,\phi)}{r^{2+1}} \\
\mathbb{V}_{2,-1} &= \frac{1}{5\epsilon_0}\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}(\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3} + i\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3})\frac{\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\operatorname{sen}\theta e^{-i\phi}}{r^3}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{V}_{2,-1} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}(\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3} + i\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3})\frac{\cos\theta \,\mathrm{sen}\,\theta e^{-i\phi}}{r^3}$$

Note que, somando os termos $\mathbb{V}_{2,1}$ e $\mathbb{V}_{2,-1}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{2,1} + \mathbb{V}_{2,-1} &= \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3} - i\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3}}{8\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta e^{i\phi}}{r^3} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3} + i\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3}}{8\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta e^{-i\phi}}{r^3} \\
&= \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{8\pi\epsilon_0 r^3}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) - \frac{i\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{8\pi\epsilon_0 r^3}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \\
&= \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{8\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\phi) - \frac{i\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{8\pi\epsilon_0 r^3}(2i\,\mathrm{sen}\,\phi) \\
\mathbb{V}_{2,1} + \mathbb{V}_{2,-1} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi}{r^3} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi}{r^3}\right]
\end{aligned}$$

ou

$$\mathbb{V}_{2,1} + \mathbb{V}_{2,-1} =$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3}\overbrace{(r\cos\theta)}^{z}\overbrace{(r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi)}^{x}}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3}\overbrace{(r\cos\theta)}^{z}\overbrace{(r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi)}^{y}}{r^5}\right]$$

e então,

$$\mathbb{V}_{2,1} + \mathbb{V}_{2,-1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{xz\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3}}{r^5} + \frac{yz\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3}}{r^5}\right]$$

Por fim, os potenciais para $m = \pm 2$ ficam, iniciando com $m = 2$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{2,2} &= \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{2.2+1}\mathfrak{q}_{2,2}\frac{Y_{2,2}(\theta,\phi)}{r^{2+1}} \\
&= \frac{1}{5\epsilon_0}\frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1} - \overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2} - 2i\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,2})\frac{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\,\mathrm{sen}^2\,\theta e^{2i\phi}}{r^3} \\
&= \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1} - \overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2} - 2i\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,2}}{32\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{sen}^2\,\theta(\cos 2\phi + i\,\mathrm{sen}\,2\phi)}{r^3} \\
\mathbb{V}_{2,2} &= \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1} - \overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2} - 2i\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,2}}{32\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{sen}^2\,\theta(\cos^2\phi - \mathrm{sen}^2\,\phi + 2i\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi)}{r^3}
\end{aligned}$$

ou

$$\mathbb{V}_{2,2} = \frac{\overleftrightarrow{Q}_{1,1} - \overleftrightarrow{Q}_{2,2} - 2i\overleftrightarrow{Q}_{1,2}}{32\pi\epsilon_0}$$
$$\times \frac{(\overbrace{r \operatorname{sen}\theta\cos\phi}^{x})^2 - (\overbrace{r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi}^{y})^2 + 2i(\overbrace{r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi}^{y})(\overbrace{r \operatorname{sen}\theta\cos\phi}^{x})}{r^5}$$

ou ainda,

$$\mathbb{V}_{2,2} = \frac{\overleftrightarrow{Q}_{1,1} - \overleftrightarrow{Q}_{2,2} - 2i\overleftrightarrow{Q}_{1,2}}{32\pi\epsilon_0} \frac{x^2 - y^2 + 2ixy}{r^5}$$

ao passo que, se $m = -2$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{2,-2} &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{2.2+1} \mathfrak{q}_{2,-2} \frac{Y_{2,-2}(\theta,\phi)}{r^{2+1}} \\
&= \frac{1}{5\epsilon_0} \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (\overleftrightarrow{Q}_{1,1} - \overleftrightarrow{Q}_{2,2} + 2i\overleftrightarrow{Q}_{1,2}) \frac{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \operatorname{sen}^2\theta e^{-2i\phi}}{r^3} \\
&= \frac{\overleftrightarrow{Q}_{1,1} - \overleftrightarrow{Q}_{2,2} + 2i\overleftrightarrow{Q}_{1,2}}{32\pi\epsilon_0} \frac{\operatorname{sen}^2\theta(\cos 2\phi - i\operatorname{sen} 2\phi)}{r^3} \\
\mathbb{V}_{2,-2} &= \frac{\overleftrightarrow{Q}_{1,1} - \overleftrightarrow{Q}_{2,2} + 2i\overleftrightarrow{Q}_{1,2}}{32\pi\epsilon_0} \frac{\operatorname{sen}^2\theta(\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi - 2i\operatorname{sen}\phi\cos\phi)}{r^3}
\end{aligned}$$

ou então,

$$\mathbb{V}_{2,-2} = \frac{\overleftrightarrow{Q}_{1,1} - \overleftrightarrow{Q}_{2,2} + 2i\overleftrightarrow{Q}_{1,2}}{32\pi\epsilon_0}$$
$$\times \frac{(\overbrace{r \operatorname{sen}\theta\cos\phi}^{x})^2 - (\overbrace{r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi}^{y})^2 - 2i(\overbrace{r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi}^{y})(\overbrace{r \operatorname{sen}\theta\cos\phi}^{x})}{r^5}$$

e por fim,

$$\mathbb{V}_{2,-2} = \frac{\overleftrightarrow{Q}_{1,1} - \overleftrightarrow{Q}_{2,2} + 2i\overleftrightarrow{Q}_{1,2}}{32\pi\epsilon_0} \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{r^5}$$

Somando $\mathbb{V}_{2,2}$ e $\mathbb{V}_{2,-2}$, encontramos

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{2,2} + \mathbb{V}_{2,-2} = \frac{\overleftrightarrow{Q}_{1,1} - \overleftrightarrow{Q}_{2,2} - 2i\overleftrightarrow{Q}_{1,2}}{32\pi\epsilon_0} \frac{x^2 - y^2 + 2ixy}{r^5} \\
+ \frac{\overleftrightarrow{Q}_{1,1} - \overleftrightarrow{Q}_{2,2} + 2i\overleftrightarrow{Q}_{1,2}}{32\pi\epsilon_0} \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{r^5}
\end{aligned}$$

ou

$$\mathbb{V}_{2,2} + \mathbb{V}_{2,-2} = \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1}}{32\pi\epsilon_0} \frac{2x^2 - 2y^2 + 2ixy - 2ixy}{r^5} - \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}}{32\pi\epsilon_0} \frac{2x^2 - 2y^2 + 2ixy - 2ixy}{r^5} - 2i \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,2}}{32\pi\epsilon_0} \frac{x^2 - x^2 - y^2 + y^2 + 2ixy + 2ixy}{r^5}$$

ou então,

$$\mathbb{V}_{2,2} + \mathbb{V}_{2,-2} = \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1}}{16\pi\epsilon_0} \frac{x^2 - y^2}{r^5} - \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}}{16\pi\epsilon_0} \frac{x^2 - y^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,2}}{4\pi\epsilon_0} \frac{xy}{r^5}$$

Somando agora todos os potenciais para $\ell = 2$, achamos

$$\mathbb{V}_2 = \mathbb{V}_{2,0} + \mathbb{V}_{2,1} + \mathbb{V}_{2,-1} + \mathbb{V}_{2,2} + \mathbb{V}_{2,-2}$$

ou

$$\mathbb{V}_2 = \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3}(3z^2 - r^2)}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{xz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{yz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1}}{16\pi\epsilon_0} \frac{x^2 - y^2}{r^5} - \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}}{16\pi\epsilon_0} \frac{x^2 - y^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,2}}{4\pi\epsilon_0} \frac{xy}{r^5}$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbb{V}_2 = \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{xz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{yz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,2}}{4\pi\epsilon_0} \frac{xy}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3}}{16\pi\epsilon_0} \frac{2z^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3}}{16\pi\epsilon_0} \frac{z^2 - r^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1}}{16\pi\epsilon_0} \frac{x^2}{r^5} - \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1}}{16\pi\epsilon_0} \frac{y^2}{r^5} - \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}}{16\pi\epsilon_0} \frac{x^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}}{16\pi\epsilon_0} \frac{y^2}{r^5}$$

ou

$$\mathbb{V}_2 = \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{xz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{yz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,2}}{4\pi\epsilon_0} \frac{xy}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3}}{8\pi\epsilon_0} \frac{z^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1}}{16\pi\epsilon_0} \frac{x^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}}{16\pi\epsilon_0} \frac{y^2}{r^5} - \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3}}{16\pi\epsilon_0} \frac{x^2 + y^2}{r^5} - \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1}}{16\pi\epsilon_0} \frac{y^2}{r^5} - \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}}{16\pi\epsilon_0} \frac{x^2}{r^5}$$

Utilizando a expressão 8.9, obtemos

$$\mathbb{V}_2 = \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3}}{4\pi\epsilon_0}\frac{xz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3}}{4\pi\epsilon_0}\frac{yz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,2}}{4\pi\epsilon_0}\frac{xy}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3}}{4\pi\epsilon_0}\frac{z^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1}}{8\pi\epsilon_0}\frac{x^2}{r^5}$$
$$+ \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}}{16\pi\epsilon_0}\frac{y^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1} + \overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}}{16\pi\epsilon_0}\frac{x^2+y^2}{r^5} - \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1}}{16\pi\epsilon_0}\frac{y^2}{r^5} - \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}}{16\pi\epsilon_0}\frac{x^2}{r^5}$$

ou

$$\mathbb{V}_2 = \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3}}{4\pi\epsilon_0}\frac{xz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3}}{4\pi\epsilon_0}\frac{yz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,2}}{4\pi\epsilon_0}\frac{xy}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3}}{8\pi\epsilon_0}\frac{z^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1}}{16\pi\epsilon_0}\frac{x^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}}{16\pi\epsilon_0}\frac{y^2}{r^5}$$
$$+ \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1}}{16\pi\epsilon_0}\frac{x^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1}}{16\pi\epsilon_0}\frac{y^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}}{16\pi\epsilon_0}\frac{x^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}}{16\pi\epsilon_0}\frac{y^2}{r^5} - \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1}}{16\pi\epsilon_0}\frac{y^2}{r^5} - \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}}{16\pi\epsilon_0}\frac{x^2}{r^5}$$

e então,

$$\mathbb{V}_2 = \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,2}}{4\pi\epsilon_0}\frac{xy}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3}}{4\pi\epsilon_0}\frac{xz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3}}{4\pi\epsilon_0}\frac{yz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1}}{8\pi\epsilon_0}\frac{x^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}}{8\pi\epsilon_0}\frac{y^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3}}{8\pi\epsilon_0}\frac{z^2}{r^5}$$

Esta expressão pode ainda ser melhorada se fizermos

$$\mathbb{V}_2 = \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,2}}{8\pi\epsilon_0}\frac{xy}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,2}}{8\pi\epsilon_0}\frac{xy}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3}}{8\pi\epsilon_0}\frac{xz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3}}{8\pi\epsilon_0}\frac{xz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3}}{8\pi\epsilon_0}\frac{yz}{r^5}$$
$$+ \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3}}{8\pi\epsilon_0}\frac{yz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1}}{8\pi\epsilon_0}\frac{x^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}}{8\pi\epsilon_0}\frac{y^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3}}{8\pi\epsilon_0}\frac{z^2}{r^5}$$

Como o tensor $\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}$ é simétrico, podemos escrever

$$\mathbb{V}_2 = \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,2}}{8\pi\epsilon_0}\frac{xy}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,1}}{8\pi\epsilon_0}\frac{xy}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3}}{8\pi\epsilon_0}\frac{xz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,1}}{8\pi\epsilon_0}\frac{xz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3}}{8\pi\epsilon_0}\frac{yz}{r^5}$$
$$+ \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,2}}{8\pi\epsilon_0}\frac{yz}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1}}{8\pi\epsilon_0}\frac{x^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}}{8\pi\epsilon_0}\frac{y^2}{r^5} + \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3}}{8\pi\epsilon_0}\frac{z^2}{r^5}$$

ou

$$\mathbb{V}_2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5}\Big(\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,2}xy + \overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,1}yx + \overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,3}xz + \overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,1}zx$$
$$+ \overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,3}yz + \overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,2}zy + \overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{1,1}x^2 + \overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{2,2}y^2 + \overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3}z^2\Big)$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbb{V}_2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Q}}_{i,j}x_i x_j$$

ou

$$\mathbb{V}_2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_i\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Q}}_{i,j}x_j \tag{8.11}$$

ou, numa forma condensada, utilizando as propriedades matriciais dos tensores,

$$\mathbb{V}_2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Q}}\cdot\vec{r}}{r^5} \tag{8.12}$$

que representa a operação

$$\mathbb{V}_2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5}\left\{\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Q}}_{1,1} & \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Q}}_{1,2} & \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Q}}_{1,3}\\ \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Q}}_{2,1} & \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Q}}_{2,2} & \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Q}}_{2,3}\\ \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Q}}_{3,1} & \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Q}}_{3,2} & \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Q}}_{3,3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\right\} \tag{8.13}$$

cuja verificação é feita nos exercícios (veja o exercício 8.1). A equação 8.12 estabelece o potencial elétrico gerado por um quadrupolo elétrico e ela independe do sistema de coordenadas utilizado. Vejamos se ela está de acordo com o resultado 6.98, obtido no exemplo 6.12, para o potencial elétrico de um quadrupolo situado na origem,

$$\mathbb{V}_{\text{quad.}}(\vec{r}) = \frac{\mathcal{Q}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

estando as cargas $+Q$ situadas em $z = a$ e $z = -a$, e a carga $-2Q$ em $z = 0$. Note que definimos, naquele exercício, $\mathcal{Q} = Qa^2$, no limite $a \to 0$. Utilizando as funções delta de Dirac (veja a seção 4.7), podemos escrever a densidade de cargas para este problema. A carga $+Q$ em $z = a$ pode ser expressa, usando também a equação 4.35, como

$$\rho_{+Q,a} = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x)\delta(y)\delta(z - a)$$

A outra carga positiva, em $z = -a$, fica

$$\rho_{+Q,-a} = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x)\delta(y)\delta(z + a)$$

e por fim, a carga $-2Q$ situada na origem pode ser expressa como

$$\rho_{-2Q} = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

A densidade total de cargas é a soma das três, ou seja,

$$\rho(\vec{r}) = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z - a) + Q\delta(x)\delta(y)\delta(z + a) - 2Q\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

e assim, os momentos de quadrupolo em coordenadas retangulares ficam, mediante o uso da expressão 8.8, e iniciando com $\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Q}}_{1,1}$,

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Q}}_{1,1} = \int_V \rho(\vec{r})\left[3x^2 - r^2\delta_{1,1}\right] dV$$

ou

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Q}}_{1,1} = \int_V \left[Q\delta(x)\delta(y)\delta(z - a) + Q\delta(x)\delta(y)\delta(z + a)\right.$$
$$\left. - 2Q\delta(x)\delta(y)\delta(z)\right]\left[3x^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right] dV$$

ou então,

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Q}}_{1,1} = Q\int_V \left[\delta(x)\delta(y)\delta(z - a) + \delta(x)\delta(y)\delta(z + a)\right.$$
$$\left. - 2\delta(x)\delta(y)\delta(z)\right]\left(2x^2 - y^2 - z^2\right) dV$$

ou ainda,

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{Q}}_{1,1} =$$
$$2Q\int_V x^2\left[\delta(x)\delta(y)\delta(z - a) + \delta(x)\delta(y)\delta(z + a) - 2\delta(x)\delta(y)\delta(z)\right] dV$$
$$- Q\int_V y^2\left[\delta(x)\delta(y)\delta(z - a) + \delta(x)\delta(y)\delta(z + a) - 2\delta(x)\delta(y)\delta(z)\right] dV$$
$$- Q\int_V z^2\left[\delta(x)\delta(y)\delta(z - a) + \delta(x)\delta(y)\delta(z + a) - 2\delta(x)\delta(y)\delta(z)\right] dV$$

Lembrando que (expressões 4.16 e 4.17, respectivamente)

$$\int \delta(x - x_0)\, dx = 1 \qquad \int f(x)\, \delta(x - x_0)\, dx = f(x_0)$$

a expressão acima se reduz a

$$\overleftrightarrow{Q}_{1,1} = -Q(a)^2 - Q(-a)^2 = -2Qa^2 = -2\mathcal{Q}$$

pois

$$\int x^2 \delta(x)\, dx = 0^2 = 0 \qquad \int y^2 \delta(y)\, dy = 0^2 = 0$$

$$\int z^2 \delta(z \mp a)\, dz = (\pm a)^2 = a^2 \qquad \int z^2 \delta(z)\, dz = 0^2 = 0$$

O momento de quadrupolo $\overleftrightarrow{Q}_{2,2}$ é

$$\overleftrightarrow{Q}_{2,2} = \int_V \rho(\vec{r})\big(3y^2 - r^2\delta_{2,2}\big)\, dV$$

ou

$$\overleftrightarrow{Q}_{2,2} = \int_V \big[Q\delta(x)\delta(y)\delta(z - a) + Q\delta(x)\delta(y)\delta(z + a) - 2Q\delta(x)\delta(y)\delta(z)\big]\Big[3y^2 - \big(x^2 + y^2 + z^2\big)\Big]\, dV$$

ou então,

$$\overleftrightarrow{Q}_{2,2} = Q\int_V \big[\delta(x)\delta(y)\delta(z - a) + \delta(x)\delta(y)\delta(z + a) - 2\delta(x)\delta(y)\delta(z)\big]\big(2y^2 - x^2 - z^2\big)\, dV$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{Q}_{2,2} = {} & 2Q\int_V y^2\big[\delta(x)\delta(y)\delta(z - a) + \delta(x)\delta(y)\delta(z + a) - 2\delta(x)\delta(y)\delta(z)\big]\, dV \\ & - Q\int_V x^2\big[\delta(x)\delta(y)\delta(z - a) + \delta(x)\delta(y)\delta(z + a) - 2\delta(x)\delta(y)\delta(z)\big]\, dV \\ & - Q\int_V z^2\big[\delta(x)\delta(y)\delta(z - a) + \delta(x)\delta(y)\delta(z + a) - 2\delta(x)\delta(y)\delta(z)\big]\, dV\end{aligned}$$

cujo resultado é

$$\overleftrightarrow{Q}_{2,2} = -Q(a)^2 - Q(-a)^2 = -2Qa^2 = -2\mathcal{Q}$$

O valor de $\overleftrightarrow{Q}_{3,3}$ pode ser encontrado através da equação 8.9, ou seja,

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{Q}_{3,3} &= -(\overleftrightarrow{Q}_{1,1} + \overleftrightarrow{Q}_{2,2}) \\ &= -(-2\mathcal{Q} - 2\mathcal{Q}) \\ \overleftrightarrow{Q}_{3,3} &= 4\mathcal{Q}\end{aligned}$$

O momento de quadrupolo para $i = 1$ e $j = 2$ é

$$\overleftrightarrow{Q}_{1,2} = \int_V \rho(\vec{r})\left[3xy - r^2\delta_{1,2}\right] dV$$

ou

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{Q}_{1,2} = 3\int_V &\left[Q\delta(x)\delta(y)\delta(z-a)\right. \\ &\left. + Q\delta(x)\delta(y)\delta(z+a) - 2Q\delta(x)\delta(y)\delta(z)\right] xy\, dV\end{aligned}$$

ou então,

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{Q}_{1,2} = 3Q\int_V & xy\delta(x)\delta(y)\delta(z-a)\, dV \\ &+ 3Q\int_V xy\delta(x)\delta(y)\delta(z+a)\, dV - 6Q\int_V xy\delta(x)\delta(y)\delta(z)\, dV\end{aligned}$$

e assim,

$$\overleftrightarrow{Q}_{1,2} = \overleftrightarrow{Q}_{2,1} = 0$$

onde usamos a propriedade de simetria do tensor. Para a componente $\overleftrightarrow{Q}_{2,3}$, temos

$$\overleftrightarrow{Q}_{2,3} = \int_V \rho(\vec{r})\left[3yz - r^2\delta_{2,3}\right] dV$$

ou

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{Q}_{2,3} = 3\int_V &\left[Q\delta(x)\delta(y)\delta(z-a)\right. \\ &\left. + Q\delta(x)\delta(y)\delta(z+a) - 2Q\delta(x)\delta(y)\delta(z)\right] yz\, dV\end{aligned}$$

ou então,

$$\overleftrightarrow{Q}_{2,3} = 3Q \int_V yz\delta(x)\delta(y)\delta(z-a)\,dV + 3Q \int_V yz\delta(x)\delta(y)\delta(z+a)\,dV - 6Q \int_V yz\delta(x)\delta(y)\delta(z)\,dV$$

e assim,

$$\overleftrightarrow{Q}_{2,3} = \overleftrightarrow{Q}_{3,2} = 0$$

Por fim, para a última componente, temos

$$\overleftrightarrow{Q}_{1,3} = \int_V \rho(\vec{r})\left[3xz - r^2\delta_{1,3}\right] dV$$

ou

$$\overleftrightarrow{Q}_{1,3} = 3\int_V \left[Q\delta(x)\delta(y)\delta(z-a) + Q\delta(x)\delta(y)\delta(z+a) - 2Q\delta(x)\delta(y)\delta(z)\right] xz\,dV$$

ou ainda,

$$\overleftrightarrow{Q}_{1,3} = 3Q \int_V xz\delta(x)\delta(y)\delta(z-a)\,dV + 3Q \int_V xz\delta(x)\delta(y)\delta(z+a)\,dV - 6Q \int_V xz\delta(x)\delta(y)\delta(z)\,dV$$

e desse modo,

$$\overleftrightarrow{Q}_{1,3} = \overleftrightarrow{Q}_{3,1} = 0$$

de modo que o tensor momento de quadrupolo, em coordenadas retangulares, fica

$$\overleftrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} -2Q & 0 & 0 \\ 0 & -2Q & 0 \\ 0 & 0 & 4Q \end{pmatrix}$$

Usando agora uma das equações 8.12 ou 8.13, achamos, para o potencial elétrico do dipolo,

$$\mathbb{V}_2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5}\left\{\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2Q & 0 & 0 \\ 0 & -2Q & 0 \\ 0 & 0 & 4Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\}$$

ou

$$\mathbb{V}_2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5}\left\{\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2Qx \\ -2Qy \\ 4Qz \end{pmatrix}\right\}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_2 &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5}\left(-2Qx^2 - 2Qy^2 + 4Qz^2\right) \\
&= \frac{2Q}{8\pi\epsilon_0 r^5}\left(2z^2 - x^2 - y^2\right) \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^5}\left(2z^2 + z^2 - z^2 - x^2 - y^2\right) \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^5}\left[3z^2 - \left(z^2 + x^2 + y^2\right)\right] \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^5}\left(3z^2 - r^2\right) \\
\mathbb{V}_2 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^5}\left(3r^2\cos^2\theta - r^2\right)
\end{aligned}$$

e finalmente,

$$\mathbb{V}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}$$

que é a expressão 6.98, do exemplo 6.12, para o potencial do quadrupolo situado na origem. Assim, verificamos que o potencial elétrico de uma distribuição genérica de cargas pode ser expandido em termos envolvendo os potenciais gerados pelos momentos de multipolo, na forma

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\overleftrightarrow{Q}\cdot\vec{r}}{r^5} + \cdots$$

onde q é a carga livre (o momento de monopolo), $\vec{p}$ é o vetor momento de dipolo, $\overleftrightarrow{Q}$ é o tensor momento de quadrupolo, e assim sucessivamente. Considerando que $\vec{r} = r\hat{\mathbf{r}}$, podemos ainda escrever

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot r\hat{\mathbf{r}}}{r^3} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{r\hat{\mathbf{r}}\cdot \overleftrightarrow{Q}\cdot r\hat{\mathbf{r}}}{r^5} + \cdots$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot \overleftrightarrow{Q}\cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^3} + \cdots$$

e assim, confirmamos o que já havíamos dito ao longo do texto com relação aos termos que aparecem para cada tipo de distribuição de cargas. O monopolo está associado a termos do tipo $\frac{1}{r}$ no potencial elétrico. O dipolo gera um potencial do tipo $\frac{1}{r^2}$, enquanto o quadrupolo tem um potencial que decai com $\frac{1}{r^3}$. Note que o potencial (e também o campo elétrico), com o aumento da distância, tende a zero cada vez mais rápido, à medida que a distribuição de cargas associada ao multipolo fica mais complicada.

Exemplo 8.1. *Considere a distribuição de cargas apresentada na figura 8.1, formada por duas cargas pontuais Q de mesmo sinal, situadas no eixo z, nas posições $\vec{r}_{Q,a} = a\,\hat{\mathbf{k}}$ e $\vec{r}_{Q,-a} = -a\,\hat{\mathbf{k}}$. Com relação a essa distribuição de cargas, responda ao seguinte.*

a) Calcule os primeiros momentos de multipolo.

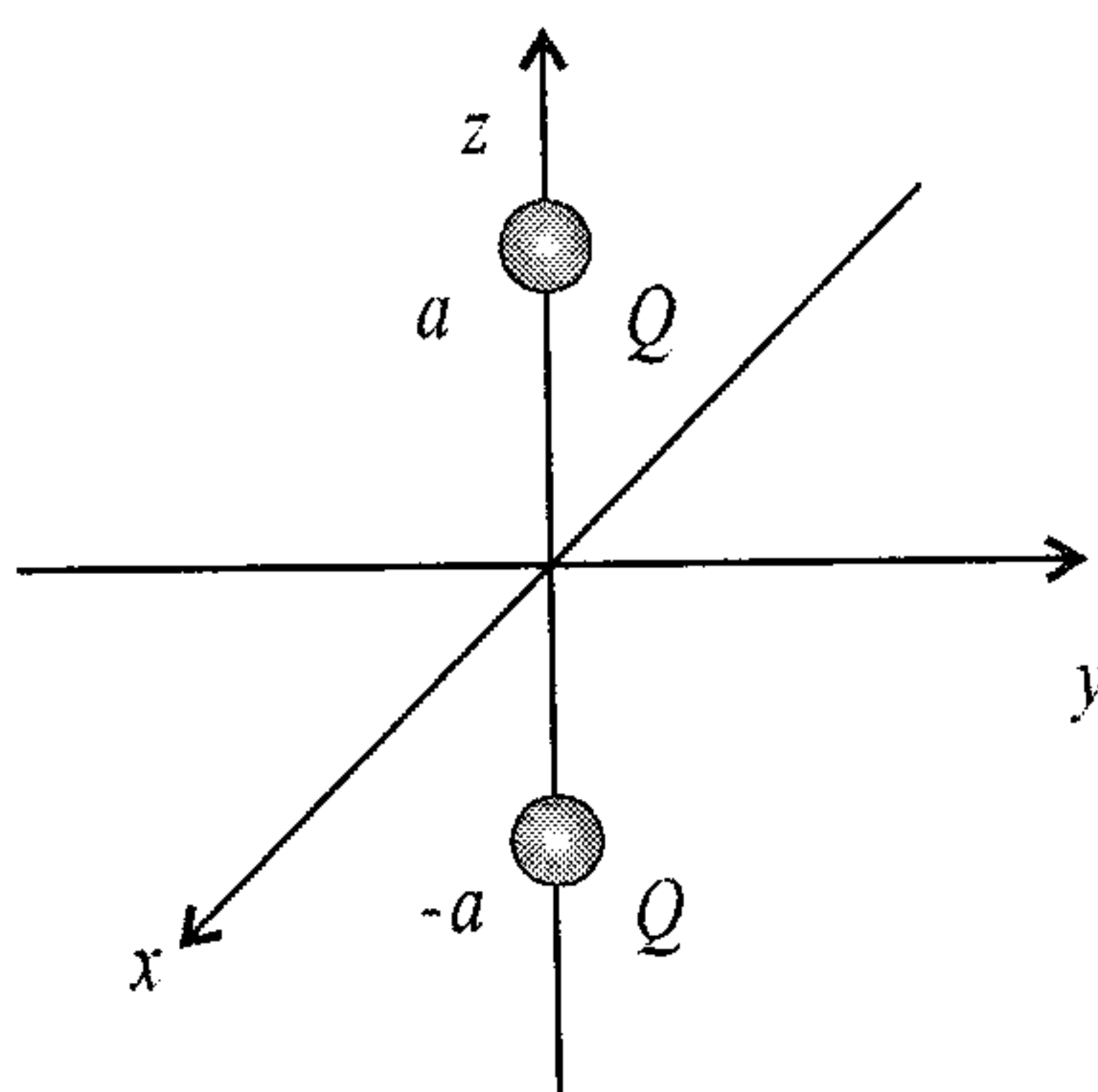



Figura 8.1: Duas cargas pontuais para o exemplo 8.1.

Para calcularmos os momentos de multipolo, precisamos da densidade de cargas. Como as cargas são pontuais, vamos utilizar funções delta de Dirac para representá-las. Assim, a carga situada em $z = a$ está associada à densidade

$$\rho_{Q,a} = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z-a)$$

enquanto a carga em $z = -a$ pode ser expressa como

$$\rho_{Q,-a} = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z+a)$$

A densidade total de cargas é a soma das duas, ou seja,

$$\rho = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z-a) + Q\delta(x)\delta(y)\delta(z+a)$$

Determinada a densidade de cargas, podemos utilizar a equação 8.1 para calcular os multipolos em coordenadas esféricas, usando a tabela 6.4, quando necessário. Entretanto, para realizar as integrais, precisamos escrever a densidade de cargas em coordenadas esféricas. Neste caso, a carga em $z = a$ está situada no ponto P$(r = a, \theta = 0, \phi = 0)$ em esféricas, e com o auxílio da expressão 4.41 da seção 4.7, podemos escrever

$$\rho_{Q,a} = Q\frac{\delta(r-a)}{r^2}\delta(\cos\theta - 1)\delta(\phi)$$

A carga em $z = -a$ em esféricas está no ponto P$(r = a, \theta = \pi, \phi = 0)$, e assim,

$$\rho_{Q,-a} = Q\frac{\delta(r-a)}{r^2}\delta(\cos\theta + 1)\delta(\phi)$$

A densidade total é

$$\rho = Q\frac{\delta(r-a)}{r^2}\delta(\cos\theta - 1)\delta(\phi) + Q\frac{\delta(r-a)}{r^2}\delta(\cos\theta + 1)\delta(\phi)$$

ou

$$\rho = Q\frac{\delta(r-a)}{r^2}\delta(\phi)[\delta(\cos\theta - 1) + \delta(\cos\theta + 1)]$$

O monopolo $\mathfrak{q}_{0,0}$ fica

$$\mathfrak{q}_{0,0} = \int_V \rho(\vec{r}\,')Y^*_{0,0}(\theta', \phi')\, dV$$

Lembrando que o elemento de volume em esféricas é dado pela equação 1.47, temos

$$\mathrm{q}_{0,0} =$$

$$\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Q\frac{\delta(r-a)}{r^2}\delta(\phi)[\delta(\cos\theta - 1) + \delta(\cos\theta + 1)]\frac{1}{\sqrt{4\pi}}r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi$$

ou, como $d(\cos\theta) = -\operatorname{sen}\theta$,

$$\mathrm{q}_{0,0} = -\frac{Q}{\sqrt{4\pi}}\int_0^\infty \int_1^{-1} \int_0^{2\pi} \delta(r-a)\delta(\phi)\delta(\cos\theta - 1)\, dr d(\cos\theta) d\phi$$
$$- \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}\int_0^\infty \int_1^{-1} \int_0^{2\pi} \delta(r-a)\delta(\phi)\delta(\cos\theta + 1)\, dr d(\cos\theta) d\phi$$

Definindo $t = \cos\theta$ e trocando a ordem dos limites de integração desta variável, o que muda o sinal da integral, obtemos

$$\mathrm{q}_{0,0} = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}\int_0^\infty \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} \delta(r-a)\delta(\phi)\delta(t - 1)\, dr dt d\phi$$
$$+ \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}\int_0^\infty \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} \delta(r-a)\delta(\phi)\delta(t + 1)\, dr dt d\phi$$

Por fim, da expressão 4.16,

$$\int \delta(x - x_0)\, dx = 1$$

temos, simplesmente,

$$\mathrm{q}_{0,0} = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}} + \frac{Q}{\sqrt{4\pi}} = \frac{2Q}{\sqrt{4\pi}}$$

Note que o momento de monopolo em retangulares, que constitui a carga livre, é dado por

$$q = \int_V \rho(\vec{r})\, dV$$

ou

$$q = \int_V [Q\delta(x)\delta(y)\delta(z-a) + Q\delta(x)\delta(y)\delta(z+a)]\, dV$$

$$
\begin{aligned}
q &= Q\int_V \delta(x)\delta(y)\delta(z-a)\,dV + Q\int_V \delta(x)\delta(y)\delta(z+a)\,dV \\
&= Q + Q \\
q &= 2Q
\end{aligned}
$$

Além disso, vimos, na expressão 8.3, que os momentos de monopolo em coordenadas retangulares e esféricas estão relacionados pela equação

$$\mathfrak{q}_{0,0} = \frac{q}{\sqrt{4\pi}}$$

que, para o nosso caso, fica

$$\mathfrak{q}_{0,0} = \frac{2Q}{\sqrt{4\pi}}$$

concordando com o que foi obtido anteriormente.

Vejamos agora os momentos de dipolo, associados a $\ell = 1$ e $m = 0, \pm 1$. Começamos com $m = 0$, ou seja,

$$\mathfrak{q}_{1,0} = \int_V \rho(\vec{r})rY_{1,0}^*(\theta,\phi)\,dV$$

ou

$$\mathfrak{q}_{1,0} = \int_V Q\frac{\delta(r-a)}{r^2}\delta(\phi)[\delta(\cos\theta - 1) + \delta(\cos\theta + 1)]r\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\,dV$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{q}_{1,0} = \\
&Q\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\delta(r-a)}{r^2}\delta(\phi)\delta(\cos\theta - 1)\cos\theta\, r^3 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi \\
&+ Q\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\delta(r-a)}{r^2}\delta(\phi)\delta(\cos\theta + 1)\cos\theta\, r^3 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi
\end{aligned}
$$

Fazendo a substituição $t = \cos\theta$, encontramos

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{q}_{1,0} = Q\sqrt{\frac{3}{4\pi}}&\int_0^\infty\int_{-1}^1\int_0^{2\pi} r\delta(r-a)\delta(\phi)\, t\delta(t-1)\,dr dt d\phi \\
&+ Q\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int_0^\infty\int_{-1}^1\int_0^{2\pi} r\delta(r-a)\delta(\phi)\, t\delta(t+1)\,dr dt d\phi
\end{aligned}
$$

ou, como (veja a equação 4.17)

$$\int f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$$

achamos

$$\mathfrak{q}_{1,0} = Q\sqrt{\frac{3}{4\pi}}(1)(a) + Q\sqrt{\frac{3}{4\pi}}(-1)(a)$$

ou

$$\mathfrak{q}_{1,0} = 0$$

Para $m = 1$, o momento de dipolo fica

$$\mathfrak{q}_{1,1} = \int_V \rho(\vec{r})rY^*_{1,1}(\theta,\phi)\,dV$$

ou

$$\mathfrak{q}_{1,1} = \int_V rQ\frac{\delta(r-a)}{r^2}\delta(\phi)[\delta(\cos\theta-1)+\delta(\cos\theta+1)]\left[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta e^{-i\phi}\right]dV$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}_{1,1} = &\\ &-Q\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\delta(r-a)}{r}\delta(\phi)\delta(\cos\theta-1)\operatorname{sen}\theta e^{-i\phi}\,r^2\operatorname{sen}\theta\,drd\theta d\phi\\ &-Q\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\delta(r-a)}{r}\delta(\phi)\delta(\cos\theta+1)\operatorname{sen}\theta e^{-i\phi}\,r^2\operatorname{sen}\theta\,drd\theta d\phi\end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$, fazendo $t = \cos\theta$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}_{1,1} = &-Q\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\int_0^\infty\int_{-1}^1\int_0^{2\pi} r\delta(r-a)e^{-i\phi}\delta(\phi)\sqrt{1-t^2}\delta(t-1)\,drdtd\phi\\ &-Q\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\int_0^\infty\int_{-1}^1\int_0^{2\pi} r\delta(r-a)e^{-i\phi}\delta(\phi)\sqrt{1-t^2}\delta(t+1)\,drdtd\phi\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathfrak{q}_{1,1} = -Q\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(a)\left(e^{-i.0}\right)\left[\sqrt{1-(1)^2}\right] - Q\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(a)\left(e^{-i.0}\right)\left[\sqrt{1-(-1)^2}\right]$$

ou

$$\mathfrak{q}_{1,1} = 0$$

Mediante o uso da equação 8.6, que é

$$\mathfrak{q}_{\ell,-m} = (-1)^m \mathfrak{q}^*_{\ell,m}$$

podemos obter o momendo de dipolo associado a $m = -1$, ou seja,

$$\mathfrak{q}_{1,-1} = (-1)^1 \mathfrak{q}^*_{1,1}$$

ou

$$\mathfrak{q}_{1,-1} = 0$$

Observe que o momento de dipolo em coordenadas retangulares é

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}\rho(\vec{r}\,)\, dV$$

ou, no nosso caso,

$$\vec{p} = Q\int_V (x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}})[\delta(x)\delta(y)\delta(z-a) + \delta(x)\delta(y)\delta(z+a)]\, dV$$

e então,

$$\vec{p} = Q\hat{\mathbf{i}}\int_V x[\delta(x)\delta(y)\delta(z-a) + \delta(x)\delta(y)\delta(z+a)]\, dV + Q\,\hat{\mathbf{j}}\int_V y[\delta(x)\delta(y)\delta(z-a) + \delta(x)\delta(y)\delta(z+a)]\, dV + Q\,\hat{\mathbf{k}}\int_V z[\delta(x)\delta(y)\delta(z-a) + \delta(x)\delta(y)\delta(z+a)]\, dV$$

ou seja,

$$\vec{p} = Q\hat{\mathbf{i}}.0 + Q\,\hat{\mathbf{j}}.0 + Q\,\hat{\mathbf{k}}[a + (-a)]$$

e assim,

$$\vec{p} = 0$$

As relações entre os momentos de dipolo em coordenadas retangulares e esféricas são dadas pelas expressões 8.4, 8.5 e 8.7, que são, respectivamente,

$$\mathfrak{q}_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}p_z$$

$$\mathfrak{q}_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x - ip_y)$$

e

$$\mathfrak{q}_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x + ip_y)$$

e vemos que estas equações são novamente verificadas, pois $\vec{p} = 0$, e assim, todos os momentos de dipolo em esféricas são nulos, como foi calculado anteriormente.

Por fim, temos os momentos de quadrupolo, quando $\ell = 2$. Começando com $m = 0$, obtemos

$$\mathfrak{q}_{2,0} = \int_V \rho(\vec{r})r^2 Y^*_{2,0}(\theta,\phi)\,dV$$

ou

$$\mathfrak{q}_{2,0} = \int_V r^2 Q\frac{\delta(r-a)}{r^2}\delta(\phi)[\delta(\cos\theta - 1) + \delta(\cos\theta + 1)]\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right)dV$$

ou ainda,

$$\mathfrak{q}_{2,0} = \frac{Q}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\delta(r-a)\delta(\phi)\delta(\cos\theta - 1)\left(3\cos^2\theta - 1\right)r^2\,\mathrm{sen}\,\theta dr d\theta d\phi$$
$$+\frac{Q}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\delta(r-a)\delta(\phi)\delta(\cos\theta + 1)\left(3\cos^2\theta - 1\right)r^2\,\mathrm{sen}\,\theta dr d\theta d\phi$$

Usando a substituição $t = \cos\theta$, achamos

$$\mathfrak{q}_{2,0} = \frac{Q}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int_0^\infty\int_{-1}^1\int_0^{2\pi} r^2\delta(r-a)\delta(\phi)\delta(t-1)\big(3t^2-1\big)\,drdtd\phi$$
$$+\frac{Q}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int_0^\infty\int_{-1}^1\int_0^{2\pi} r^2\delta(r-a)\delta(\phi)\delta(t+1)\big(3t^2-1\big)\,drdtd\phi$$

e então,

$$\mathfrak{q}_{2,0} = \frac{Q}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}(a^2)\left[3(1^2)-1\right] + \frac{Q}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}(a^2)\left\{3\left[(-1)^2\right]-1\right\}$$

ou

$$\mathfrak{q}_{2,0} = \frac{Qa^2}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}(2) + \frac{Qa^2}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}(2)$$

ou ainda,

$$\mathfrak{q}_{2,0} = 2Qa^2\sqrt{\frac{5}{4\pi}}$$

Como $\mathcal{Q} = Qa^2$,

$$\mathfrak{q}_{2,0} = 2\mathcal{Q}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}$$

Quando $m = 1$, encontramos

$$\mathfrak{q}_{2,1} = \int_V \rho(\vec{r})r^2 Y_{2,1}^*(\theta,\phi)\,dV$$

ou

$$\mathfrak{q}_{2,1} =$$
$$\int_V r^2 Q\frac{\delta(r-a)}{r^2}\delta(\phi)[\delta(\cos\theta-1)+\delta(\cos\theta+1)]\left[-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\operatorname{sen}\theta e^{-i\phi}\right]dV$$

ou então,

$$\mathfrak{q}_{2,1} =$$
$$-Q\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\delta(r-a)\delta(\phi)\delta(\cos\theta-1)\cos\theta\operatorname{sen}\theta e^{-i\phi}\,r^2\operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi$$
$$-Q\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\delta(r-a)\delta(\phi)\delta(\cos\theta+1)\cos\theta\operatorname{sen}\theta e^{-i\phi}\,r^2\operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi$$

que fica, considerando $t = \cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-t^2}$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_{2,1} = &-Q\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\delta(r-a)e^{-i\phi}\delta(\phi)t\sqrt{1-t^2}\delta(t-1)drdtd\phi \\ &- Q\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\delta(r-a)e^{-i\phi}\delta(\phi)t\sqrt{1-t^2}\delta(\cos\theta+1)drdtd\phi \end{aligned}$$

ou

$$\mathfrak{q}_{2,1} = -Q\sqrt{\frac{15}{8\pi}}(a^2)\left(e^{-i.0}\right)\left(1\sqrt{1-1^2}\right) - Q\sqrt{\frac{15}{8\pi}}(a^2)\left(e^{-i.0}\right)\left[1\sqrt{1-(-1)^2}\right]$$

e assim,

$$\mathfrak{q}_{2,1} = 0$$

Usando agora a expressão 8.6, obtemos o momento de quadrupolo para $m = -1$, isto é,

$$\mathfrak{q}_{2,-1} = (-1)^1\mathfrak{q}_{2,1}^*$$

e desse modo,

$$\mathfrak{q}_{2,-1} = 0$$

Por fim, para $m = 2$, temos

$$\mathfrak{q}_{2,2} = \int_V \rho(\vec{r})r^2Y_{2,2}^*(\theta,\phi)\,dV$$

ou

$$\mathfrak{q}_{2,2} = \int_V r^2Q\frac{\delta(r-a)}{r^2}\delta(\phi)[\delta(\cos\theta-1)+\delta(\cos\theta+1)]\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\operatorname{sen}^2\theta e^{-2i\phi}\,dV$$

ou então,

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_{2,2} = \\ &\frac{Q}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\delta(r-a)\delta(\phi)\delta(\cos\theta-1)\operatorname{sen}^2\theta e^{-2i\phi}\,r^2\operatorname{sen}\theta drd\theta d\phi \\ &+\frac{Q}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\delta(r-a)\delta(\phi)\delta(\cos\theta+1)\operatorname{sen}^2\theta e^{-2i\phi}\,r^2\operatorname{sen}\theta drd\theta d\phi \end{aligned}$$

Usando novamente as substituições $t = \cos\theta$ e $\operatorname{sen}^2\theta = 1-\cos^2\theta$, encontramos

$$\mathfrak{q}_{2,2} = \frac{Q}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int_0^\infty\int_{-1}^1\int_0^{2\pi} r^2\delta(r-a)e^{-2i\phi}\delta(\phi)\big(1-t^2\big)\delta(t-1)drdtd\phi$$
$$+\frac{Q}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int_0^\infty\int_{-1}^1\int_0^{2\pi} r^2\delta(r-a)e^{-2i\phi}\delta(\phi)\big(1-t^2\big)\delta(t+1)drdtd\phi$$

ou

$$\mathfrak{q}_{2,2} = \frac{Q}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(a^2)\left(e^{-2i.0}\right)(1-1^2) + \frac{Q}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(a^2)\left(e^{-2i.0}\right)\left[1(-1)^2\right]$$

ou seja,

$$\mathfrak{q}_{2,2} = 0$$

e através da equação 8.6, o momento de quadrupolo para $m = -2$ é

$$\mathfrak{q}_{2,-2} = (-1)^2\mathfrak{q}_{2,2}^*$$

ou

$$\mathfrak{q}_{2,-2} = 0$$

Note que o único termo não-nulo é o momento $\mathfrak{q}_{2,0}$, que está associado, pela expressão 8.10, ao momento de quadrupolo $\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3}$ em coordenadas retangulares, isto é,

$$\mathfrak{q}_{2,0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3}$$

ou então,

$$\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3} = 2\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\mathfrak{q}_{2,0}$$

e assim,

$$\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3} = 2\sqrt{\frac{4\pi}{5}}2Q\sqrt{\frac{5}{4\pi}}$$

ou

$$\overleftrightarrow{Q}_{3,3} = 4Q$$

O fato de este momento de quadrupolo não ser nulo está associado à verificação de que a densidade de carga tem uma simetria cilíndrica em torno do eixo z, como pode ser visto na figura 8.1. Isto sugere também que os momentos de quadrupolo $\overleftrightarrow{Q}_{1,1}$ e $\overleftrightarrow{Q}_{2,2}$ devem ter valores iguais (você pode fazer a verificação).

b) Obtenha o potencial elétrico desta distribuição de cargas como uma expansão em multipolos.

Para encontrar o potencial elétrico, usamos a expressão 8.2,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \mathfrak{q}_{\ell,m} \frac{Y_{\ell,m}(\theta,\phi)}{r^{\ell+1}}$$

ou seja, usando os valores encontrados,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathfrak{q}_{0,0}}{2.0+1} \frac{Y_{0,0}(\theta,\phi)}{r^{0+1}} + \frac{\mathfrak{q}_{2,0}}{2.2+1} \frac{Y_{2,0}(\theta,\phi)}{r^{2+1}} + \cdots \right\}$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \left\{ \frac{2Q}{\sqrt{4\pi}} \frac{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}}{r} + \frac{2Q\sqrt{\frac{5}{4\pi}}}{5} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}(3\cos^2\theta - 1)}{r^3} + \cdots \right\}$$

ou ainda, chamando $q = 2Q$ à carga total,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q(3\cos^2\theta - 1)}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \cdots$$

Veja que, nesta expressão, temos contribuições do monopolo e do quadrupolo, mas não do dipolo. Isto já era esperado, visto que a carga líquida é não-nula, e a distribuição de cargas, que tem uma simetria cilíndrica em torno do eixo z, deve ter pelo menos um momento de quadrupolo não-nulo. Como as cargas têm mesmo sinal e estão situadas de forma simétrica em relação à origem, em $z = a$ e $z = -a$, elas não deveriam mesmo ter um momento de dipolo associado. Para que cargas situadas de forma simétrica em relação a uma origem tenham um momento de dipolo, elas devem ter sinais opostos.

Exemplo 8.2. *Existe no espaço uma distribuição contínua de cargas dada por* $\rho(r,\theta,\phi) = \rho_0 e^{-\frac{r}{R}} \cos\theta$. *Obtenha os primeiros momentos de multipolo para essa distribuição.*

Para calcular os multipolos, precisamos da expressão 8.1, que é

$$q_{\ell,m} = \int_V \rho(\vec{r}\,')r'^{\,\ell} Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')\,dV$$

Para o monopolo, temos

$$q_{0,0} = \int_V \rho(\vec{r}) Y^*_{0,0}(\theta,\phi)\,dV$$

ou

$$\begin{aligned} q_{0,0} &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_0 e^{-\frac{r}{R}} \cos\theta \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi \\ &= \frac{\rho_0}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty \int_0^\pi e^{-\frac{r}{R}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, r^2 dr d\theta \big[\phi\big]_0^{2\pi} \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{r}{R}} r^2 dr \left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^\pi \\ q_{0,0} &= 0 \end{aligned}$$

Assim, a carga líquida é nula, já que o momento de monopolo está associado à carga pela equação 8.3. Vejamos os momentos de dipolo, começando com $m = 0$, ou seja,

$$q_{1,0} = \int_V \rho(\vec{r}) r Y^*_{1,0}(\theta,\phi)\,dV$$

ou

$$q_{1,0} = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_0 e^{-\frac{r}{R}} \cos\theta \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta\, r^3 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi$$

ou ainda,

$$q_{1,0} = \rho_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r}{R}} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta\, r^3 dr d\theta d\phi$$

A integral em ϕ é simples e resulta em 2π, isto é,

$$q_{1,0} = 2\pi\rho_0\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi e^{-\frac{r}{R}}\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\, r^3 dr d\theta$$

Agora, utilizamos a mudança de variável

$$u = -\frac{\cos^3\theta}{3} \Rightarrow du = \cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta$$

e transformamos a integral em θ em

$$\begin{aligned} q_{1,0} &= 2\pi\rho_0\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi e^{-\frac{r}{R}}\, r^3 dr du \\ &= 2\pi\rho_0\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{r}{R}}\, r^3 dr\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi \\ q_{1,0} &= \rho_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int_0^\infty r^3 e^{-\frac{r}{R}}\, dr \end{aligned}$$

Para realizar esta última integral, fazemos

$$\begin{aligned} u &= r^3 & du &= 3r^2 dr \\ dv &= e^{-\frac{r}{R}} dr & v &= -Re^{-\frac{r}{R}} \end{aligned}$$

e portanto, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{r}{R}}\, dr &= \left[-Rr^3 e^{-\frac{r}{R}}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -Re^{-\frac{r}{R}} 3r^2 dr \\ \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{r}{R}}\, dr &= 3R\int_0^\infty e^{-\frac{r}{R}} r^2 dr \end{aligned}$$

Note que o termo entre colchetes é nulo, porque em $r = 0$ o termo r^3 se anula, e em $r \to \infty$ a função exponencial vai a zero mais rapidamente que qualquer polinômio. Precisamos de uma nova integração por partes, definindo

$$\begin{aligned} u &= r^2 & du &= 2r dr \\ dv &= e^{-\frac{r}{R}} dr & v &= -Re^{-\frac{r}{R}} \end{aligned}$$

e então,

$$3R\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r}{R}}\,dr = 3R\Big[-Rr^2e^{-\frac{r}{R}}\Big]_0^\infty - 3R\int_0^\infty -Re^{-\frac{r}{R}}2rdr$$
$$3R\int_0^\infty r^3 e^{-\frac{r}{R}}\,dr = 6R^2\int_0^\infty e^{-\frac{r}{R}}rdr$$

ou seja,

$$\int_0^\infty r^3 e^{-\frac{r}{R}}\,dr = 6R^2\int_0^\infty e^{-\frac{r}{R}}rdr$$

Usando novamente uma integração por partes, onde

$$u = r \qquad du = dr$$
$$dv = e^{-\frac{r}{R}}dr \qquad v = -Re^{-\frac{r}{R}}$$

encontramos

$$\begin{aligned}6R^2\int_0^\infty e^{-\frac{r}{R}}rdr &= 6R^2\Big[-Rre^{-\frac{r}{R}}\Big]_0^\infty - 6R^2\int_0^\infty -Re^{-\frac{r}{R}}dr\\ &= 6R^3\int_0^\infty e^{-\frac{r}{R}}dr\\ &= 6R^3\big[-Re^{-\frac{r}{R}}\big]_0^\infty\\ &= -6R^4[0-(-1)]\end{aligned}$$
$$6R^2\int_0^\infty re^{-\frac{r}{R}}\,dr = 6R^4$$

e desse modo,

$$\int_0^\infty r^3e^{-\frac{r}{R}}\,dr = 6R^4$$

e

$$q_{1,0} = \rho_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int_0^\infty r^3e^{-\frac{r}{R}}\,dr$$
$$q_{1,0} = 6R^4\rho_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}$$

O momento de dipolo para $m = 1$ fica

$$\mathfrak{q}_{1,1} = \int_V \rho(\vec{r}) r Y^*_{1,1}(\theta, \phi)\, dV$$

ou

$$\mathfrak{q}_{1,1} = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_0 e^{-\frac{r}{R}} \cos\theta \left[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta e^{-i\phi} \right] r^3 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q}_{1,1} &= -\rho_0 \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r}{R}} \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta e^{-i\phi}\, r^3 dr d\theta d\phi \\
&= -\rho_0 \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int_0^\infty \int_0^\pi e^{-\frac{r}{R}} \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta\, r^3 dr d\theta \left[\frac{e^{-i\phi}}{-i} \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\rho_0}{i} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int_0^\infty \int_0^\pi e^{-\frac{r}{R}} \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta\, r^3 dr d\theta \, [\overbrace{e^{-2\pi i}}^{1} - 1] \\
\mathfrak{q}_{1,1} &= 0
\end{aligned}$$

A relação 8.6,

$$\mathfrak{q}_{\ell,-m} = (-1)^m \mathfrak{q}^*_{\ell,m}$$

nos permite obter o momento de dipolo para $m = -1$, ou seja,

$$\mathfrak{q}_{1,-1} = (-1)^1 \mathfrak{q}^*_{1,1} = 0$$

Assim, existe apenas um momento de dipolo não-nulo em coordenadas esféricas, e pelas equações 8.4 e 8.5, esse momento de dipolo está associado à componente z do momento de dipolo em retangulares, pois

$$\mathfrak{q}_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z$$

e assim,

$$\begin{aligned}
p_z &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \mathfrak{q}_{1,0} \\
p_z &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} 6R^4 \rho_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}}
\end{aligned}$$

$$p_z = 6R^4\rho_0\frac{4\pi}{3}$$
$$p_z = 8\pi R^4\rho_0$$

Observe que a densidade de cargas não depende de ϕ, e ela é simétrica em relação ao eixo z, o que explica a inexistência de momentos de dipolo nas direções x e y. Além disso, na região $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ela é positiva, ao passo que no intervalo $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ ela é negativa, o que caracteriza um dipolo na direção z, no sentido positivo do eixo, concordando com os resultados obtidos. Vamos agora aos cálculos dos momentos de quadrupolo, iniciando com $m = 0$.

$$q_{2,0} = \int_V \rho(\vec{r})r^2 Y^*_{2,0}(\theta,\phi)\, dV$$

ou

$$q_{2,0} = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_0 e^{-\frac{r}{R}} \cos\theta \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right) r^4 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi$$

ou ainda,

$$q_{2,0} = \frac{3\rho_0}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r}{R}} \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta\, r^4 dr d\theta d\phi$$
$$- \frac{\rho_0}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r}{R}} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, r^4 dr d\theta d\phi$$

As integrais em ϕ resultam em 2π, e assim,

$$q_{2,0} = 3\pi\rho_0\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int_0^\infty \int_0^\pi e^{-\frac{r}{R}} \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta\, r^4 dr d\theta$$
$$- \pi\rho_0\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int_0^\infty \int_0^\pi e^{-\frac{r}{R}} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, r^4 dr d\theta$$

A primeira integral em θ é resolvida mediante a substituição

$$u = -\frac{\cos^4\theta}{4} \Rightarrow du = \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta d\theta$$

enquanto na segunda, fazemos

$$v = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2} \Rightarrow dv = \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

e obtemos, portanto,

$$\mathfrak{q}_{2,0} = 3\pi\rho_0\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi e^{-\frac{r}{R}}\,r^4 dr du - \pi\rho_0\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi e^{-\frac{r}{R}}\,r^4 dr dv$$

ou

$$\mathfrak{q}_{2,0} = 3\pi\rho_0\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{r}{R}}\,r^4 dr\,\overbrace{\left[-\frac{\cos^4\theta}{4}\right]_0^\pi}^{0}$$
$$- \pi\rho_0\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{r}{R}}\,r^4 dr\,\overbrace{\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^\pi}^{0}$$

e finalmente,

$$\mathfrak{q}_{2,0} = 0$$

O momento de quadrupolo para $m = 1$ fica

$$\mathfrak{q}_{2,1} = \int_V \rho(\vec{r})r^2 Y^*_{2,1}(\theta,\phi)\,dV$$

ou

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q}_{2,1} &= \int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho_0 e^{-\frac{r}{R}}\cos\theta\left[-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\operatorname{sen}\theta e^{-i\phi}\right] r^4\operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi \\
&= -\rho_0\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi e^{-\frac{r}{R}}\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta\, r^4 dr d\theta\left[\frac{e^{-i\phi}}{-i}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\rho_0}{i}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\int_0^\infty\int_0^\pi e^{-\frac{r}{R}}\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta\, r^4 dr d\theta\,[\overbrace{e^{-2\pi i}}^{1}-1] \\
\mathfrak{q}_{2,1} &= 0
\end{aligned}$$

O momento de dipolo para $m = -1$ é obtido através da expressão 8.6, e assim,

$$\mathfrak{q}_{2,-1} = (-1)^1\mathfrak{q}^*_{2,1} = 0$$

Por fim, o momento de quadrupolo para $m = 2$ é

$$\mathfrak{q}_{2,2} = \int_V \rho(\vec{r})r^2 Y^*_{2,2}(\theta,\phi)\,dV$$

ou

$$\begin{aligned}
q_{2,2} &= \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \rho_0 e^{-\frac{r}{R}} \cos\theta \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \operatorname{sen}^2\theta e^{-2i\phi} r^4 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi \\
&= \frac{\rho_0}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int_0^{\infty}\int_0^{\pi} e^{-\frac{r}{R}} \cos\theta \operatorname{sen}^3\theta\, r^4 dr d\theta \left[\frac{e^{-2i\phi}}{-2i}\right]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{\rho_0}{8i}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int_0^{\infty}\int_0^{\pi} e^{-\frac{r}{R}} \cos\theta \operatorname{sen}^3\theta\, r^4 dr d\theta \Big[\overbrace{e^{-4\pi i}}^{1} - 1\Big] \\
q_{2,2} &= 0
\end{aligned}$$

e portanto,

$$q_{2,-2} = 0$$

de modo que todos os momentos de quadrupolo são nulos. Isso já era esperado, pois a densidade de cargas tem uma simetria esférica em torno do eixo z, e os momentos de quadrupolo deveriam mesmo ser nulos. A expansão do potencial elétrico em multipolos, dada pela expressão 8.2, fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\left\{\frac{1}{2.1+1} q_{1,0} \frac{Y_{1,0}(\theta,\phi)}{r^{1+1}} + \cdots\right\}$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\left\{\frac{1}{3} 6R^4\rho_0 \frac{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta}{r^2} + \cdots\right\}$$

ou ainda,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{2R^4\rho_0\cos\theta}{\epsilon_0 r^2} + \cdots$$

Observe que o primeiro termo, que é o mais importante, é o de dipolo, já que a carga líquida é nula, e não há o momento de monopolo.

Exemplo 8.3. *Suponha que existe, numa certa região do espaço, uma densidade de carga ρ que produz um campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}$. Mostre que, para uma esfera de raio R que envolve completamente a densidade de carga ρ, vale a relação*

$$\int_V \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})dV = -\frac{1}{3\epsilon_0}\vec{p} \tag{8.14}$$

onde $\vec{p}$ é o momento de dipolo da distribuição de cargas ρ.

Para iniciar o cálculo, vamos considerar a integral

$$\int_V \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\, dV$$

Ela pode ser transformada em outra integral, se lembrarmos que

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V}$$

e assim, temos

$$\int_V \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\, dV = -\int_V \nabla\mathbb{V}(\vec{r})\, dV$$

Agora, utilizamos a identidade vetorial 1.64a,

$$\int_V \nabla\Phi\, dV = \oint_S \Phi\, \hat{n}\, dA$$

para transformar a integral do lado direito em uma integral de superfície, que fica, lembrando que o versor normal à superfície esférica S é $\hat{\mathbf{r}}$,

$$\int_V \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\, dV = -\oint_S \mathbb{V}(\vec{r})\hat{\mathbf{r}}\, dA$$

O potencial elétrico é dado pela expressão 5.12, e assim,

$$\int_V \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\, dV = -\oint_S \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV' \right\}\hat{\mathbf{r}}\, dA$$

ou, invertendo a ordem em que as integrais são feitas,

$$\int_V \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\, dV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\left\{ \oint_S \frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dA \right\} dV' \tag{8.15}$$

Em coordenadas esféricas, $dA = R^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi$. O fator $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ pode ser escrito mediante a expansão 6.90 em harmônicos esféricos, que é

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{4\pi}{r_>} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\ell} Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi') Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

e o versor $\hat{\mathbf{r}}$, de acordo com a primeira das expressões 1.37, vale

$$\hat{\mathbf{r}} = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$

Se for possível escrever este versor como uma combinação dos harmônicos esféricos, poderemos utilizar a condição de ortogonalidade C.31,

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^*_{\ell',m'}(\theta,\phi) Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\operatorname{sen}\theta\, d\theta d\phi = \delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'}$$

para facilitar o cálculo das integrais. Isto de fato ocorre, como mostramos em seguida.

Os harmônicos esféricos para $\ell = 1$, que podem ser vistos na tabela 6.4, são

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

de onde extraímos

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}$$

e

$$Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta e^{i\phi} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi)$$
$$Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta e^{-i\phi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta(\cos\phi - i\operatorname{sen}\phi)$$

Somando estas duas expressões, obtemos

$$Y_{1,1} + Y_{1,-1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi) + \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta(\cos\phi - i\operatorname{sen}\phi)$$
$$Y_{1,1} + Y_{1,-1} = -2i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$

ou

$$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi = -\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[Y_{1,1} + Y_{1,-1}\right]$$
$$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[Y_{1,1} + Y_{1,-1}\right]$$

Se subtrairmos as equações, o resultado é

$$Y_{1,1} - Y_{1,-1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi) - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta(\cos\phi - i \operatorname{sen}\phi)$$
$$Y_{1,1} - Y_{1,-1} = -2\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta \cos\phi$$

ou

$$\operatorname{sen}\theta \cos\phi = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[Y_{1,1} - Y_{1,-1}\right]$$
$$\operatorname{sen}\theta \cos\phi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[Y_{1,-1} - Y_{1,1}\right]$$

O versor $\hat{\mathbf{r}}$ pode agora ser escrito como

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[Y_{1,-1} - Y_{1,1}\right]\hat{\mathbf{i}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[Y_{1,1} + Y_{1,-1}\right]\hat{\mathbf{j}} + \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}\,\hat{\mathbf{k}}$$

onde aparecem apenas os harmônicos esféricos de ordem $\ell = 1$. Vamos utilizar a expressão 6.79, que relaciona os harmônicos esféricos com seu complexo conjugado, isto é,

$$Y_{\ell,-m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

Assim, temos

$$Y_{1,0}(\theta,\phi) = (-1)^0 Y^*_{1,0}(\theta,\phi) = Y^*_{1,0}(\theta,\phi)$$

$$Y_{1,-1}(\theta,\phi) = (-1)^1 Y^*_{1,1}(\theta,\phi) = -Y^*_{1,1}(\theta,\phi)$$

e

$$Y_{1,-(-1)}(\theta,\phi) = (-1)^{-1} Y^*_{1,-1}(\theta,\phi)$$

$$Y_{1,1}(\theta,\phi) = -Y^*_{1,-1}(\theta,\phi)$$

Em termos dos complexos conjugados dos harmônicos esféricos, $\hat{\mathbf{r}}$ fica

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[-Y^*_{1,1} + Y^*_{1,-1}\right]\hat{\mathbf{i}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[-Y^*_{1,-1} - Y^*_{1,1}\right]\hat{\mathbf{j}} + \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y^*_{1,0}\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[Y^*_{1,-1} - Y^*_{1,1}\right]\hat{\mathbf{i}} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[Y^*_{1,-1} + Y^*_{1,1}\right]\hat{\mathbf{j}} + \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y^*_{1,0}\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (8.16)$$

Preferimos escrevê-lo nesta forma porque, na relação de ortogonalidade, aparecem os complexos conjugados dos harmônicos esféricos e, como pretendemos utilizar esta relação, escolhemos expressar $\hat{\mathbf{r}}$ nesta forma. Voltando à integral e substituindo todos os termos encontrados, mas considerando apenas a integral de superfície, para não sobrecarregar a notação, achamos

$$\oint_S \frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(Y^*_{1,-1} - Y^*_{1,1}\right)\hat{\mathbf{i}} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(Y^*_{1,-1} + Y^*_{1,1}\right)\hat{\mathbf{j}} + \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y^*_{1,0}\,\hat{\mathbf{k}}\right] \times \frac{4\pi}{r_>}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{1}{2\ell+1}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\ell} Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')Y_{\ell,m}$$

Nesta expressão, todos os harmônicos esféricos são funções de θ e ϕ, exceto quando eles dependem de outras variáveis, quando então as escrevemos explicitamente. Esta integral pode ser reescrita como

$$\oint_S \frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dA = \frac{4\pi R^2}{r_>}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')}{2\ell+1}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\ell} \times \Bigg\{ \frac{\hat{\mathbf{i}}}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^*_{1,-1}Y_{\ell,m}\operatorname{sen}\theta d\theta d\phi - \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^*_{1,1}Y_{\ell,m}\operatorname{sen}\theta d\theta d\phi\right] - \frac{i\hat{\mathbf{j}}}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^*_{1,-1}Y_{\ell,m}\operatorname{sen}\theta d\theta d\phi + \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^*_{1,1}Y_{\ell,m}\operatorname{sen}\theta d\theta d\phi\right] + \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,\hat{\mathbf{k}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^*_{1,0}Y_{\ell,m}\operatorname{sen}\theta d\theta d\phi \Bigg\}$$

Usando agora a relação de ortogonalidade C.31,

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^*_{\ell',m'}(\theta,\phi)Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta d\phi = \delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'}$$

para efetuar as integrais, obtemos

$$\oint_S \frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dA = \frac{4\pi R^2}{r_>}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')}{2\ell+1}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\ell}\times$$
$$\left\{\frac{\hat{\mathbf{i}}}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[\delta_{\ell,1}\delta_{m,-1}-\delta_{\ell,1}\delta_{m,1}\right]-\frac{i\hat{\mathbf{j}}}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[\delta_{\ell,1}\delta_{m,-1}+\delta_{\ell,1}\delta_{m,1}\right]\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,\hat{\mathbf{k}}\,\delta_{\ell,1}\delta_{m,0}\right\}$$

Observe que as funções delta fixam o valor de ℓ em $\ell = 1$. Além disso, ao fazer as somas em m, encontramos

$$\oint_S \frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dA = \frac{4\pi R^2}{3r_>}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)\left\{\frac{\hat{\mathbf{i}}}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[Y^*_{1,-1}(\theta',\phi')-Y^*_{1,1}(\theta',\phi')\right]\right.$$
$$\left.-\frac{i\hat{\mathbf{j}}}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[Y^*_{1,-1}(\theta',\phi')+Y^*_{1,1}(\theta',\phi')\right]+\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,\hat{\mathbf{k}}\,Y^*_{1,0}(\theta',\phi')\right\}$$

Vamos recordar a expansão 8.16 para o versor $\hat{\mathbf{r}}$ em harmônicos esféricos, que é

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[Y^*_{1,-1}-Y^*_{1,1}\right]\hat{\mathbf{i}}-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[Y^*_{1,-1}+Y^*_{1,1}\right]\hat{\mathbf{j}}+\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y^*_{1,0}\,\hat{\mathbf{k}}$$

O termo entre chaves na integral é justamente o versor $\hat{\mathbf{r}}'$, e assim,

$$\oint_S \frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dA = \frac{4\pi R^2}{3}\left(\frac{r_<}{r_>^2}\right)\hat{\mathbf{r}}'$$

Utilizando este resultado na integral 8.15, achamos

$$\int_V \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\,dV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{4\pi R^2}{3}\left(\frac{r_<}{r_>^2}\right)\hat{\mathbf{r}}'\,dV'$$

ou

$$\int_V \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\, dV = -\frac{R^2}{3\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\left(\frac{r_<}{r_>^2}\right)\hat{\mathbf{r}}'\, dV'$$

Esta expressão é geral e válida para qualquer esfera de raio R num meio com uma densidade de carga ρ. No nosso caso, a esfera envolve completamente a densidade de cargas, e assim, $r_> = R$ e $r_< = r'$. A integral fica

$$\int_V \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\, dV = -\frac{R^2}{3\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{r'}{R^2}\hat{\mathbf{r}}'\, dV'$$

ou

$$\int_V \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\, dV = -\frac{1}{3\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'\, dV'$$

Lembrando que a definição do momento de dipolo é

$$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'\, dV'$$

temos

$$\int_V \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\, dV = -\frac{\vec{p}}{3\epsilon_0}$$

que é a expressão 8.14 que desejávamos demonstrar. Veja que, quando a densidade de carga ρ está completamente fora da esfera, $r_< = R$ e $r_> = r'$, de modo que a integral de volume do campo elétrico fica

$$\int_V \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\, dV = -\frac{R^2}{3\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\left(\frac{R}{r'^{\,2}}\right)\hat{\mathbf{r}}'\, dV'$$

ou, como

$$\hat{\mathbf{r}}' = \frac{\vec{r}\,'}{r'}$$

a integral pode ser escrita na forma

$$\int_V \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\, dV = -\frac{R^3}{3\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{\vec{r}\,'}{r'^{\,3}}\, dV'$$

Comparando a integral do lado direito com a expressão 4.5,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV$$

vemos que elas podem ser identificadas uma com a outra, se considerarmos que $\vec{r}=0$, o que nos fornece

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}(0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{-\vec{r}\,'}{|-\vec{r}\,'|^3}\,dV \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{\vec{r}\,'}{r'^{\,3}}\,dV \\
-4\pi\epsilon_0\vec{\mathcal{E}}(0) &= \int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{\vec{r}\,'}{r'^{\,3}}\,dV
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\int_V \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\,dV = -\frac{R^3}{3\epsilon_0}\left[-4\pi\epsilon_0\vec{\mathcal{E}}(0)\right]$$

ou

$$\int_V \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\,dV = \frac{4\pi R^3}{3}\vec{\mathcal{E}}(0)$$

Assim, o campo elétrico médio dentro de uma esfera que não tem cargas no seu interior, que é a integral de volume do campo elétrico dividida pelo volume da esfera, é igual ao valor do campo elétrico no centro da esfera, isto é,

$$\begin{aligned}
\langle\vec{\mathcal{E}}\rangle &= \frac{1}{V}\int_V \vec{\mathcal{E}}\,dV \\
&= \frac{1}{\frac{4\pi R^3}{3}}\frac{4\pi R^3}{3}\vec{\mathcal{E}}(0) \\
\langle\vec{\mathcal{E}}\rangle &= \vec{\mathcal{E}}(0)
\end{aligned}$$

Além do potencial elétrico, é possível também expandir a energia potencial elétrica associada a uma distribuição de cargas em termos de momentos de multipolos, o que é feito a seguir.

8.2 Expansão da Energia Potencial Elétrica em Multipolos

A expressão 5.11, que nos fornece o aumento de energia potencial ao trazermos uma carga q, submetida ao potencial $\mathbb{V}$, do infinito para a posição $\vec{r}$, é

$$U = q\mathbb{V}$$

Se, ao invés de uma carga pontual, trouxermos uma distribuição de cargas de densidade $\rho(\vec{r}\,)$ para as posições $\vec{r}$, sujeita ao potencial externo $\mathbb{V}(\vec{r}\,)$, o aumento de energia potencial será

$$U = \int_V \rho(\vec{r}\,)\mathbb{V}(\vec{r}\,)\,dV \tag{8.17}$$

Considerando que o potencial elétrico é uma função contínua e bem comportada na região ocupada por $\rho(\vec{r})$, podemos expandir o potencial em uma série de Taylor, em torno de uma origem apropriada, utilizando as expressões 2.8 ou 2.9, para obter

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \mathbb{V}(0) + \vec{r}\cdot\nabla\mathbb{V}(0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i x_j \frac{\partial^2\mathbb{V}(0)}{\partial x_i \partial x_j} + \cdots$$

Como $\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V}$, podemos escrever

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \mathbb{V}(0) - \vec{r}\cdot\vec{\mathcal{E}}(0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\mathbb{V}(0)}{\partial x_j} + \cdots$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \mathbb{V}(0) - \vec{r}\cdot\vec{\mathcal{E}}(0) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i x_j \frac{\partial\mathcal{E}_j(0)}{\partial x_i} + \cdots$$

Como $\mathbb{V}$ é o potencial a que a densidade de cargas $\rho(\vec{r}\,)$ está submetida, ele é gerado por cargas que não estão na região de interesse, e assim, no volume V em que estamos interessados, este potencial satisfaz a equação de Laplace, ou seja,

$$\nabla^2\mathbb{V} = 0$$

Como

$$\nabla^2 \mathbb{V} = \nabla \cdot \nabla \mathbb{V} = -\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

temos

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$$

de modo que o campo elétrico externo à distribuição de cargas ρ possui um divergente nulo dentro do volume V. Observe que esse campo elétrico externo é gerado por alguma distribuição de cargas situada noutra região V' que não aquela definida no volume V, que é a região de interesse, e assim, em geral, seu divergente não é nulo em todo o espaço. Em particular, na região V' seu divergente vale

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho'}{\epsilon_0}$$

onde ρ' é a distribuição de cargas situada em V', a qual gera o campo elétrico. Já que $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$, podemos somar o termo

$$-\frac{r^2}{6}\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(0) = -\frac{r^2}{6}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathcal{E}_i(0)}{\partial x_i}$$

à expansão do potencial elétrico acima, para obter

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(0) - \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}(0) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i x_j \frac{\partial \mathcal{E}_j(0)}{\partial x_i} + \cdots - \frac{r^2}{6}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathcal{E}_i(0)}{\partial x_i}$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(0) - \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}(0) - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} 3x_i x_j \frac{\partial \mathcal{E}_j(0)}{\partial x_i} - \frac{r^2}{6}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathcal{E}_i(0)}{\partial x_i} + \cdots$$

ou ainda, utilizando a função delta de Kronecker para incorporar o termo que envolve r^2 à somatória,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(0) - \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}(0) - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \left(3x_i x_j - r^2\delta_{i,j}\right)\frac{\partial \mathcal{E}_j(0)}{\partial x_i} + \cdots$$

Agora, substituímos esta expressão na equação 8.17, isto é,

$$U = \int_V \rho(\vec{r}) \left[\mathbb{V}(0) - \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(3x_i x_j - r^2 \delta_{i,j}\right) \frac{\partial \mathcal{E}_j(0)}{\partial x_i} + \cdots \right] dV$$

ou

$$U = \int_V \rho(\vec{r}) \mathbb{V}(0)\, dV - \int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}(0)\, dV - \frac{1}{6} \int_V \rho(\vec{r}) \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(3x_i x_j - r^2 \delta_{i,j}\right) \frac{\partial \mathcal{E}_j(0)}{\partial x_i}\, dV + \cdots$$

Os termos $\mathbb{V}(0)$, $\vec{\mathcal{E}}(0)$, etc. são todos constantes e podem ser retirados da integral. Além disso, a ordem em que a integral e as somatórias são feitas pode ser invertida, ou seja,

$$U = \mathbb{V}(0) \overbrace{\int_V \rho(\vec{r})\, dV}^{Q} - \vec{\mathcal{E}}(0) \cdot \overbrace{\int_V \rho(\vec{r}) \vec{r}\, dV}^{\vec{p}} - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{E}_j(0)}{\partial x_i} \overbrace{\int_V \rho(\vec{r}) \left(3x_i x_j - r^2 \delta_{i,j}\right) dV}^{\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{i,j}} + \cdots$$

Utilizando a definição dos momentos de multipolo, obtemos

$$U = \mathbb{V}(0) Q - \vec{\mathcal{E}}(0) \cdot \vec{p} - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{E}_j(0)}{\partial x_i} \overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{i,j} + \cdots$$

ou

$$U = Q \mathbb{V}(0) - \vec{p} \cdot \vec{\mathcal{E}}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{i,j} \frac{\partial \mathcal{E}_j(0)}{\partial x_i} + \cdots \tag{8.18}$$

Observe que, nesta expressão, fica claro de onde vêm as contribuições para a energia potencial elétrica em termos dos multipolos. O monopolo, que é a carga, está associado ao potencial elétrico; o dipolo, ao campo elétrico, que é a derivada do potencial; e o quadrupolo, às derivadas do campo elétrico, ou às derivadas segundas do potencial, e assim sucessivamente. Quando o potencial

elétrico externo é constante, seu gradiente, que é o campo elétrico, é nulo, e nulas também são todas as outras derivadas de ordem maior, de tal forma que a única contribuição que existe para a energia vem do primeiro termo da expressão acima. Se o campo elétrico é homogêneo, suas derivadas são nulas, e os termos de quadrupolo e dos outros multipolos maiores são todos nulos, de modo que só há a contribuição dos dois primeiros termos. À medida que o campo elétrico se torna mais e mais inomogêneo, outros multipolos começam a contribuir para a energia total.

As verificações acima são bastante úteis em áreas como Física Atômica e Molecular e também em Física Nuclear. Até agora estudamos problemas em que a distribuição de cargas ρ era conhecida, e queríamos obter o potencial elétrico. Entretanto, em dimensões atômicas e nucleares, a distribuição não é, em geral, bem determinada, até mesmo por questões de Mecânica Quântica. Assim, medindo as energias associadas aos vários multipolos, é possível determinar aproximadamente as distribuições de carga e obter, pelo menos experimentalmente, dados relevantes acerca da estrutura eletrônica dos cristais de um material sólido, ou então, a forma geométrica de um núcleo atômico, por exemplo. Em particular, o momento de quadrupolo é uma quantidade muito importante nestas áreas, pois esta grandeza está associada diretamente ao desvio que existe entre a distribuição de cargas real e uma distribuição de cargas esfericamente simétrica ideal com a mesma carga líquida que a real. Quando todos os momentos de quadrupolo são nulos, a distribuição real é muito próxima de uma distribuição esférica, ainda mais se outros momentos de multipolo forem também nulos. Quando algum dos momentos de quadrupolo é diferente de zero, então ρ perde a simetria esférica, mas ela pode ter uma simetria cilíndrica e ser elipsóidica, como acontece quando $\overleftrightarrow{\mathcal{Q}}_{3,3} \neq 0$. Além disso, os valores e sinais destes momentos estão também relacionados às intensidades das interações existentes entre as cargas que formam a distribuição de cargas, e eles auxiliam na determinação do tipo de ligação entre os átomos, moléculas ou nucleons que formam os materiais.

Da expressão 8.18, podemos obter a energia potencial elétrica de interação entre dois dipolos, se considerarmos que o campo elétrico gerado por um dipolo é dado pela equação 4.29,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5}(\vec{r}-\vec{r}\,') - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]$$

e assim, para dois dipolos $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$, situados nas posições $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, temos

$$U_{1,2} = -\vec{p}_1\cdot\vec{\mathcal{E}}_2$$

$$U_{1,2} = -\vec{p}_1\cdot\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot\vec{p}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^5}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) - \frac{\vec{p}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}\right]$$

$$U_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3} - \frac{3}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left[(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot\vec{p}_1\right]\left[(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot\vec{p}_2\right]}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^5}$$

Lembrando que os sistemas procuram minimizar a sua energia potencial, vemos que, nesta expressão, o primeiro termo favorece energeticamente a situação em que os dipolos são antiparalelos, ou seja, aquela em que eles estão orientados na mesma direção, mas em sentidos contrários, pois o produto escalar resulta em um número negativo. Já o segundo é minimizado quando os dipolos estão na mesma direção e sentido do vetor $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$, que une os seus centros. No entanto, se os dipolos são paralelos a um terceiro vetor, eles são paralelos entre si, o que maximiza o primeiro fator. Mesmo assim, a expressão como um todo ainda é negativa, pois, neste caso, obtemos

$$\begin{aligned}
U_{1,2} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_1 p_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3} - \frac{3}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left[|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\,p_1\right]\left[|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\,p_2\right]}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^5}\\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_1 p_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3} - \frac{3}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_1 p_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}\\
U_{1,2} &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{p_1 p_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}
\end{aligned}$$

Quando os dipolos estão perpendiculares à direção definida pelo vetor $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$, o segundo termo da expressão da energia é nulo, e para minimizar a energia, os dipolos devem estar orientados na mesma direção, mas em sentidos opostos.

8.3 Exercícios

8.1 Verifique se a expressão 8.13 reproduz a equação 8.11.

8.2 Obtenha a forma explícita dos primeiros momentos de multipolo em coordenadas cilíndricas.

8.3 Considere um potencial elétrico externo

$$\mathbb{V} = V_0\frac{\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\phi}{r - r_0}$$

agindo sobre uma distribuição de cargas

$$\rho = \rho_0 r \operatorname{sen}\theta \cos\phi$$

Obtenha a energia potencial como uma expansão em multipolos em torno de $r = 0$.

8.4 Calcule os primeiros momentos de multipolo das distribuições de cargas pontuais abaixo, achando o potencial elétrico tanto exatamente como em termos de uma expansão em multipolos.

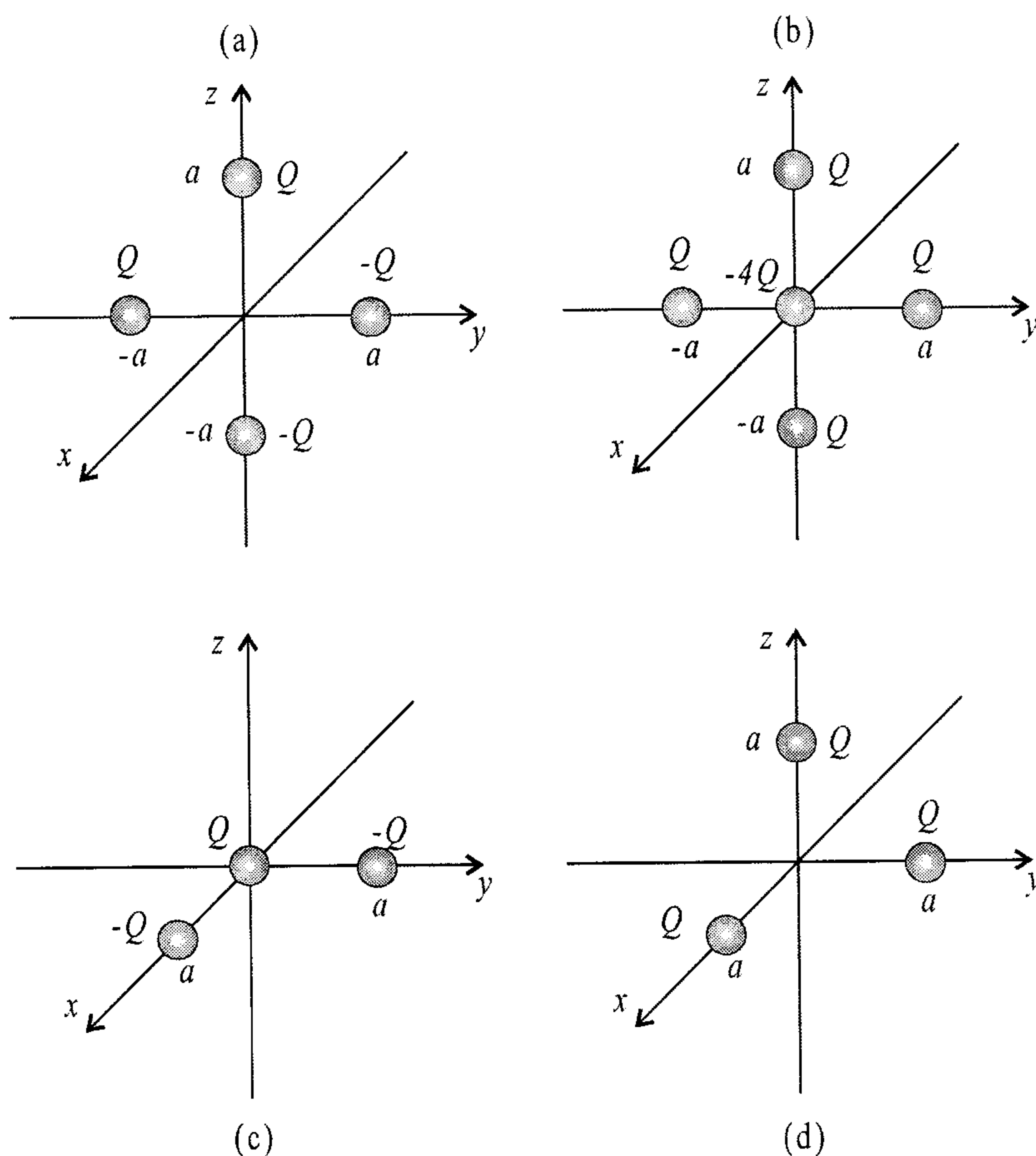



Figura 8.2: Distribuições de cargas pontuais para o problema 8.4.

8.5 Calcule os primeiros momentos de multipolo das distribuições de carga abaixo.

a)

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0, 0 \leq r \leq R \\ 0, r \geq R \end{cases}$$

b)

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 e^{-\frac{2r}{R}}$$

c)

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 r^2 \cos\theta, 0 \leq r \leq R \\ 0, r \geq R \end{cases}$$

d)

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 \operatorname{sen} 2\theta \cos\phi, 0 \leq r \leq R \\ 0, r \geq R \end{cases}$$

8.6 Ache o campo elétrico de um quadrupolo $\overleftrightarrow{Q}$ e calcule a energia de interação entre um quadrupolo e uma carga pontual Q.

8.7 Calcule a energia potencial de interação entre dois quadrupolos $\overleftrightarrow{Q}_1$ e $\overleftrightarrow{Q}_2$, situados em $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, respectivamente. Analise as configurações que minimizam a energia.

Capítulo 9

Potenciais Elétricos, V: Funções de Green

Neste capítulo, desenvolvemos um formalismo matemático um pouco mais sofisticado, útil na resolução de problemas eletrostáticos que envolvem condições de contorno mais complexas do que as vistas até o momento.

9.1 Relação entre o Teorema de Green e o Potencial Elétrico

Através da utilização do teorema de Green 1.62, que é

$$\int_V \left(\Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi\right) dV = \oint_S \left(\Psi\nabla\Phi - \Phi\nabla\Psi\right) \cdot \hat{n}\, dA$$

a equação de Poisson 6.1,

$$\nabla^2\mathbb{V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

que é uma equação diferencial, pode ser convertida em uma equação integral, que determina $\mathbb{V}$. Para fazer isso, consideramos, no teorema de Green,

$$\Psi = \mathbb{V} \qquad \text{e} \qquad \Phi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

e assim, obtemos

$$\int_V \left\{ \mathbb{V}\nabla^2\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\nabla^2\mathbb{V} \right\} dV = \oint_S \left\{ \mathbb{V}\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\nabla\mathbb{V} \right\} \cdot \hat{n}\, dA$$

Combinando as expressões 5.9 e 4.18, que são, respectivamente,

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

e

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right] = 4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

achamos

$$\nabla \cdot \left[-\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]\right] = 4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

ou, como $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$,

$$\nabla^2\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{9.1}$$

Utilizando agora a relação 5.17 entre o campo e o potencial elétrico,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V}$$

a equação de Poisson 6.1,

$$\nabla^2\mathbb{V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

e a expressão 9.1 obtida acima no teorema de Green, encontramos

$$\int_V \left\{ -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\mathbb{V} + \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right\} dV = \oint_S \left\{ -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\mathbb{V} + \vec{\mathcal{E}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right\} \cdot \hat{n}\, dA$$

ou

$$-4\pi\int_V \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\mathbb{V}\,dV + \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \frac{\rho}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV =$$
$$\oint_S \frac{\vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{n}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dA - \oint_S \mathbb{V}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\cdot\hat{n}\,dA$$

Se $\vec{r}$ está dentro do volume V, obtemos

$$-4\pi\mathbb{V}(\vec{r}) + \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \frac{\rho}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV = \oint_S \frac{\vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{n}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dA - \oint_S \mathbb{V}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\cdot\hat{n}\,dA$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV$$
$$-\frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}\,')\cdot\hat{n}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dA + \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\mathbb{V}(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\cdot\hat{n}\,dA \quad (9.2)$$

Note que o primeiro termo é o potencial usual, que obtivemos na seção 5.2, dado pela equação 5.12,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV$$

No entanto, aparecem outros dois termos, que envolvem integrais de superfície sobre S. Se o campo elétrico na superfície S vai a zero de uma forma mais rápida do que R^{-1}, quando esta superfície se torna muito grande e $R = |\vec{r}-\vec{r}\,'| \to \infty$, estes dois termos se anulam, porque o denominador das frações aumenta mais rápido do que o numerador. Sendo assim, a fração como um todo tende a zero e o potencial elétrico 5.12 conhecido é obtido novamente. Por outro lado, numa região em que $\rho(\vec{r}\,') = 0$, isto é, numa região em que não há cargas livres e onde, então, o potencial elétrico satisfaz a equação de Laplace, o potencial é determinado inteiramente pelas condições de contorno dadas sobre a superfície S, mediante a fixação do valor do potencial e de sua derivada, que é o campo elétrico, sobre esta superfície, já que o primeiro termo do lado direito da equação 9.2 é nulo. Como vimos na seção 6.2, condições de contorno estabelecidas em termos do potencial e de sua derivada são condições de contorno mistas, ou de Cauchy. Neste caso, demonstramos que a solução,

se ela existir, é única. A dificuldade está no fato de que fixar, arbitrariamente, condições de contorno para o potencial e para o campo elétrico sobre a superfície S pode resultar num problema inconsistente e insolúvel, pois precisa haver, na superfície S, um compromisso entre o potencial elétrico e sua derivada, que é o campo elétrico. Com condições de contorno de Dirichlet, dadas apenas em função do potencial, ou condições de Neumann, dadas apenas em função do campo elétrico, é muito mais difícil ocorrerem problemas de inconsistência, pois apenas uma grandeza é fixada, sendo a outra obtida desta no final da resolução do problema. Isso significa que o ideal seria ter apenas sistemas envolvendo condições de Dirichlet ou de Neumann, escolhidas de tal forma a simplificar a expressão 9.2, e, em particular, as integrais de superfície que aparecem nessa equação. Isso pode realmente ser feito, mediante o uso das *funções de Green.*

9.2 Funções de Green

A equação 9.1 nos fornece o Laplaciano da função $\frac{1}{r}$, sendo $r = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$, ou seja,

$$\nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right] = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

Além disso, o potencial elétrico gerado por uma carga pontual Q é

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Se a carga for uma carga unitária, isto é, $Q = 1$ C, o potencial será

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

que satisfaz a equação

$$\nabla^2 \mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right]$$

ou

$$\nabla^2 \mathbb{V}(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

Na dedução da equação 9.2, utilizamos o teorema de Green 1.62, que é

$$\int_V \left(\Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi\right) dV = \oint_S \left(\Psi\nabla\Phi - \Phi\nabla\Psi\right) \cdot \hat{n}\, dA$$

considerando as funções

$$\Psi = \mathbb{V} \qquad \text{e} \qquad \Phi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Observe que Φ, a menos de uma constante multiplicativa, é o potencial elétrico gerado por uma carga unitária puntiforme, que satisfaz a equação 9.1. Esta função não é a única que torna essa expressão verdadeira. Na verdade, existe uma classe de funções, chamadas *funções de Green*, que fazem com que 9.1 seja verificada. Tais funções são escritas como

$$\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + F(\vec{r},\vec{r}\,') \tag{9.3}$$

Seu Laplaciano é

$$\nabla^2\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,') = \nabla^2\left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right] + \nabla^2 F(\vec{r},\vec{r}\,')$$

ou, utilizando a equação 9.1, e impondo que

$$\nabla^2 F = 0$$

dentro da região de interesse de volume V, obtemos

$$\nabla^2\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \tag{9.4}$$

Veja que a função $F(\vec{r},\vec{r}\,')$ satisfaz a equação de Laplace dentro do volume V. Essa função é arbitrária, e ela pode ser escolhida por nós da forma que mais interessar. Usando novamente o teorema de Green 1.62, mas considerando as funções

$$\Psi = \mathbb{V} \qquad \text{e} \qquad \Phi = \mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,')$$

obtemos

$$\int_V \left\{\mathbb{V}\nabla^2\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,') - \mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,')\nabla^2\mathbb{V}\right\} dV =$$

$$\oint_S \left\{\mathbb{V}\nabla\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,') - \mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,')\nabla\mathbb{V}\right\} \cdot \hat{n}\, dA$$

Usando agora as relações 5.17 e 9.4, bem como a equação de Poisson 6.1, achamos

$$\int_V \left\{ -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\mathbb{V} + \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\epsilon_0}\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,') \right\} dV = \oint_S \left\{ \mathbb{V}(\vec{r}\,')\nabla\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,') + \mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,')\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}\,') \right\} \cdot \hat{n}\, dA$$

ou

$$-4\pi\mathbb{V}(\vec{r}) + \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,')\, dV = \oint_S \mathbb{V}(\vec{r}\,')\,\nabla\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,')\cdot\hat{n}\, dA + \oint_S \mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,')\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}\,')\cdot\hat{n}\, dA$$

ou ainda,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,')\, dV - \frac{1}{4\pi}\oint_S \mathbb{V}(\vec{r}\,')\,\nabla\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,')\cdot\hat{n}\, dA - \frac{1}{4\pi}\oint_S \mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,')\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}\,')\cdot\hat{n}\, dA \quad (9.5)$$

Esta expressão é a generalização da equação 9.2. Ela é aparentemente mais complicada do que aquela equação, pois envolve as funções de Green. Entretanto, por causa da função $F(\vec{r},\vec{r}\,')$ arbitrária que aparece nas funções de Green 9.3, ela pode ser bastante simplificada, porque podemos escolher esta função de modo a ressaltar as condições de contorno do problema. Assim, se o problema envolve condições de contorno de Dirichlet, dadas em função do potencial elétrico sobre a superfície S, podemos anular a segunda integral de superfície se escolhermos uma função F tal que a função de Green para condições de contorno de Dirichlet se anule sobre S, ou seja,

$$\mathfrak{F}_D(\vec{r},\vec{r}\,') = 0, \qquad \text{quando } \vec{r}\,' \text{ está sobre } S$$

Com isso, o potencial elétrico, para condições de Dirichlet, torna-se

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\mathfrak{F}_D(\vec{r},\vec{r}\,')\, dV - \frac{1}{4\pi}\oint_S \mathbb{V}(\vec{r}\,')\,\nabla\mathfrak{F}_D(\vec{r},\vec{r}\,')\cdot\hat{n}\, dA \quad (9.6)$$

Note que, ao fazermos uma integral de superfície sobre S, as funções que estão sendo integradas devem ser aplicadas nos valores das coordenadas dessa superfície, e por isso, a segunda integral de superfície se anula, ao passo que a primeira envolve o potencial elétrico sobre S, que é dado, já que o problema tem condições de contorno de Dirichlet.

Para obter o potencial elétrico quando as condições de contorno de Neumann são utilizadas, ou seja, quando é dada a componente normal do campo elétrico à superfície S, seria interessante anular a primeira integral de superfície, o que poderia ser feito se considerássemos uma função de Green para condições de Neumann com a propriedade

$$\nabla\mathfrak{G}_N(\vec{r},\vec{r}\,')\cdot\hat{n} = 0 \tag{9.7}$$

Esta escolha, no entanto, revela-se inconsistente, porque, ao integrarmos a expressão 9.4 no volume V, obtemos

$$\begin{aligned}\int_V \nabla^2\mathfrak{G}(\vec{r},\vec{r}\,')\,dV &= \int_V -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,dV\\ \int_V \nabla^2\mathfrak{G}(\vec{r},\vec{r}\,')\,dV &= -4\pi\end{aligned}$$

Como $\nabla^2\mathfrak{G}(\vec{r},\vec{r}\,') = \nabla\cdot\nabla\mathfrak{G}(\vec{r},\vec{r}\,')$, podemos utilizar o teorema do divergente 1.54 para transformar a integral de volume em uma integral de superfície, ou seja,

$$\begin{aligned}\int_V \nabla^2\mathfrak{G}(\vec{r},\vec{r}\,')\,dV &= \int_V \nabla\cdot\nabla\mathfrak{G}(\vec{r},\vec{r}\,')\,dV\\ -4\pi &= \oint_S \nabla\mathfrak{G}(\vec{r},\vec{r}\,')\cdot\hat{n}\,dA\end{aligned}$$

e

$$\oint_S \nabla\mathfrak{G}(\vec{r},\vec{r}\,')\cdot\hat{n}\,dA = -4\pi$$

que é válida para qualquer função de Green. Se a função de Green fosse escolhida como em 9.7, seria impossível sua integral ter o valor acima, e portanto, essa escolha não é correta. Uma escolha simples e plenamente aceitável é

$$\nabla\mathfrak{G}_N(\vec{r},\vec{r}\,')\cdot\hat{n} = -\frac{4\pi}{A}, \quad \text{quando } \vec{r}\,' \text{ está sobre } S \tag{9.8}$$

onde A é a área total da superfície S. Neste caso, a solução para o potencial fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\mathfrak{F}_N(\vec{r},\vec{r}\,')\,dV \\ - \frac{1}{4\pi}\oint_S -\frac{4\pi}{A}\mathbb{V}(\vec{r}\,')\,dA - \frac{1}{4\pi}\oint_S \mathfrak{F}_N(\vec{r},\vec{r}\,')\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}\,')\cdot\hat{n}\,dA$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\mathfrak{F}_N(\vec{r},\vec{r}\,')\,dV \\ + \frac{1}{A}\oint_S \mathbb{V}(\vec{r}\,')\,dA - \frac{1}{4\pi}\oint_S \mathfrak{F}_N(\vec{r},\vec{r}\,')\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}\,')\cdot\hat{n}\,dA$$

A integral do potencial elétrico sobre a superfície S, dividida pela área da superfície, é o valor médio do potencial sobre S, ou seja,

$$\frac{1}{A}\oint_S \mathbb{V}(\vec{r}\,')\,dA = \langle\mathbb{V}\rangle_S$$

Assim, o potencial elétrico, com condições de contorno de Neumann, fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\mathfrak{F}_N(\vec{r},\vec{r}\,')\,dV \\ + \langle\mathbb{V}\rangle_S - \frac{1}{4\pi}\oint_S \mathfrak{F}_N(\vec{r},\vec{r}\,')\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}\,')\cdot\hat{n}\,dA \quad (9.9)$$

É importante entender fisicamente o que são as funções de Green. Elas representam, na Eletrostática, os potenciais elétricos (a menos de constantes multiplicativas) gerados na posição $\vec{r}$ por cargas pontuais unitárias situadas em $\vec{r}\,'$. A função F, que faz parte da definição da função de Green e que satisfaz a equação de Laplace dentro do volume V delimitado pela superfície S, é um potencial elétrico produzido por cargas externas ao volume V, sendo equivalente, portanto, ao potencial gerado pelas cargas-imagem que vimos no capítulo 7, ao estudar o método das imagens. As funções de Green aparecem em outras áreas de Física, como em Física de Partículas Elementares, e em todos os casos elas estão associadas à "influência" que um ponto do espaço exerce sobre outro, podendo essa influência ser eletromagnética, gravitacional, ou através das forças nucleares forte e fraca. Em particular, elas são extremamente importantes em teorias quânticas de campo, como Eletrodinâmica Quântica e Cromodinâmica Quântica.

Vamos agora estudar alguns problemas importantes que envolvem as funções de Green.

9.3 Esfera Condutora Submetida a um Potencial Qualquer sobre a Superfície

Na seção 7.2, vimos vários exemplos envolvendo uma esfera condutora de raio R e uma carga Q situada em sua frente. Todos esses exemplos apresentam uma carga-imagem q situada dentro da esfera, cuja posição e valor estão relacionados à posição e valor da carga real mediante as equações 7.3 e 7.4, que são, respectivamente,

$$d = \frac{R^2}{D}$$

e

$$q = -\frac{d}{R}Q = -\frac{R}{D}Q$$

onde $\vec{r}_Q = \vec{D}$ é a posição da carga real, sendo $\vec{r}_q = \vec{d}$ a posição da carga-imagem, como mostra a figura 7.9, reproduzida abaixo.

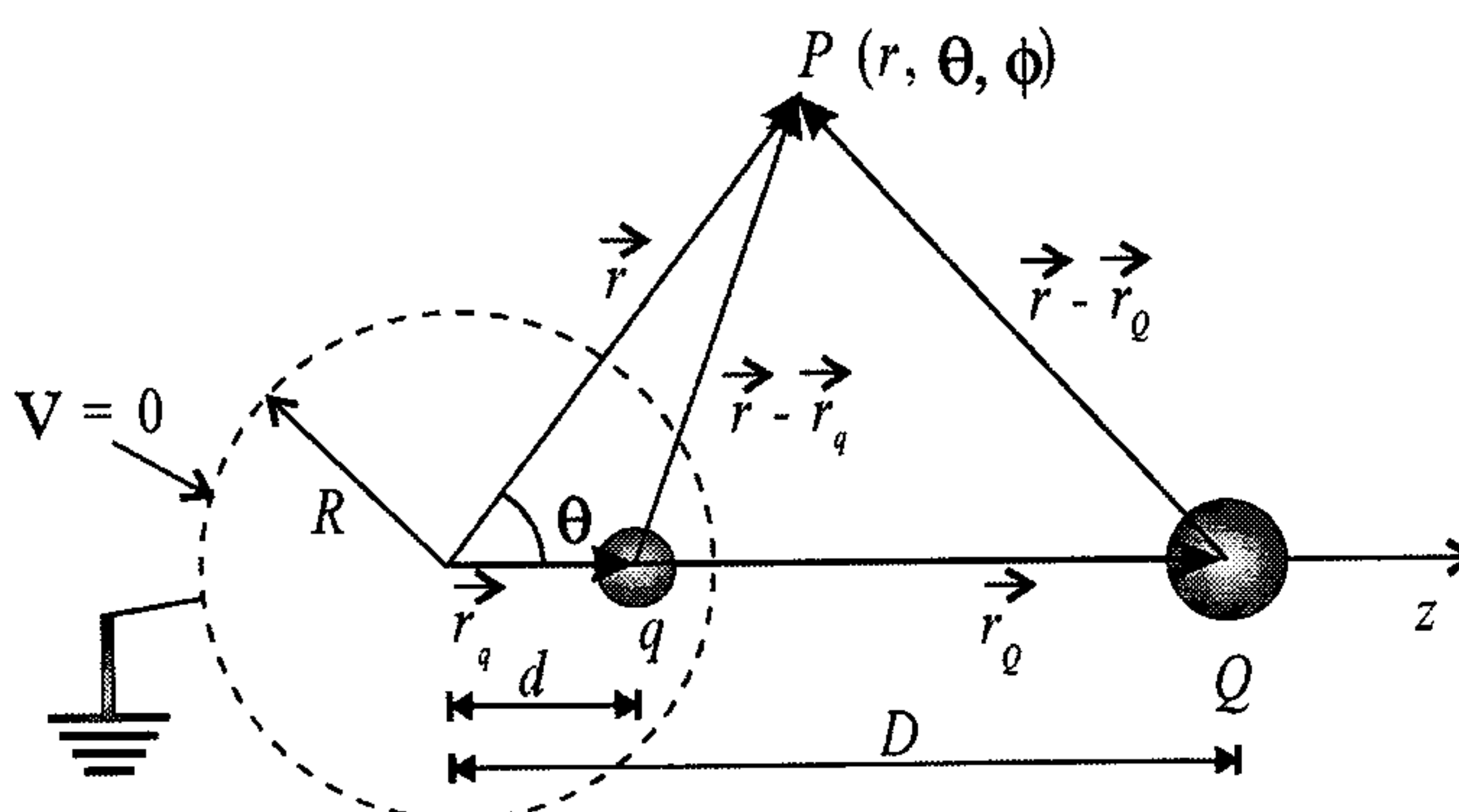



Figura 9.1: Reprodução da figura 7.9.

O potencial elétrico gerado por essas duas cargas, na posição $\vec{r}$, é dado por

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_q|}$$

Para reescrever essa expressão, vamos usar as equações obtidas para a posição e valor da carga-imagem. Primeiro, a carga-imagem q vale, pela expressão 7.4,

$$q = -\frac{R}{D}Q = -\frac{R}{r_Q}Q$$

onde nos valemos do fato de que $|\vec{r}_Q| = r_Q = D$. Agora, o denominador do segundo termo pode ser escrito como

$$\vec{r} - \vec{r}_q = \vec{r} - r_q\hat{r}_q$$

A expressão 7.3 nos dá

$$r_q = d = \frac{R^2}{r_Q}$$

Além disso, o versor $\hat{r}_q$ é igual ao versor $\hat{r}_Q$, pois eles são colineares. Mas o versor $\hat{r}_Q$ é

$$\hat{r}_Q = \frac{\vec{r}_Q}{r_Q}$$

Assim, reunindo as equações, obtemos

$$\vec{r} - \vec{r}_q = \vec{r} - \frac{R^2}{r_Q}\frac{\vec{r}_Q}{r_Q}$$

ou

$$\vec{r} - \vec{r}_q = \vec{r} - \frac{R^2}{r_Q^2}\vec{r}_Q$$

e voltando ao potencial, temos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\frac{R}{r_Q}Q}{\left|\vec{r}-\frac{R^2}{r_Q^2}\vec{r}_Q\right|}$$

ou então,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{QR}{r_Q\left|\vec{r}-\frac{R^2}{r_Q^2}\vec{r}_Q\right|}$$

Se a carga Q for unitária, o potencial fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{r_Q\left|\vec{r}-\frac{R^2}{r_Q^2}\vec{r}_Q\right|}$$

A expressão acima é, basicamente, a função de Green para este problema. Lembrando que a função arbitrária $F(\vec{r},\vec{r}\,')$ é uma solução da equação de Laplace dentro do volume de interesse, e considerando que ela é equivalente, como foi mencionado, ao potencial elétrico gerado pelas cargas-imagem, vemos que o segundo termo do lado direito acima pode ser identificado com esta função. O primeiro termo é o potencial elétrico gerado pela carga unitária, como deve ser. A função de Green pode ser obtida através da multiplicação da equação acima por $4\pi\epsilon_0$, para eliminar a constante. Além disso, a posição da carga real pode ser expressa por $\vec{r}\,'$, para generalizarmos a situação, e assim, a função de Green torna-se

$$\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{R}{r'\left|\vec{r}-\frac{R^2}{r'^2}\vec{r}\,'\right|} \tag{9.10}$$

cujos termos podem ser vistos na figura 9.2.

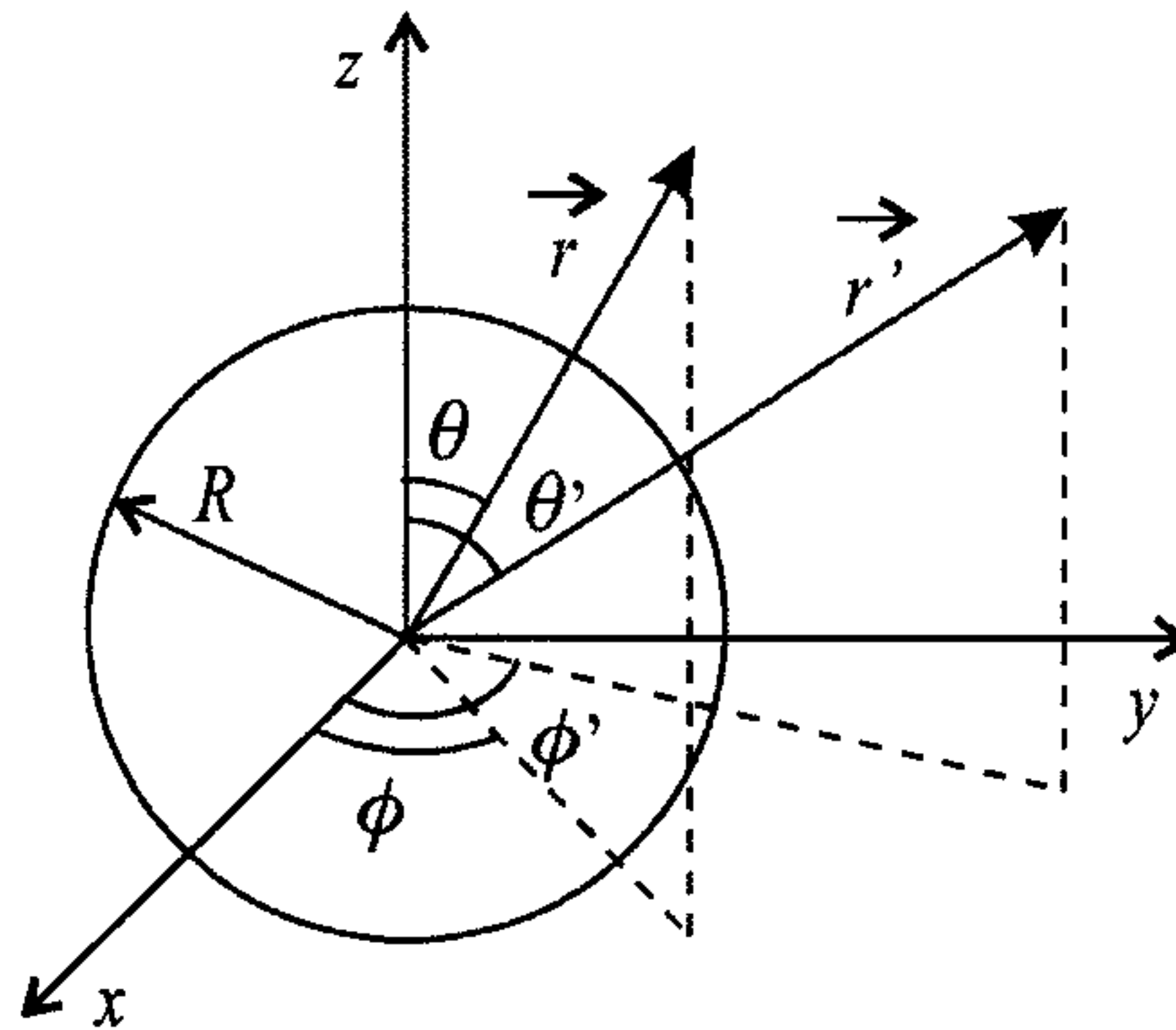



Figura 9.2: Definição dos termos para a função de Green da esfera condutora.

Utilizando as coordenadas esféricas, podemos reescrever a função de Green 9.10 como

$$\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^{\,2}}} - \frac{R}{r'\sqrt{r^2 - 2r\frac{R^2}{r'}\cos\gamma + \frac{R^4}{r'^{\,2}}}}\,.$$

onde γ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$. Esta expressão pode ser reescrita como

$$\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^{\,2}}} - \frac{R}{\sqrt{(rr')^2 - 2rr'R^2\cos\gamma + R^4}}$$

ou

$$\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^{\,2}}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{R}\right)^2 - 2rr'\cos\gamma + R^2}} \tag{9.11}$$

Quando $\vec{r}\,'$ está na superfície da esfera, $|\vec{r}\,'| = R$, e então,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{R}) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{rR}{R}\right)^2 - 2rR\cos\gamma + R^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2}} \\
\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{R}) &= 0
\end{aligned}$$

e assim, a função de Green 9.11 é uma função de Green apropriada para condições de Dirichlet, o que já era esperado, pois na obtenção da posição e do valor da carga-imagem, dos quais partimos para encontrá-la, levamos em conta o fato de que a esfera é aterrada e que o potencial sobre ela é nulo. Além disso, quando $|\vec{r}| = R$, a função de Green também se anula, e você pode verificar isso.

Para montar a solução 9.6 para o potencial elétrico fora da esfera, precisamos achar $\nabla\mathfrak{F}\cdot\hat{n}$. Aqui, $\hat{n}$ é a normal à superfície S, apontando para fora desta, ou seja, ela está orientada na direção radial para dentro da esfera, em direção à origem, sendo, portanto, o versor $-\hat{\mathbf{r}}'$, pois estamos calculando o potencial fora da esfera. Isso significa que, ao calcular o gradiente da função de Green, precisamos apenas da componente na direção $\hat{\mathbf{r}}'$, porque as outras, ao ser feito o produto escalar, serão anuladas. O operador nabla em coordenadas esféricas é dado pela expressão B.16 (veja o apêndice B, para a dedução

completa deste operador em coordenadas retangulares, cilíndricas e esféricas), e assim, considerando apenas a componente radial, temos

$$\nabla \mathfrak{F}_{\hat{\mathbf{r}}'} = \hat{\mathbf{r}}' \frac{\partial}{\partial r'} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos\gamma + r'^{\,2}}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{R}\right)^2 - 2rr' \cos\gamma + R^2}} \right]$$

ou

$$\nabla \mathfrak{F}_{\hat{\mathbf{r}}'} =$$
$$\hat{\mathbf{r}}' \left[-\frac{1}{2} \frac{-2r\cos\gamma + 2r'}{\left[r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^{\,2}\right]^{\frac{3}{2}}} - \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2r'\frac{r^2}{R^2} - 2r\cos\gamma}{\left[\left(\frac{rr'}{R}\right)^2 - 2rr'\cos\gamma + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

ou ainda,

$$\nabla \mathfrak{F}_{\hat{\mathbf{r}}'} = \hat{\mathbf{r}}' \left[\frac{r\cos\gamma - r'}{\left[r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^{\,2}\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{r'\frac{r^2}{R^2} - r\cos\gamma}{\left[\left(\frac{rr'}{R}\right)^2 - 2rr'\cos\gamma + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

e então,

$$\nabla \mathfrak{F}_{\hat{\mathbf{r}}'} = \hat{\mathbf{r}}' \left[\frac{r'r^2}{R^2\left[\left(\frac{rr'}{R}\right)^2 - 2rr'\cos\gamma + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{\left[r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^{\,2}\right]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Fazendo agora o produto escalar com $\hat{n} = -\hat{\mathbf{r}}'$, obtemos

$$\nabla \mathfrak{F}_{\hat{\mathbf{r}}'} \cdot \hat{n} =$$
$$\hat{\mathbf{r}}' \left[\frac{r'r^2}{R^2\left[\left(\frac{rr'}{R}\right)^2 - 2rr'\cos\gamma + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{\left[r^2 - 2rr'\cos\gamma + (r')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot (-\hat{\mathbf{r}}')$$

ou

$$\nabla \mathfrak{F}_{\hat{\mathbf{r}}'} \cdot \hat{n} = \frac{r'}{\left[r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^{\,2}\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'r^2}{R^2\left[\left(\frac{rr'}{R}\right)^2 - 2rr'\cos\gamma + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

e por fim, aplicando-a em $|\vec{r}'| = r' = R$, já que este termo entra na integral de superfície em 9.6, achamos

$$\nabla\mathfrak{F}\cdot\hat{n}\Big|_{r'=R} = \frac{R}{\left[r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{Rr^2}{R^2\left[\left(\frac{rR}{R}\right)^2 - 2rR\cos\gamma + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{R}{\left[r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{r^2}{R\left[r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$
$$\nabla\mathfrak{F}\cdot\hat{n}\Big|_{r'=R} = \frac{R^2 - r^2}{R\left[r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Obtida esta expressão, o potencial fora da esfera, com condições de contorno de Dirichlet para o potencial elétrico sobre a superfície da esfera, fica, mediante o uso da expressão 9.6,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\mathfrak{F}_D(\vec{r},\vec{r}\,')\,dV - \frac{1}{4\pi}\oint_S \mathbb{V}(\vec{r}\,')\,\nabla\mathfrak{F}_D(\vec{r},\vec{r}\,')\cdot\hat{n}\,dA$$

ou

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) =$$
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^{\,2}}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{R}\right)^2 - 2rr'\cos\gamma + R^2}}\right]dV$$
$$- \frac{1}{4\pi}\oint_S \mathbb{V}(R,\theta',\phi')\frac{R^2 - r^2}{R\left[r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,R^2 \operatorname{sen}\theta' d\theta' d\phi'$$

ou ainda,

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) =$$
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \left[\frac{\rho(\vec{r}\,')}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^{\,2}}} - \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{R}\right)^2 - 2rr'\cos\gamma + R^2}}\right]dV$$
$$+ \frac{R(r^2 - R^2)}{4\pi}\oint_S \frac{\mathbb{V}(R,\theta',\phi')\operatorname{sen}\theta' d\theta' d\phi'}{\left[r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad (9.12)$$

que é a solução geral para o potencial fora da esfera condutora submetida a um potencial qualquer $\mathbb{V}(R,\theta,\phi)$ sobre a sua superfície, com uma densidade volumétrica de carga ρ no volume V da região de interesse, fora da esfera.

Quando queremos o potencial dentro da esfera, a normal aponta para fora dela, na direção $\hat{\mathbf{r}}'$, ao invés de $-\hat{\mathbf{r}}'$, de modo que a única modificação que ocorre nesta expressão é a existência de um sinal negativo à frente da integral de superfície, que aparece porque o produto escalar $\nabla\mathfrak{F} \cdot \hat{n}$ tem sinal oposto ao apresentado no texto.

Aqui, é preciso notar que o ângulo γ envolve os ângulos θ, θ', ϕ e ϕ'. Para mostrar isso, consideramos os versores $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\mathbf{r}}'$, que, em coordenadas retangulares, mediante as expressões 1.37, são

$$\hat{\mathbf{r}} = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\hat{\mathbf{r}}' = \operatorname{sen}\theta'\cos\phi'\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\phi'\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta'\,\hat{\mathbf{k}}$$

e fazemos o produto escalar entre eles, ou seja,

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = |\hat{\mathbf{r}}||\hat{\mathbf{r}}'|\cos\gamma$$

Como $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\mathbf{r}}'$ são vetores unitários, eles têm módulo 1, e assim,

$$\cos\gamma = \left[\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}\right] \cdot \left[\operatorname{sen}\theta'\cos\phi'\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\phi'\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta'\,\hat{\mathbf{k}}\right]$$

ou seja,

$$\cos\gamma = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\operatorname{sen}\theta'\cos\phi' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\phi' + \cos\theta\cos\theta'$$

ou

$$\cos\gamma = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\left[\cos\phi\cos\phi' + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\phi'\right] + \cos\theta\cos\theta'$$

Como

$$\cos\alpha \pm \beta = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

temos

$$\cos\gamma = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\phi - \phi') + \cos\theta\cos\theta' \tag{9.13}$$

A expressão 9.12 é absolutamente geral. No entanto, ela é bastante complicada e, em geral, as integrais não podem ser resolvidas analiticamente, para obter uma expressão numa forma fechada. Vejamos agora alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 9.1. *Resolva, mediante o uso do método de funções de Green, o problema da esfera condutora de raio R aterrada, com uma carga Q na sua frente, visto na seção 7.2.1.*

Para este problema, o potencial sobre a esfera é dado por

$$\mathbb{V}(R,\theta',\phi') = 0$$

e a integral de superfície em 9.12 se anula. A densidade de carga pode ser escrita, em termos de funções delta de Dirac, como sendo

$$\rho(\vec{r}\,') = Q\delta(\vec{r}\,' - \vec{D})$$

onde $\vec{D}$ é a posição da carga Q. Além disso, como há uma simetria esférica no problema, podemos colocar a carga Q sobre o eixo dos z, e assim, a densidade de cargas pode ser escrita em coordenadas esféricas como

$$\rho(\vec{r}\,') = Q\delta(r' - D)\frac{\delta(\cos\theta' - 1)}{r'}\frac{\delta(\phi' - 0)}{r'}$$
$$\rho(\vec{r}\,') = \frac{Q}{r'^{\,2}}\delta(r' - D)\delta(\cos\theta' - 1)\delta(\phi')$$

O potencial fica, então,

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_R^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left[\frac{\frac{Q}{r'^{\,2}}\delta(r'-D)\delta(\cos\theta'-1)\delta(\phi')}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\gamma+r'^{\,2}}}\right.$$
$$\left.-\frac{\frac{Q}{r'^{\,2}}\delta(r'-D)\delta(\cos\theta'-1)\delta(\phi')}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{R}\right)^2-2rr'\cos\gamma+R^2}}\right]r'^{\,2}\operatorname{sen}\theta' dr'd\theta'd\phi'$$

ou

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_R^\infty\int_1^{-1}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\delta(r'-D)\delta(\cos\theta'-1)\delta(\phi')}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\gamma+r'^{\,2}}}\right.$$
$$\left.-\frac{\delta(r'-D)\delta(\cos\theta'-1)\delta(\phi')}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{R}\right)^2-2rr'\cos\gamma+R^2}}\right]dr'd(\cos\theta')d\phi'$$

ou ainda, invertendo a ordem de integração em $\cos\theta'$, o que muda o sinal da integral,

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_R^{\infty}\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\delta(r'-D)\delta(\cos\theta'-1)\delta(\phi')}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\gamma+r'^2}}\right.$$
$$\left. - \frac{\delta(r'-D)\delta(\cos\theta'-1)\delta(\phi')}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{R}\right)^2-2rr'\cos\gamma+R^2}}\right] dr'd(\cos\theta')d\phi'$$

A integral em r' pode ser feita imediatamente, e ela resulta em

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\delta(\cos\theta'-1)\delta(\phi')}{\sqrt{r^2-2rD\cos\gamma+D^2}}\right.$$
$$\left. - \frac{\delta(\cos\theta'-1)\delta(\phi')}{\sqrt{\left(\frac{rD}{R}\right)^2-2rD\cos\gamma+R^2}}\right] d(\cos\theta')d\phi'$$

O único termo que envolve ϕ' é $\cos\gamma$, que vale, segundo a equação 9.13.

$$\cos\gamma = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\phi-\phi')+\cos\theta\cos\theta'$$

Quando a integral em ϕ' é feita, a função delta faz com que o cosseno se transforme em

$$\cos\gamma_1 = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos\phi+\cos\theta\cos\theta'$$

e então,

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\delta(\cos\theta'-1)}{\sqrt{r^2-2rD\cos\gamma_1+D^2}}\right.$$
$$\left. - \frac{\delta(\cos\theta'-1)}{\frac{D}{R}\sqrt{r^2-2rD\frac{R^2}{D^2}\cos\gamma_1+\frac{R^2}{D^2}R^2}}\right] d(\cos\theta')$$

Agora, para fazer a integral em θ', o cosseno deve ser escrito como

$$\cos\gamma_1 = \operatorname{sen}\theta\sqrt{1-\cos^2\theta'}\cos\phi+\cos\theta\cos\theta'$$

e quando a função delta é aplicada, o ângulo θ' torna-se igual a zero, de modo que este cosseno se transforma em

$$\cos\gamma_2 = \operatorname{sen}\theta\sqrt{1-1^2}\cos\phi + \cos\theta(1)$$
$$\cos\gamma_2 = \cos\theta$$

ou seja, o potencial fica

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2-2rD\cos\theta+D^2}} - \frac{R}{D\sqrt{r^2-2r\frac{R^2}{D}\cos\theta+\frac{R^4}{D^2}}}\right]$$

que é o potencial encontrado na seção 7.2.1 (expressão 7.5), que foi obtido lá através do método das imagens.

Exemplo 9.2. *Considere uma esfera condutora de raio R submetida a um potencial elétrico $\mathbb{V}(R,\theta',\phi')$ sobre sua superfície. Fora da esfera existem duas cargas, Q_1 e Q_2, como mostra a figura 9.3. Obtenha a solução formal para o potencial fora da esfera.*

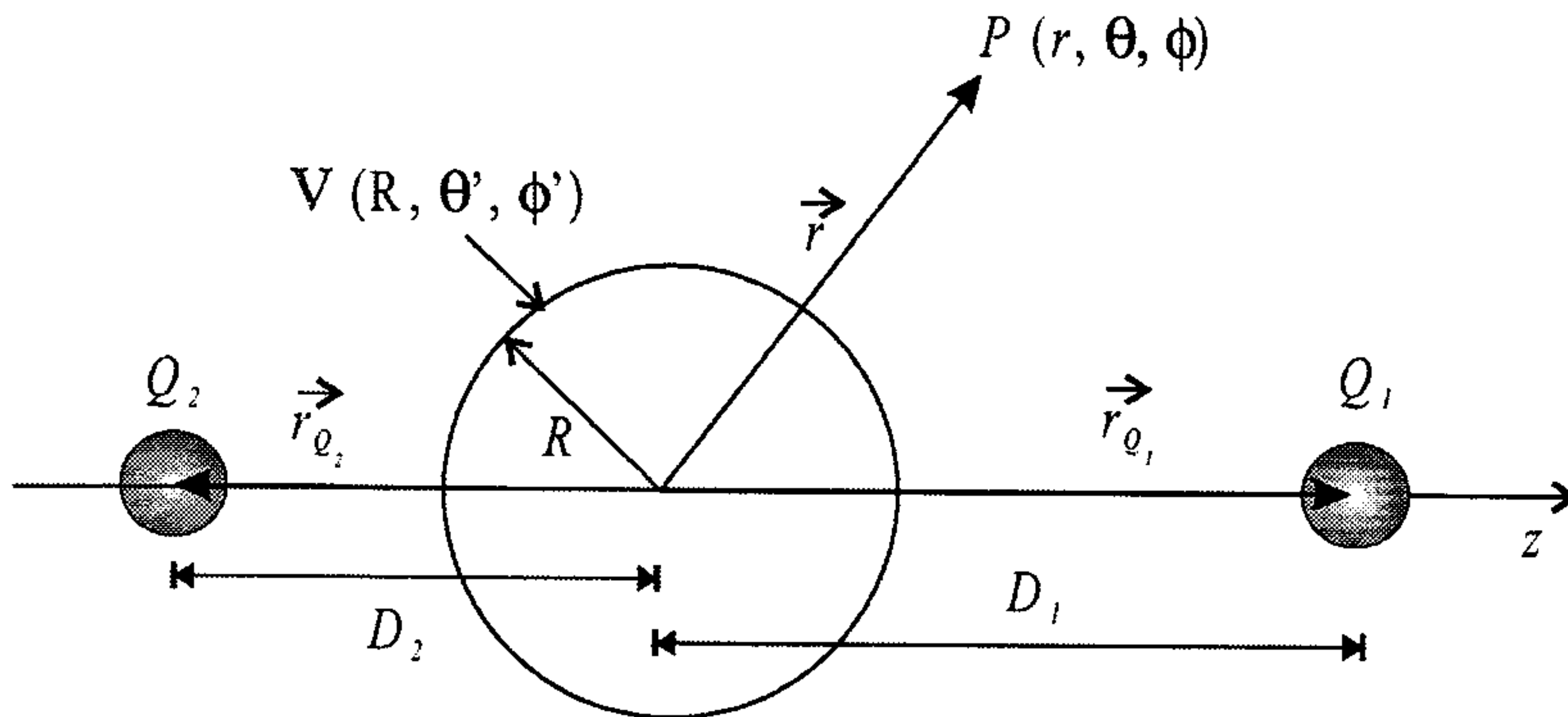



Figura 9.3: Uma esfera condutora entre duas cargas pontuais Q_1 e Q_2.

A primeira coisa a fazer é escrever a densidade de cargas. A carga Q_1 está sobre o eixo z, em $z = D_1$, e assim, $\theta_1 = 0$ e $\phi_1 = 0$. Sua contribuição para a densidade de cargas é

$$\rho_1 = Q_1\delta(r' - D_1)\frac{\delta(\cos\theta' - 1)}{r'}\frac{\delta(\phi' - 0)}{r'}$$
$$\rho_1 = \frac{Q_1}{r'^{\,2}}\delta(r' - D_1)\delta(\cos\theta' - 1)\delta(\phi')$$

A carga Q_2 está situada em $z = -D_2$, e neste caso, como $\theta_2 = \pi$ e $\phi_2 = 0$, a sua contribuição para a densidade de carga fica

$$\rho_2 = Q_2\delta(r' - D_2)\frac{\delta(\cos\theta' + 1)}{r'}\frac{\delta(\phi' - 0)}{r'}$$
$$\rho_2 = \frac{Q_2}{r'^{\,2}}\delta(r' - D_2)\delta(\cos\theta' + 1)\delta(\phi')$$

A densidade de carga total é

$$\rho = \rho_1 + \rho_2$$
$$\rho = \frac{Q_1}{r'^{\,2}}\delta(r' - D_1)\delta(\cos\theta' - 1)\delta(\phi') + \frac{Q_2}{r'^{\,2}}\delta(r' - D_2)\delta(\cos\theta' + 1)\delta(\phi')$$

O potencial é obtido através da expressão 9.12,

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) =$$
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \left[\frac{\rho(\vec{r}\,')}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^{\,2}}} - \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{R}\right)^2 - 2rr'\cos\gamma + R^2}}\right] dV$$
$$+ \frac{R\left(r^2 - R^2\right)}{4\pi}\oint_S \frac{\mathbb{V}(R,\theta',\phi')\,\mathrm{sen}\,\theta' d\theta' d\phi'}{\left[r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

e vamos nos preocupar, inicialmente, com a integral de volume, que envolve a densidade de cargas. Este termo fica

$$I_V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{\frac{Q_1}{r'^{\,2}}\delta(r' - D_1)\delta(\cos\theta' - 1)\delta(\phi')}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + (r')^2}}\right.$$
$$+ \frac{\frac{Q_2}{r'^{\,2}}\delta(r' - D_2)\delta(\cos\theta' + 1)\delta(\phi')}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^{\,2}}} - \frac{\frac{Q_1}{r'^{\,2}}\delta(r' - D_1)\delta(\cos\theta' - 1)\delta(\phi')}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{R}\right)^2 - 2rr'\cos\gamma + R^2}}$$
$$\left. - \frac{\frac{Q_2}{r'^{\,2}}\delta(r' - D_2)\delta(\cos\theta' + 1)\delta(\phi')}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{R}\right)^2 - 2rr'\cos\gamma + R^2}}\right] r'^{\,2}\,\mathrm{sen}\,\theta' dr' d\theta' d\phi'$$

Ao efetuar a integral em r', obtemos

$$I_V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{Q_1\delta(\cos\theta'-1)\delta(\phi')}{\sqrt{r^2-2rD_1\cos\gamma+D_1^2}} + \frac{Q_2\delta(\cos\theta'+1)\delta(\phi')}{\sqrt{r^2-2rD_2\cos\gamma+D_2^2}} - \frac{Q_1\delta(\cos\theta'-1)\delta(\phi')}{\sqrt{\left(\frac{rD_1}{R}\right)^2-2rD_1\cos\gamma+R^2}} - \frac{Q_2\delta(\cos\theta'+1)\delta(\phi')}{\sqrt{\left(\frac{rD_2}{R}\right)^2-2rD_2\cos\gamma+R^2}}\right]\operatorname{sen}\theta' d\theta' d\phi'$$

Como o único termo que envolve ϕ' é $\cos\gamma$, ao realizar a integral nesta variável, obtemos, por causa da função delta,

$$\cos\gamma_1 = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos\phi + \cos\theta\cos\theta'$$

e assim, temos

$$I_V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_1^{-1}\left[\frac{Q_1\delta(\cos\theta'-1)}{\sqrt{r^2-2rD_1\cos\gamma_1+D_1^2}} + \frac{Q_2\delta(\cos\theta'+1)}{\sqrt{r^2-2rD_2\cos\gamma_1+D_2^2}} - \frac{Q_1\delta(\cos\theta'-1)}{\frac{D_1}{R}\sqrt{r^2-2rD_1\frac{R^2}{D_1^2}\cos\gamma_1+\frac{R^2}{D_1^2}R^2}} - \frac{Q_2\delta(\cos\theta'+1)}{\frac{D_2}{R}\sqrt{r^2-2rD_2\frac{R^2}{D_2^2}\cos\gamma_1+\frac{R^2}{D_2^2}R^2}}\right] d(\cos\theta')$$

ou

$$I_V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-1}^{1}\left[\frac{Q_1\delta(\cos\theta'-1)}{\sqrt{r^2-2rD_1\cos\gamma_1+D_1^2}} + \frac{Q_2\delta(\cos\theta'+1)}{\sqrt{r^2-2rD_2\cos\gamma_1+D_2^2}} - \frac{Q_1R\delta(\cos\theta'-1)}{D_1\sqrt{r^2-2r\frac{R^2}{D_1}\cos\gamma_1+\frac{R^4}{D_1^2}}} - \frac{Q_2R\delta(\cos\theta'+1)}{D_2\sqrt{r^2-2r\frac{R^2}{D_2}\cos\gamma_1+\frac{R^4}{D_2^2}}}\right] d(\cos\theta')$$

Para efetuar a integral em θ', o cosseno deve ser escrito como

$$\cos\gamma_1 = \operatorname{sen}\theta\sqrt{1-\cos^2\theta'}\cos\phi + \cos\theta\cos\theta'$$

A integral para a função $\delta(\cos\theta' - 1)$ resulta em

$$\cos\gamma_2 = \operatorname{sen}\theta\sqrt{1-1^2}\cos\phi + \cos\theta(1)$$
$$\cos\gamma_2 = \cos\theta$$

ao passo que, para a função $\delta(\cos\theta' + 1)$, temos

$$\cos\gamma_3 = \operatorname{sen}\theta\sqrt{1-(-1)^2}\cos\phi + \cos\theta(-1)$$
$$\cos\gamma_3 = -\cos\theta$$

Assim, encontramos

$$I_V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q_1}{\sqrt{r^2 - 2rD_1\cos\theta + D_1^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{r^2 + 2rD_2\cos\theta + D_2^2}} - \frac{Q_1 R}{D_1\sqrt{r^2 - 2r\frac{R^2}{D_1}\cos\theta + \frac{R^4}{D_1^2}}} - \frac{Q_2 R}{D_2\sqrt{r^2 + 2r\frac{R^2}{D_2}\cos\theta + \frac{R^4}{D_2^2}}}\right]$$

Esta expressão deve ser somada à integral de superfície sobre a esfera, e o resultado geral é

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q_1}{\sqrt{r^2 - 2rD_1\cos\theta + D_1^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{r^2 + 2rD_2\cos\theta + D_2^2}} - \frac{Q_1 R}{D_1\sqrt{r^2 - 2r\frac{R^2}{D_1}\cos\theta + \frac{R^4}{D_1^2}}} - \frac{Q_2 R}{D_2\sqrt{r^2 + 2r\frac{R^2}{D_2}\cos\theta + \frac{R^4}{D_2^2}}}\right] + \frac{R\left(r^2 - R^2\right)}{4\pi}\oint_S \frac{\mathbb{V}(R,\theta',\phi')\operatorname{sen}\theta' d\theta' d\phi'}{\left[r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad (9.14)$$

Como exemplo, vamos considerar um potencial constante $\mathbb{V}(R,\theta',\phi') = V_0$ sobre a superfície da esfera. Neste caso, a integral de superfície na equação 9.14 fica

$$I_S = \frac{R\left(r^2 - R^2\right)}{4\pi}\oint_S \frac{V_0\operatorname{sen}\theta' d\theta' d\phi'}{\left[r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Para realizar esta integral, colocamos o ponto onde queremos o potencial sobre o eixo z, e assim, $\theta = 0$ e $\phi = 0$, de forma que o cosseno de γ fica, mediante a expressão 9.13,

$$\cos\gamma = \operatorname{sen} 0 \operatorname{sen}\theta' \cos(0 - \phi') + \cos 0 \cos\theta' = \cos\theta'$$

e então,

$$\begin{aligned}
I_S &= \frac{V_0 R(r^2 - R^2)}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta' d\theta' d\phi'}{\left[r^2 - 2rR\cos\theta' + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
I_S &= \frac{V_0 R(r^2 - R^2)}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta' d\theta'}{\left[r^2 - 2rR\cos\theta' + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} \left[\phi'\right]_0^{2\pi} \\
I_S &= \frac{V_0 R(r^2 - R^2)}{2} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta' d\theta'}{\left[r^2 - 2rR\cos\theta' + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Para realizar esta integral, definimos

$$\begin{aligned}
u &= r^2 - 2rR\cos\theta' + R^2 \\
du &= 2rR \operatorname{sen}\theta' d\theta' \\
\operatorname{sen}\theta' d\theta' &= \frac{du}{2rR} \\
\theta_1 = 0 &\Rightarrow u_1 = r^2 - 2rR + R^2 = (r - R)^2 \\
\theta_2 = \pi &\Rightarrow u_2 = r^2 + 2rR + R^2 = (r + R)^2
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
I_S &= \frac{V_0 R(r^2 - R^2)}{2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\frac{du}{2rR}}{u^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{V_0 (r^2 - R^2)}{4r} \int_{u_1}^{u_2} u^{-\frac{3}{2}} du \\
&= \frac{V_0 (R^2 - r^2)}{2r} \left[\frac{1}{\sqrt{u_2}} - \frac{1}{\sqrt{u_1}}\right] \\
I_S &= \frac{V_0 (R^2 - r^2)}{2r} \left[\frac{1}{\sqrt{(r + R)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(r - R)^2}}\right]
\end{aligned}$$

Aqui é preciso tomar cuidado, pois

$$\sqrt{(r-R)^2} = |r-R| = \begin{cases} r-R, & r \geq R \\ R-r, & r \leq R \end{cases}$$

Como estamos na região fora da esfera, $r \geq R$, e assim,

$$I_S = \frac{V_0\left(R^2-r^2\right)}{2r}\left[\frac{1}{r+R} - \frac{1}{r-R}\right]$$
$$I_S = \frac{V_0\left(R^2-r^2\right)}{2r}\frac{r-R-(r+R)}{(r+R)(r-R)}$$
$$I_S = \frac{V_0\left(R^2-r^2\right)}{2r}\frac{-2R}{r^2-R^2}$$
$$I_S = \frac{V_0 R}{r}$$

e o potencial elétrico, dado pela equação 9.14, fica

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q_1}{\sqrt{r^2-2rD_1\cos\theta+D_1^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{r^2+2rD_2\cos\theta+D_2^2}} - \frac{Q_1 R}{D_1\sqrt{r^2-2r\frac{R^2}{D_1}\cos\theta+\frac{R^4}{D_1^2}}} - \frac{Q_2 R}{D_2\sqrt{r^2+2r\frac{R^2}{D_2}\cos\theta+\frac{R^4}{D_2^2}}}\right] + V_0\frac{R}{r}$$

A interpretação física desta expressão é simples. Os primeiros dois termos são os potenciais elétricos gerados pelas cargas reais Q_1 e Q_2. Os outros dois seguintes são os potenciais gerados pelas cargas-imagem, situadas dentro da esfera. Por fim, o último termo é o potencial elétrico gerado por uma carga pontual situada no centro da esfera, desde que façamos a equivalência

$$q = 4\pi\epsilon_0 R V_0$$

que é válida para as regiões situadas fora da esfera e que reproduz, sobre a superfície desta, a condição de que o potencial é uma constante V_0. Note que o potencial elétrico obedece ao princípio de superposição, e assim, as integrais de volume e de superfície são independentes uma da outra. A integral de superfície é o potencial gerado pela superfície da esfera, ao passo que a integral de volume é o potencial produzido pela distribuição volumétrica de cargas situada no volume V, que, no nosso caso, é a região fora da esfera. Desse

modo, para efetuar cada uma destas integrais, é preciso considerar o melhor sistema de coordenadas para a configuração do problema. Isso significa que pode ser utilizado um sistema para a integral de volume e outro para a integral de superfície, desde que, no final da resolução, eles sejam compatibilizados.

Exemplo 9.3. *Um hemisfério condutor de raio R está submetido ao potencial elétrico*

$$\mathbb{V}(R,\theta',\phi') = \begin{cases} V_0, & 0 \leq \theta' \leq \alpha \\ V_1, & \alpha \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

como mostra a figura 9.4.

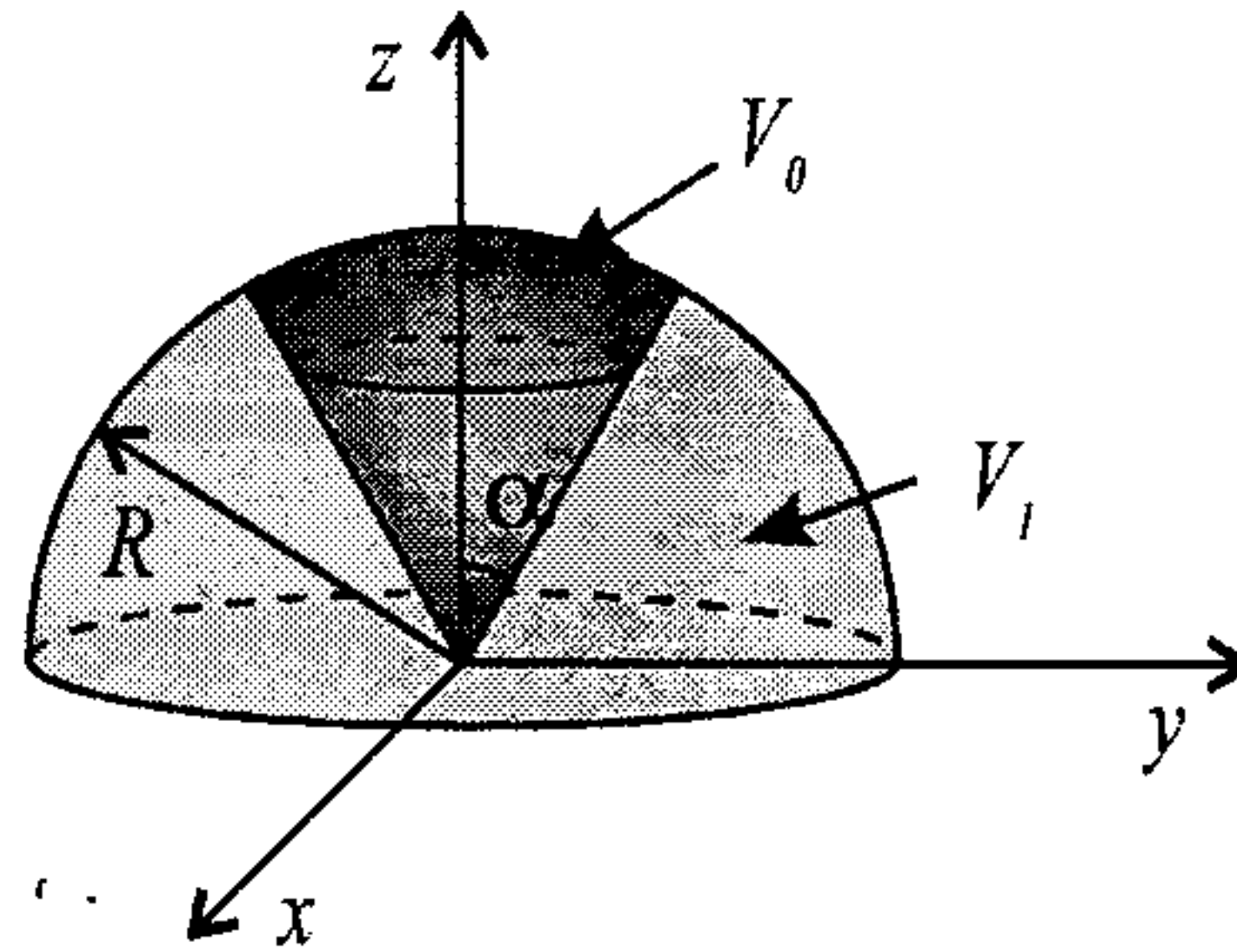



Figura 9.4: Hemisfério condutor submetido a um potencial $\mathbb{V}$ sobre sua superfície.

Com relação a este hemisfério, responda ao seguinte.

a) Calcule o potencial elétrico no eixo z, para $z \geq R$.

Como temos um problema com condições de contorno de Dirichlet para o potencial elétrico, para obtermos a solução, vamos utilizar a expressão 9.12, que é

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) =$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \left[\frac{\rho(\vec{r}\,')}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^2}} - \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{R}\right)^2 - 2rr'\cos\gamma + R^2}}\right] dV$$

$$+ \frac{R(r^2 - R^2)}{4\pi}\oint_S \frac{\mathbb{V}(R,\theta',\phi')\operatorname{sen}\theta' d\theta' d\phi'}{\left[r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

No caso em estudo, a densidade volumétrica de cargas ρ é nula. Além disso, como queremos a solução para o eixo z, $\theta = 0$, e, usando a expressão 9.13, temos

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \cos\theta\cos\theta' - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\phi-\phi') \\ &= \cos 0\cos\theta' - \operatorname{sen} 0\operatorname{sen}\theta'\cos(\phi-\phi') \\ \cos\gamma &= \cos\theta'\end{aligned}$$

e desse modo, o potencial elétrico fica

$$\mathbb{V}(z) = \frac{R\left(z^2-R^2\right)}{4\pi}\oint_S \frac{\mathbb{V}(R,\theta',\phi')\operatorname{sen}\theta' d\theta' d\phi'}{\left[z^2-2zR\cos\theta'+R^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(z) = \frac{R\left(z^2-R^2\right)}{4\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi}\frac{V_0\operatorname{sen}\theta' d\theta' d\phi'}{\left[z^2-2zR\cos\theta'+R^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\ + \frac{R\left(z^2-R^2\right)}{4\pi}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{V_1\operatorname{sen}\theta' d\theta' d\phi'}{\left[z^2-2zR\cos\theta'+R^2\right]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

A integral em ϕ', que é imediata, resulta em 2π. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(z) = \frac{V_0 R\left(z^2-R^2\right)}{2}\int_0^{\alpha}\frac{\operatorname{sen}\theta' d\theta'}{\left[z^2-2zR\cos\theta'+R^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\ + \frac{V_1 R\left(z^2-R^2\right)}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}\theta' d\theta'}{\left[z^2-2zR\cos\theta'+R^2\right]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Para resolver ambas as integrais acima, a substituição indicada é

$$\begin{aligned}u &= z^2-2zR\cos\theta'+R^2 \\ du &= 2zR\operatorname{sen}\theta' d\theta' \\ \operatorname{sen}\theta' d\theta' &= \frac{du}{2zR}\end{aligned}$$

Os limites de integração serão obtidos posteriormente. Com esta troca de variáveis, as integrais ficam

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(z) &= \frac{V_0R(z^2-R^2)}{2}\int_{u_1}^{u_2}\frac{\frac{du}{2zR}}{u^{\frac{3}{2}}}+\frac{V_1R(z^2-R^2)}{2}\int_{u_2}^{u_3}\frac{\frac{du}{2zR}}{u^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{V_0(z^2-R^2)}{4z}\int_{u_1}^{u_2}u^{-\frac{3}{2}}\,du+\frac{V_1(z^2-R^2)}{4z}\int_{u_2}^{u_3}u^{-\frac{3}{2}}\,du\\
\mathbb{V}(z) &= -\frac{V_0(z^2-R^2)}{2z}\left[\frac{1}{\sqrt{u_2}}-\frac{1}{\sqrt{u_1}}\right]-\frac{V_1(z^2-R^2)}{2z}\left[\frac{1}{\sqrt{u_3}}-\frac{1}{\sqrt{u_2}}\right]
\end{aligned}$$

Vejamos agora os limites de integração.

$$\begin{aligned}
\theta = 0 &\Rightarrow u_1 = z^2-2zR+R^2=(z-R)^2\\
\theta = \alpha &\Rightarrow u_2 = z^2-2zR\cos\alpha+R^2\\
\theta = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow u_3 = z^2+R^2
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\sqrt{(z-R)^2}=|z-R|$$

O resultado para o potencial para $z \geq R$ é

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(z) = &-\frac{V_0(z^2-R^2)}{2z}\left[\frac{1}{\sqrt{z^2-2zR\cos\alpha+R^2}}-\frac{1}{z-R}\right]\\
&-\frac{V_1(z^2-R^2)}{2z}\left[\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2-2zR\cos\alpha+R^2}}\right]
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(z) = &\frac{V_0(z-R)(z+R)}{2z}\frac{1}{z-R}\\
&+\frac{z^2-R^2}{2z\sqrt{z^2-2zR\cos\alpha+R^2}}(V_1-V_0)-\frac{V_1(z^2-R^2)}{2z}\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\mathbb{V}(z)=\frac{V_0(z+R)}{2z}+\frac{(z^2-R^2)(V_1-V_0)}{2z\sqrt{z^2-2zR\cos\alpha+R^2}}-\frac{V_1(z^2-R^2)}{2z\sqrt{z^2+R^2}}$$

ou finalmente,

$$\mathbb{V}(z) = \frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{2}\frac{R}{z} + \frac{(z^2 - R^2)(V_1 - V_0)}{2z\sqrt{z^2 - 2zR\cos\alpha + R^2}} - \frac{V_1(z^2 - R^2)}{2z\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Esta expressão comporta vários casos particulares, alguns dos quais são estudados nos exercícios (veja os exercícios 9.1 e 9.2). Um deles (e talvez o mais importante), tratado a seguir, corresponde ao caso $V_1 = V_0$.

b) Qual é o potencial elétrico gerado no eixo z, sendo $z \geq R$, por um hemisfério de raio R submetido ao potencial V_0 sobre sua superfície?

Para obter esse potencial, consideramos $V_1 = V_0$ no potencial obtido acima para o hemisfério, e o resultado é

$$\mathbb{V}(z) = \frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{2}\frac{R}{z} - \frac{V_0(z^2 - R^2)}{2z\sqrt{z^2 + R^2}}, \qquad z \geq R$$

Podemos expandir este potencial em potências de $\frac{R}{z}$. Para fazer isso, precisamos reescrever o último termo do lado direito da expressão acima como

$$\frac{V_0(z^2 - R^2)}{2z\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{V_0 z^2(1 - \frac{R^2}{z^2})}{2z\sqrt{z^2(1 + \frac{R^2}{z^2})}}$$

$$= \frac{V_0 z(1 - \frac{R^2}{z^2})}{2z\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}}$$

$$\frac{V_0(z^2 - R^2)}{2z\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{V_0}{2}\frac{1 - \frac{R^2}{z^2}}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}}$$

Agora, usamos a série de Taylor da função binomial, dada pela expressão 2.6, para expandir o denominador, ou seja,

$$\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{R^2}{z^2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{z^2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{6}\left(\frac{R^2}{z^2}\right)^3 + \cdots$$

ou

$$\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{R^2}{2z^2} + \frac{3}{8}\frac{R^4}{z^4} - \frac{5}{16}\frac{R^6}{z^6} + \cdots$$

e assim, a fração fica

$$\frac{1-\frac{R^2}{z^2}}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} = \left(1-\frac{R^2}{z^2}\right)\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1-\frac{R^2}{z^2}}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} = \left(1-\frac{R^2}{z^2}\right)\left(1-\frac{R^2}{2z^2}+\frac{3}{8}\frac{R^4}{z^4}-\frac{5}{16}\frac{R^6}{z^6}+\cdots\right)$$

$$\frac{1-\frac{R^2}{z^2}}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} = 1-\frac{R^2}{2z^2}+\frac{3}{8}\frac{R^4}{z^4}-\frac{5}{16}\frac{R^6}{z^6}-\frac{R^2}{z^2}+\frac{R^4}{2z^4}-\frac{3}{8}\frac{R^6}{z^6}+\cdots$$

$$\frac{1-\frac{R^2}{z^2}}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} = 1-\frac{3R^2}{2z^2}+\frac{7}{8}\frac{R^4}{z^4}-\frac{11}{16}\frac{R^6}{z^6}+\cdots$$

e reunindo a expressão acima com a do potencial elétrico, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(z) &= \frac{V_0}{2}+\frac{V_0}{2}\frac{R}{z}-\frac{V_0}{2}\left(1-\frac{3R^2}{2z^2}+\frac{7}{8}\frac{R^4}{z^4}-\frac{11}{16}\frac{R^6}{z^6}+\cdots\right)\\
&= \frac{V_0}{2}-\frac{V_0}{2}+\frac{V_0}{2}\left(\frac{R}{z}+\frac{3R^2}{2z^2}-\frac{7}{8}\frac{R^4}{z^4}+\frac{11}{16}\frac{R^6}{z^6}+\cdots\right)\\
\mathbb{V}(z) &= \frac{V_0}{2}\frac{R}{z}\left(1+\frac{3R}{2z}-\frac{7}{8}\frac{R^3}{z^3}+\frac{11}{16}\frac{R^5}{z^5}+\cdots\right)
\end{aligned} \tag{9.15}$$

que é o potencial elétrico sobre o eixo z, para $z \geq R$.

c) Qual é o potencial em qualquer ponto $\vec{r}$ do espaço, sendo $r \geq R$?

Para obter o potencial em qualquer ponto do espaço, utilizamos o potencial elétrico na forma expandida 9.15, e, lembrando o que foi discutido no exemplo 6.8, multiplicamos cada fator $\left(\frac{R}{z}\right)^{\ell+1}$ pelo polinômio de Legendre $P_\ell(\cos\theta)$, pois estamos resolvendo um problema exterior, em que $r_> = r = z$ e $r_< = R$, conforme foi dito naquele exemplo. Assim, o potencial elétrico em qualquer ponto do espaço é

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{V_0}{2}\frac{R}{r}\Bigg(P_0(\cos\theta)+\frac{3R}{2r}P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}\frac{R^3}{r^3}P_3(\cos\theta)+\frac{11}{16}\frac{R^5}{r^5}P_5(\cos\theta)+\cdots\Bigg)$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{V_0}{2}\frac{R}{r}\left(1 + \frac{3R}{2r}P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}\frac{R^3}{r^3}P_3(\cos\theta) + \frac{11}{16}\frac{R^5}{r^5}P_5(\cos\theta) + \cdots\right) \tag{9.16}$$

Podemos comparar esta expressão com dois outros resultados já obtidos. Primeiro, se juntarmos dois hemisférios submetidos a um potencial V_0, formando uma esfera, como a da figura 9.5, o potencial elétrico será a soma dos potenciais devidos a cada um dos hemisférios, só que precisamos compatibilizar as variáveis. A coordenada r é a mesma para os dois, pois ela é medida a partir do centro do hemisfério ou da esfera. O ângulo θ, porém, não é o mesmo. Um dos hemisférios está situado como o da figura 9.4, e o ângulo que aparece nos polinômios de Legendre na expressão do potencial para esse hemisfério, que é a equação acima, é o próprio ângulo θ.

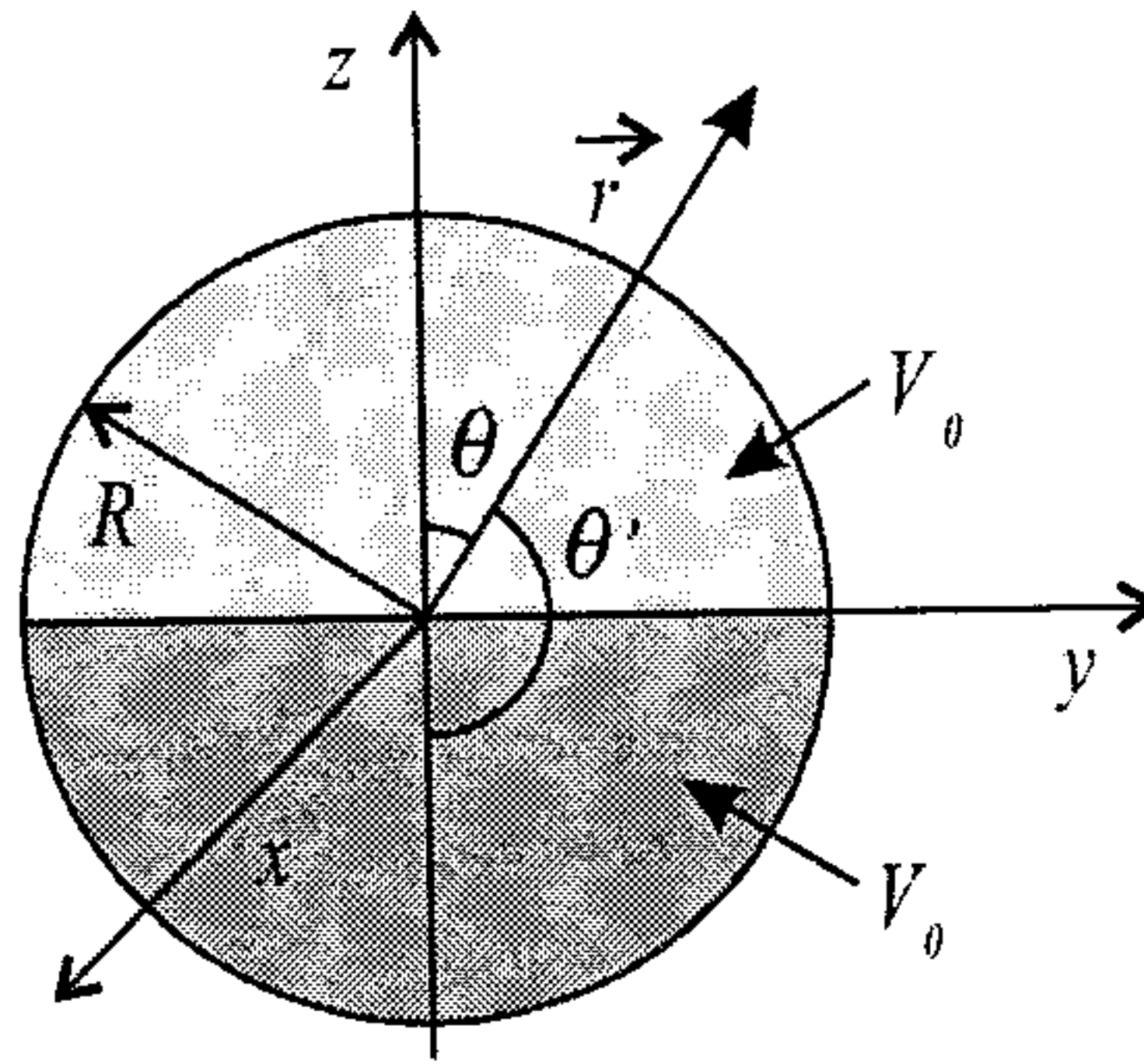



Figura 9.5: Dois hemisférios condutores reunidos, formando uma esfera submetida a um potencial V_0 sobre sua superfície.

O outro hemisfério está colocado na parte de baixo do anterior, e seu potencial é

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{V_0}{2}\frac{R}{r}\left(1 + \frac{3R}{2r}P_1(\cos\theta') - \frac{7}{8}\frac{R^3}{r^3}P_3(\cos\theta') + \frac{11}{16}\frac{R^5}{r^5}P_5(\cos\theta') + \cdots\right)$$

O ângulo θ' está relacionado ao ângulo θ por (veja a figura 9.5)

$$\theta' = \pi - \theta$$

e assim, como

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

temos

$$\cos\theta' = \cos(\pi - \theta) = \cos\pi\cos\theta + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$$

Se ℓ é ímpar, o polinômio de Legendre $P_\ell(x)$ é ímpar, e portanto,

$$P_\ell(\cos\theta') = P_\ell(-\cos\theta) = -P_\ell(\cos\theta)$$

de modo que o potencial para o hemisfério inferior, em termos das mesmas variáveis do potencial do hemisférico superior, fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{V_0}{2}\frac{R}{r}\left(1 - \frac{3R}{2r}P_1(\cos\theta) + \frac{7}{8}\frac{R^3}{r^3}P_3(\cos\theta) - \frac{11}{16}\frac{R^5}{r^5}P_5(\cos\theta) + \cdots\right)$$

e agora, somando os dois potenciais, temos o potencial gerado pela esfera, ou seja,

$$\mathbb{V}_{\text{esfera}} = \mathbb{V}_{\text{hemisf. 1}} + \mathbb{V}_{\text{hemisf. 2}}$$

ou

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{\text{esfera}}(\vec{r}) = \frac{V_0}{2}\frac{R}{r}\Bigg(1 &+ \frac{3R}{2r}P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}\frac{R^3}{r^3}P_3(\cos\theta)\\ &+ \frac{11}{16}\frac{R^5}{r^5}P_5(\cos\theta) + \cdots\Bigg) + \frac{V_0}{2}\frac{R}{r}\Bigg(1 - \frac{3R}{2r}P_1(\cos\theta)\\ &+ \frac{7}{8}\frac{R^3}{r^3}P_3(\cos\theta) - \frac{11}{16}\frac{R^5}{r^5}P_5(\cos\theta) + \cdots\Bigg)\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\mathbb{V}_{\text{esfera}}(\vec{r}) = \frac{V_0}{2}\frac{R}{r}(1 + 1) = V_0\frac{R}{r}$$

que concorda com a expressão 6.62, obtida no exemplo 6.4. A segunda comparação pode ser feita com a situação apresentada no exemplo 6.7, no qual existem dois hemisférios submetidos aos potenciais $\pm V_0$. Assim, aplicando a expressão 9.16 para um hemisfério submetido a um potencial $-V_0$, colocado abaixo do primeiro, como na figura 9.5, obtemos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = -\frac{V_0}{2}\frac{R}{r}\left(1 - \frac{3R}{2r}P_1(\cos\theta) + \frac{7}{8}\frac{R^3}{r^3}P_3(\cos\theta) - \frac{11}{16}\frac{R^5}{r^5}P_5(\cos\theta) + \cdots\right)$$

e agora, somando este potencial com o potencial gerado pelo hemisfério superior, dado pela expressão 9.16, encontramos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{V_0}{2}\frac{R}{r}\left(1 + \frac{3R}{2r}P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}\frac{R^3}{r^3}P_3(\cos\theta) + \frac{11}{16}\frac{R^5}{r^5}P_5(\cos\theta) + \cdots\right)$$
$$- \frac{V_0}{2}\frac{R}{r}\left(1 - \frac{3R}{2r}P_1(\cos\theta) + \frac{7}{8}\frac{R^3}{r^3}P_3(\cos\theta) - \frac{11}{16}\frac{R^5}{r^5}P_5(\cos\theta) + \cdots\right)$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = V_0\frac{R}{r}\left(\frac{3R}{2r}P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}\frac{R^3}{r^3}P_3(\cos\theta) + \frac{11}{16}\frac{R^5}{r^5}P_5(\cos\theta) + \cdots\right)$$

que concorda com a expressão 6.66, obtida anteriormente para o potencial elétrico gerado pelos dois hemisférios.

d) Qual é o potencial elétrico na região $r \leq R$?

O potencial elétrico na região $r \leq R$ pode ser obtido do potencial na região exterior, onde $r \geq R$, por intermédio da equivalência 6.67 entre as grandezas $\left(\frac{r}{R}\right)^{\ell}$, definidas na região interior, onde $r \leq R$, e $\left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1}$, definidas na região exterior, onde $r \geq R$, ou seja,

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} \leftrightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1}$$

e assim, achamos o potencial elétrico interior ao hemisfério, que é

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{V_0}{2}\left(1 + \frac{3r}{2R}P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}\frac{r^3}{R^3}P_3(\cos\theta) + \frac{11}{16}\frac{r^5}{R^5}P_5(\cos\theta) + \cdots\right)$$

Esta expressão também pode ser comparada com resultados obtidos anteriormente, se empregarmos as mesmas configurações que foram utilizados no item anterior, a saber, uma esfera condutora submetida ao potencial V_0, formada pela junção de dois hemisférios, e uma esfera formada por dois hemisférios com potenciais $\pm V_0$. Você pode fazer essas verificações como exercício.

9.4 Obtenção das Funções de Green em Coordenadas Esféricas

Na seção anterior, vimos a solução geral baseada nas funções de Green para o problema de uma esfera submetida a um potencial qualquer $\mathbb{V}(R, \theta, \phi)$,

expressa pela equação 9.12, para a região fora da esfera. Essa expressão foi obtida da equação 9.10, que é a função de Green neste caso.

$$\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{R}{r'\left|\vec{r}-\frac{R^2}{r'^2}\vec{r}\,'\right|}$$

Pode ser interessante, para um dado problema, explicitar esta função de Green em termos de um produto de funções das variáveis pertinentes, como uma espécie de separação de variáveis. Assim, lembrando a expressão 6.90, que é

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} Y_{\ell,m}^*(\theta',\phi') Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

onde $r_<$ é o menor valor entre $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$, e $r_>$ é o maior entre eles, vemos que essa expressão é a expansão do potencial elétrico gerado por uma carga unitária (a menos de uma constante multiplicativa) em termos de fatores separados, como queríamos. De fato, se não houver nenhuma superfície delimitando duas regiões distintas, como ocorre quando temos uma fronteira esférica, que define uma região interna e outra externa, a função de Green é, simplesmente,

$$\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

ou

$$\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,') = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} Y_{\ell,m}^*(\theta',\phi') Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \tag{9.17}$$

Quando existe uma superfície limitante, como uma esfera de raio R, a função de Green para a região externa à esfera é dada por 9.10, mediante o uso da expansão 6.90 para os dois termos nesta expressão. O primeiro termo fica idêntico ao apresentado acima, enquanto o segundo é

$$\begin{aligned}
\frac{R}{r'\left|\vec{r}-\frac{R^2}{r'^2}\vec{r}\,'\right|} &= \frac{R}{r'} 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{\left(\frac{R^2 r'}{r'^2}\right)^\ell}{r^{\ell+1}} Y_{\ell,m}^*(\theta',\phi') Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \\
&= 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{R}{r'} \frac{R^{2\ell}}{r'^{\ell} r^{\ell+1}} Y_{\ell,m}^*(\theta',\phi') Y_{\ell,m}(\theta,\phi)
\end{aligned}$$

$$\frac{R}{r'\left|\vec{r}-\frac{R^2}{r'^2}\vec{r}\,'\right|} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{R^2}{R} \frac{R^{2\ell}}{r'^{\ell+1} r^{\ell+1}} Y_{\ell,m}^*(\theta',\phi') Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

$$\frac{R}{r'\left|\vec{r} - \frac{R^2}{r'^2}\vec{r}'\right|} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{1}{R} \frac{(R^2)^{\ell+1}}{(rr')^{\ell+1}} Y^*_{\ell,m}(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

$$\frac{R}{r'\left|\vec{r} - \frac{R^2}{r'^2}\vec{r}'\right|} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{1}{R} \left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{\ell+1} Y^*_{\ell,m}(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

Reunindo as duas expressões, a equação 9.10 fica

$$\mathfrak{F}(\vec{r}, \vec{r}') = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} Y^*_{\ell,m}(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$
$$- 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{1}{R} \left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{\ell+1} Y^*_{\ell,m}(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

ou

$$\mathfrak{F}(\vec{r}, \vec{r}') = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left[\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{\ell+1}\right] Y^*_{\ell,m}(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \tag{9.18}$$

que é a função de Green geral, para a região externa à fronteira esférica que existe entre as duas regiões, expressa na forma fatorada, em coordenadas esféricas. O termo entre colchetes, que é a parte radial, fica, explicitamente,

$$\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{\ell+1} = \frac{r^\ell}{r'^{\,\ell+1}} - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{\ell+1}$$
$$\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{\ell+1} = \frac{1}{r'^{\,\ell+1}}\left[r^\ell - \frac{R^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}}\right]$$

quando $r_< = r$ e $r_> = r'$, e

$$\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{\ell+1} = \frac{r'^{\,\ell}}{r^{\ell+1}} - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{\ell+1}$$
$$\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{\ell+1} = \frac{1}{r^{\ell+1}}\left[r'^{\,\ell} - \frac{R^{2\ell+1}}{r'^{\,\ell+1}}\right]$$

quando $r_< = r'$ e $r_> = r$. Estas duas expressões podem ser reunidas em

$$\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{\ell+1} = \begin{cases} \frac{1}{r'^{\,\ell+1}}\left[r^\ell - \frac{R^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}}\right], & r < r' \\ \frac{1}{r^{\ell+1}}\left[r'^{\,\ell} - \frac{R^{2\ell+1}}{r'^{\,\ell+1}}\right], & r > r' \end{cases}$$

É importante relembrar que, como sempre, $\vec{r}\,'$ representa as posições onde estão as cargas, e $\vec{r}$ é a posição onde estamos calculando o potencial. Vejamos agora um exemplo.

Exemplo 9.4. *Considere uma esfera condutora de raio R circundada por um anel de cargas de raio R_A. O anel contém uma carga total Q, distribuída de forma homogênea sobre a sua superfície, e ele está situado no plano xy, como mostra a figura 9.6. Para esta configuração, calcule o potencial elétrico, considerando que a esfera está aterrada.*

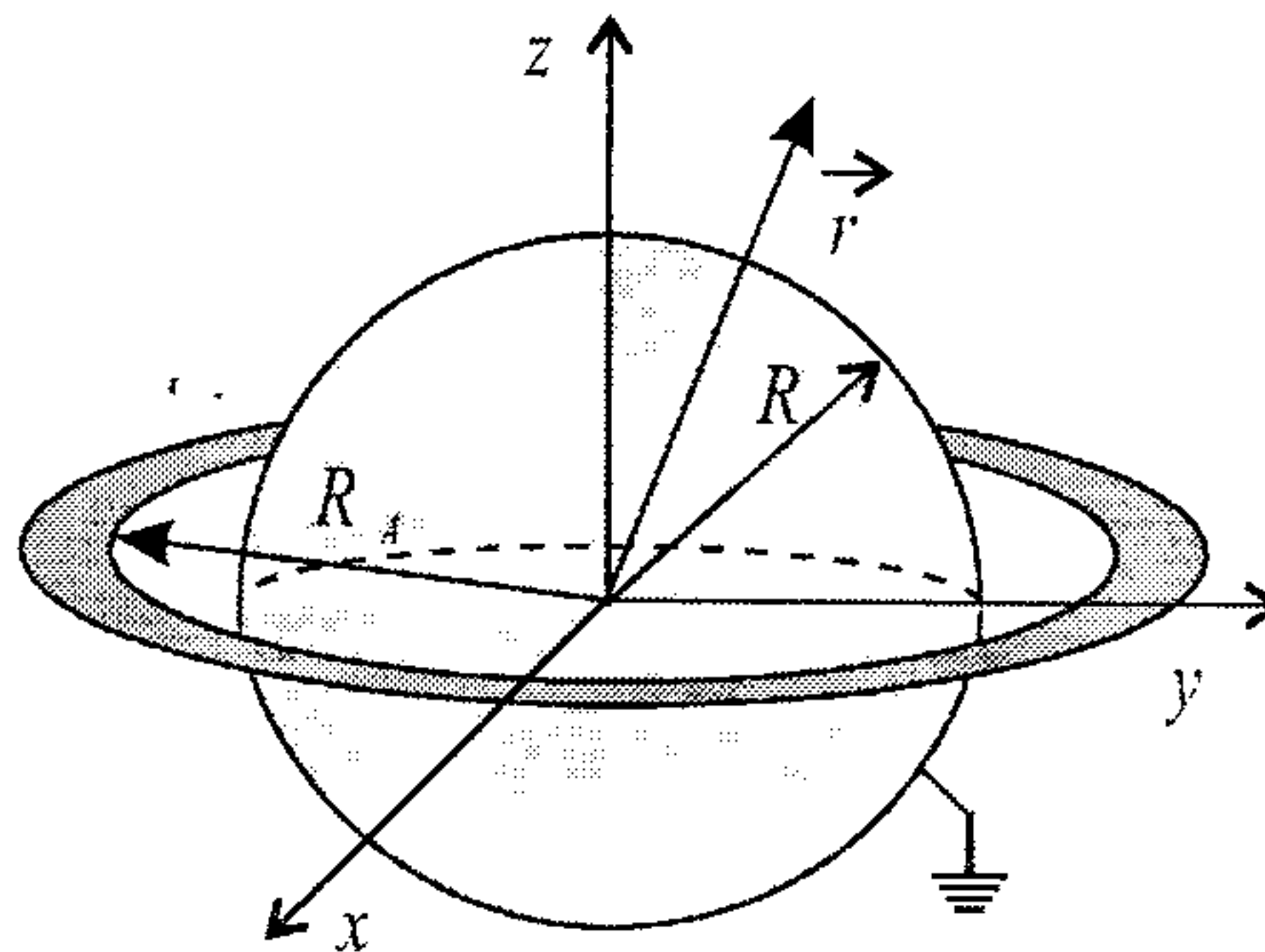



Figura 9.6: Uma esfera condutora dentro de um anel de cargas.

Este problema estabelece condições de contorno de Dirichlet sobre a superfície da esfera, e assim, vamos utilizar a expressão 9.6 para obter o potencial elétrico em termos de funções de Green. Como o potencial sobre a superfície esférica é nulo, uma vez que ela está aterrada, a integral de superfície nesta equação se anula, de forma que temos, para o potencial,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\mathfrak{F}_D(\vec{r},\vec{r}\,')\,dV$$

A função de Green apropriada a este caso é dada pela equação 9.18,

$$\mathfrak{F}(\vec{r}, \vec{r}\,') = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left[\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{\ell+1} \right] Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

e precisamos escrever a densidade de carga do anel. Para este caso, podemos utilizar a equação 4.49,

$$\varrho(r, \theta, \phi) = \frac{Q}{2\pi R_A^2} \delta(r - R_A)\delta(\cos\theta)$$

que foi obtida no exemplo 4.18. Reunindo as expressões acima, o potencial elétrico fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{Q}{2\pi R_A^2} \delta(r' - R_A)\delta(\cos\theta')$$
$$\times 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left[\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{\ell+1} \right] Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)\, dV$$

ou, nos valendo do fato de que $d(\cos\theta') = -\operatorname{sen}\theta' d\theta'$,

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{Q}{2\pi R_A^2 \epsilon_0} \int_R^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \delta(r' - R_A)\delta(\cos\theta')$$
$$\times \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \left[\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{\ell+1} \right] Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi')$$
$$\times \frac{Y_{\ell,m}(\theta, \phi)}{2\ell+1} r'^{\,2} dr' d(\cos\theta') d\phi'$$

Os sinais das somatórias podem trocar de ordem com os de integração, e assim, obtemos

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{Q}{2\pi R_A^2 \epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{Y_{\ell,m}(\theta, \phi)}{2\ell+1}$$
$$\times \int_R^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \delta(r' - R_A)\delta(\cos\theta') r'^{\,2} \left[\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{\ell+1} \right]$$
$$\times Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') dr' d(\cos\theta') d\phi'$$

Para realizar a integral em ϕ', precisamos da expressão 6.78 para os harmônicos esféricos, ou seja,

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_{\ell,m}(\cos\theta)e^{im\phi}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\vec{r}) = {} & \frac{Q}{2\pi R_A^2\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{Y_{\ell,m}(\theta,\phi)}{2\ell+1} \\ & \times\int_R^{\infty}\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\delta(r'-R_A)\delta(\cos\theta')r'^2\left[\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}-\frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{\ell+1}\right] \\ & \times\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_{\ell,m}(\cos\theta')e^{-im\phi'}dr'd(\cos\theta')d\phi'\end{aligned}$$

Portanto, a integral em ϕ' torna-se, para $m \neq 0$, e lembrando que m é um número inteiro,

$$\int_0^{2\pi}e^{-im\phi'}d\phi' = \left[\frac{e^{-im\phi'}}{-im}\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{im}\big[\overbrace{e^{-i2\pi m}}^{1}-1\big] = 0$$

Quando $m = 0$, temos

$$\int_0^{2\pi}e^{-im\phi'}d\phi' = \int_0^{2\pi}d\phi' = 2\pi$$

e o potencial elétrico fica

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\vec{r}) = {} & \frac{Q}{R_A^2\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\frac{Y_{\ell,0}(\theta,\phi)}{2\ell+1} \\ & \times\int_R^{\infty}\int_{-1}^{1}\delta(r'-R_A)\delta(\cos\theta')r'^2\left[\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}-\frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{\ell+1}\right] \\ & \times P_{\ell,0}(\cos\theta')dr'd(\cos\theta')\end{aligned}$$

Lembrando que $P_{\ell,0} = P_\ell$, e que, pela equação 6.80,

$$Y_{\ell,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\theta)$$

o potencial fica, mediante a realização da integral em $\cos\theta'$,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{R_A^2\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\frac{1}{2\ell+1}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\theta)P_\ell(0)$$
$$\times\int_R^\infty \delta(r'-R_A)r'^2\left[\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{\ell+1}\right]dr'$$

ou, relembrando a expressão 6.70, que é

$$P_\ell(0) = \begin{cases}\frac{(-1)^{\frac{\ell}{2}}(\ell-1)!!}{2^{\frac{\ell}{2}}\frac{\ell}{2}!}, & \ell\,\text{par}\\ 0, & \ell\,\text{ímpar}\end{cases}$$

obtemos, para o potencial elétrico, considerando $\ell \to 2\ell$, já que apenas os termos pares contribuem,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R_A^2\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell(2\ell-1)!!}{2^\ell\ell!}P_{2\ell}(\cos\theta)$$
$$\times\int_R^\infty \delta(r'-R_A)r'^2\left[\frac{r_<^{2\ell}}{r_>^{2\ell+1}} - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{2\ell+1}\right]dr'$$

Por fim, para resolver a integral em r', precisamos separar dois casos. Primeiro, vamos considerar $r_> = r$ e $r_< = r'$, o que significa que estamos calculando o potencial a uma distância maior do que o raio do disco, pois r' sempre está associado às cargas, e r, à posição onde queremos o potencial. Com estas identificações, o potencial para $r > r'$ fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R_A^2\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell(2\ell-1)!!}{2^\ell\ell!}P_{2\ell}(\cos\theta)$$
$$\times\int_R^\infty \delta(r'-R_A)r'^2\left[\frac{r'^{2\ell}}{r^{2\ell+1}} - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{2\ell+1}\right]dr'$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{Q}{4\pi R_A^2 \epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} P_{2\ell}(\cos\theta) \times \left[\frac{1}{r^{2\ell+1}} \int_R^\infty r'^{\,2\ell+2} \delta(r' - R_A) dr' - \frac{1}{R} \left(\frac{R^2}{r} \right)^{2\ell+1} \int_R^\infty \frac{1}{r'^{\,2\ell-1}} \delta(r' - R_A) dr' \right]$$

e assim,

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{Q}{4\pi R_A^2 \epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} P_{2\ell}(\cos\theta) \times \left[\frac{1}{r^{2\ell+1}} R_A^{2\ell+2} - \frac{1}{R} \frac{R^{4\ell+2}}{r^{2\ell+1}} \frac{1}{R_A^{2\ell-1}} \right]$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{Q}{4\pi R_A^2 \epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} P_{2\ell}(\cos\theta) \times \left[R_A \left[\frac{R_A}{r} \right]^{2\ell+1} - \frac{1}{R} \frac{R^{4\ell+2}}{r^{2\ell+1}} \frac{R_A^2}{R_A^{2\ell+1}} \right]$$

ou ainda,

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{Q}{4\pi R_A^2 \epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} P_{2\ell}(\cos\theta) \times \left\{ R_A \left[\frac{R_A}{r} \right]^{2\ell+1} - \frac{R_A^2}{R} \left[\frac{R^2}{r R_A} \right]^{2\ell+1} \right\}$$

e finalmente,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_A} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} P_{2\ell}(\cos\theta) \times \left\{ \left[\frac{R_A}{r}\right]^{2\ell+1} - \frac{R_A}{R}\left[\frac{R^2}{rR_A}\right]^{2\ell+1} \right\}, \qquad r > R_A \quad (9.19)$$

que é o potencial para $r > R_A$. O potencial para $R \leq r \leq R_A$ é obtido mediante a consideração de que $r_> = r'$ e $r_< = r$. Neste caso, o potencial fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R_A^2 \epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} P_{2\ell}(\cos\theta) \times \int_R^\infty \delta(r' - R_A) r'^{\,2} \left[\frac{r^{2\ell}}{r'^{\,2\ell+1}} - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{2\ell+1}\right] dr'$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R_A^2 \epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} P_{2\ell}(\cos\theta) \times \left[r^{2\ell} \int_R^\infty \delta(r' - R_A) \frac{1}{r'^{\,2\ell-1}} dr' - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{r}\right)^{2\ell+1} \int_R^\infty \delta(r' - R_A) \frac{1}{r'^{\,2\ell-1}} dr' \right]$$

ou ainda,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R_A^2 \epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} P_{2\ell}(\cos\theta) \times \left[r^{2\ell} \frac{1}{R_A^{2\ell-1}} - \frac{1}{R}\left(\frac{R^2}{r}\right)^{2\ell+1} \frac{1}{R_A^{2\ell-1}} \right]$$

e finalmente,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R_A^2 \epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} P_{2\ell}(\cos\theta) \times \left\{ R_A \left[\frac{r}{R_A}\right]^{2\ell} - \frac{R_A^2}{R}\left[\frac{R^2}{rR_A}\right]^{2\ell+1} \right\}$$

que pode ser ainda reescrito como

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_A} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} P_{2\ell}(\cos\theta) \times \left\{ \left[\frac{r}{R_A}\right]^{2\ell} - \frac{R_A}{R}\left[\frac{R^2}{rR_A}\right]^{2\ell+1} \right\}, \qquad R \leq r \leq R_A \quad (9.20)$$

Note que, quando $r = R$, o potencial sobre a esfera fica

$$\mathbb{V}(R,\theta,\phi) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_A} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} P_{2\ell}(\cos\theta) \times \left\{ \left[\frac{R}{R_A}\right]^{2\ell} - \frac{R_A}{R}\left[\frac{R^2}{RR_A}\right]^{2\ell+1} \right\}$$

ou

$$\mathbb{V}(R,\theta,\phi) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_A} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} P_{2\ell}(\cos\theta) \left\{ \left[\frac{R}{R_A}\right]^{2\ell} - \left[\frac{R}{R_A}\right]^{2\ell} \right\}$$

$$\mathbb{V}(R,\theta,\phi) = 0$$

de modo que o potencial sobre a esfera é nulo, como deve ser, já que ela está aterrada. Observe que, quando o raio R da esfera tende a zero, obtemos o potencial do anel no espaço livre, estudado no exemplo 6.9. Neste caso, quando $r > R_A$, o potencial do sistema formado pelo anel e pela esfera é dado mediante a equação 9.19, que fica, ao reunirmos os fatores em R,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_A} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}(2\ell-1)!!}{2^{\ell}\ell!} P_{2\ell}(\cos\theta) \times \left\{ \left[\frac{R_A}{r}\right]^{2\ell+1} - \frac{R_A}{(rR_A)^{2\ell+1}} R^{4\ell+1} \right\}$$

Tomando agora o limite $R \to 0$, obtemos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_A} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}(2\ell-1)!!}{2^{\ell}\ell!} P_{2\ell}(\cos\theta) \left[\frac{R_A}{r}\right]^{2\ell+1}$$

que é a expressão 6.74, para o potencial do anel para $r > R_A$. Quando $r < R_A$, devemos usar a expressão 9.20 para o potencial elétrico na região entre o anel e a esfera. Reunindo os fatores em R, temos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_A} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}(2\ell-1)!!}{2^{\ell}\ell!} P_{2\ell}(\cos\theta) \times \left\{ \left[\frac{r}{R_A}\right]^{2\ell} - \frac{R_A}{(rR_A)^{2\ell+1}} R^{4\ell+1} \right\}$$

e, no limite $R \to 0$,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_A} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}(2\ell-1)!!}{2^{\ell}\ell!} P_{2\ell}(\cos\theta) \left[\frac{r}{R_A}\right]^{2\ell}$$

que é a equação 6.75, e ela nos dá corretamente o potencial quando $r < R_A$. Dessa forma, as duas expressões são verificadas.

Após este exemplo, podemos continuar com a obtenção de funções de Green em coordenadas esféricas, em particular para o caso em que há duas superfícies esféricas distintas, de raios R_1 e R_2. Para isso, partimos da equação 9.4 para o Laplaciano das funções de Green, ou seja,

$$\nabla^2 \mathfrak{F}(\vec{r}, \vec{r}\,') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

Como queremos obter as funções de Green em coordenadas esféricas, podemos utilizar a expressão 4.41 para a função delta de Dirac nestas coordenadas, isto é,

$$\delta_{r,\theta,\phi} = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') = \delta(r - r')\frac{\delta(\cos\theta - \cos\theta')}{r}\frac{\delta(\phi - \phi')}{r}$$

e assim,

$$\nabla^2 \mathfrak{F}(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r - r')\delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\phi - \phi') \qquad (9.21)$$

As funções delta dos ângulos podem ser expressas em termos de outras quantidades. Para ver isso, consideramos as equações C.32 e C.33 do apêndice C, que são, respectivamente,

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} A_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

e

$$A_{\ell,m} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) Y^*_{\ell,m}(\theta, \phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi$$

Substituindo esta última na anterior, temos

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \left\{ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta', \phi') Y^*_{\ell,m}(\theta', \phi') \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' d\phi' \right\} Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

Vamos introduzir a variável $d(\cos\theta') = -\operatorname{sen}\theta' d\theta'$ e trocar a ordem dos sinais de somatória e integração, e assim,

$$f(\theta, \phi) = -\int_1^{-1} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} Y^*_{\ell,m}(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \right\} f(\theta', \phi') \, d(\cos\theta') d\phi'$$

ou

$$f(\theta, \phi) = \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} Y^*_{\ell,m}(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \right\} f(\theta', \phi') \, d(\cos\theta') d\phi'$$

A propriedade 4.37 das deltas de Dirac estabelece que

$$\int_V f(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\, dV = \begin{cases} f(\vec{r_0}), & \vec{r}_0 \in V \\ 0, & \vec{r}_0 \notin V \end{cases}$$

e portanto, a penúltima equação nos fornece, para as deltas de Dirac angulares, a expansão em harmônicos esféricos

$$\delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\phi - \phi') = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell} Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \tag{9.22}$$

que pode ser verificada, pois

$$f(\theta,\phi) = \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} \delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\phi-\phi')f(\theta',\phi')\, d(\cos\theta')d\phi'$$

Já que a função delta pode ser expressa em termos de harmônicos esféricos, podemos expandir do mesmo modo as funções de Green, na forma

$$\mathfrak{G}(\vec{r},\vec{r}\,') = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell} A_{\ell,m}(r,r',\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \tag{9.23}$$

onde $A_{\ell,m}(r,r',\theta',\phi')$ pode depender, em geral, de todas estas variáveis. Substituindo as expressões 9.22 e 9.23 em 9.21, obtemos

$$\nabla^2\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell} A_{\ell,m}(r,r',\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\right] = \\ -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r-r')\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell} Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

ou

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \nabla^2\left[A_{\ell,m}(r,r',\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\right] = \\ \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{-4\pi}{r^2}\delta(r-r')Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

Esta equação deve ser válida para cada valor de ℓ e m. Assim,

$$\left[\nabla^2 A_{\ell,m}(r,r',\theta',\phi')\right]Y_{\ell,m}(\theta,\phi) + A_{\ell,m}(r,r',\theta',\phi')\left[\nabla^2 Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\right] = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r-r')Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \quad (9.24)$$

Precisamos agora calcular o Laplaciando dos harmônicos esféricos. Em coordenadas esféricas, o Laplaciano é dado pela equação B.20,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

e obtemos

$$\nabla^2 Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[rY_{\ell,m}(\theta,\phi)] + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial Y_{\ell,m}(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{\ell,m}(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}$$

Os harmônicos esféricos são definidos pela expressão 6.78,

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_{\ell,m}(\cos\theta)e^{im\phi}$$

Devemos lembrar que as funções exponenciais são soluções da equação 6.49, isto é,

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0$$

e que os polinômios generalizados de Legendre são as soluções da equação generalizada de Legendre 6.57,

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0$$

aqui expressa em termos de $x = \cos\theta$. Essa equação foi derivada da expressão 6.56,

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]\Theta = 0$$

que está na variável θ e que, para nós, é mais interessante no momento. Para facilitar, os harmônicos esféricos podem ser reescritos como

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \alpha_{\ell,m}\Theta_{\ell,m}(\theta)\Phi_m(\phi) \tag{9.25}$$

onde

$$\alpha_{\ell,m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}$$

e assim, o Laplaciano fica

$$\begin{aligned}\nabla^2 Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = {} & \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[r\alpha_{\ell,m}\Theta_{\ell,m}(\theta)\Phi_m(\phi)] \\ & + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial[\alpha_{\ell,m}\Theta_{\ell,m}(\theta)\Phi_m(\phi)]}{\partial\theta}\right) \\ & + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2[\alpha_{\ell,m}\Theta_{\ell,m}(\theta)\Phi_m(\phi)]}{\partial\phi^2}\end{aligned}$$

ou, como as derivadas na parte radial são todas nulas, bem como algumas das derivadas angulares,

$$\nabla^2 Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \frac{\alpha_{\ell,m}\Phi_m(\phi)}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta_{\ell,m}(\theta)}{d\theta}\right) + \frac{\alpha_{\ell,m}\Theta_{\ell,m}(\theta)}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2\Phi_m(\phi)}{d\phi^2}$$

Agora, nos valemos do fato de que

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2\Phi$$

e que

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]\Theta = 0$$

ou seja,

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right] = -\left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]\Theta$$

para escrever

$$\nabla^2 Y_{\ell,m}(\theta,\phi) =$$
$$\frac{\alpha_{\ell,m}\Phi_m(\phi)}{r^2}\left\{-\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]\Theta_{\ell,m}(\theta)\right\}+\frac{\alpha_{\ell,m}\Theta_{\ell,m}(\theta)}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\left[-m^2\Phi_m(\phi)\right]$$

ou

$$\nabla^2 Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = -\frac{\ell(\ell+1)\alpha_{\ell,m}\Theta_{l,m}(\theta)\Phi_m(\phi)}{r^2} + \frac{m^2\alpha_{\ell,m}\Theta_{\ell,m}(\theta)\Phi_m(\phi)}{r^2\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{m^2\alpha_{\ell,m}\Theta_{\ell,m}(\theta)\Phi_m(\phi)}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}$$

ou ainda, voltando aos harmônicos esféricos, já que eles são dados pela expressão 9.25,

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \alpha_{\ell,m}\Theta_{\ell,m}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

achamos

$$\nabla^2 Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \tag{9.26}$$

Usando esta expressão na equação 9.24, obtemos

$$\left[\nabla^2 A_{\ell,m}(r,r',\theta',\phi')\right]Y_{\ell,m}(\theta,\phi) - A_{\ell,m}(r,r',\theta',\phi')\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r-r')Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

ou, cancelando o termo comum,

$$\nabla^2 A_{\ell,m}(r,r',\theta',\phi') - \frac{\ell(\ell+1)A_{\ell,m}(r,r',\theta',\phi')}{r^2} = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r-r')Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')$$

Da forma desta solução, podemos supor que a função $A_{\ell,m}(r,r',\theta',\phi')$ pode ser escrita como um produto de outras duas, na forma

$$A_{\ell,m}(r,r',\theta',\phi') = \mathfrak{f}_\ell(r,r')Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi') \tag{9.27}$$

onde $\mathfrak{f}_\ell(r,r')$ é uma função de Green "radial". Substituindo esta expressão na anterior, encontramos

$$\nabla^2\left[\mathfrak{f}_\ell(r,r')Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')\right] - \frac{\ell(\ell+1)\mathfrak{f}_\ell(r,r')Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')}{r^2} = - \frac{4\pi}{r^2}\delta(r-r')Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')$$

ou

$$\left[\nabla^2\mathfrak{f}_\ell(r,r')\right]Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi') + \mathfrak{f}_\ell(r,r')\left[\nabla^2 Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')\right] - \frac{\ell(\ell+1)\mathfrak{f}_\ell(r,r')Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')}{r^2} = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r-r')Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')$$

Como o operador Laplaciano age sobre as coordenadas sem linha, o Laplaciano de $Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')$ é nulo, e assim,

$$\left[\nabla^2\mathfrak{f}_\ell(r,r')\right]Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi') - \frac{\ell(\ell+1)\mathfrak{f}_\ell(r,r')Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')}{r^2} = - \frac{4\pi}{r^2}\delta(r-r')Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')$$

ou ainda,

$$\nabla^2\mathfrak{f}_\ell(r,r') - \frac{\ell(\ell+1)\mathfrak{f}_\ell(r,r')}{r^2} = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r-r')$$

Como a função de Green radial é função apenas das coordenadas radiais r e r', a parte do Laplaciando em esféricas B.20,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

que envolve as derivações com relação às coordenadas angulares, é nula, e assim, resta apenas

$$\nabla^2\mathfrak{f}_\ell(r,r') = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[r\mathfrak{f}_\ell(r,r')\right]$$

ou seja,

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[r\mathfrak{f}_\ell(r,r')\right] - \frac{\ell(\ell+1)\mathfrak{f}_\ell(r,r')}{r^2} = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r-r') \qquad (9.28)$$

Quando $r \neq r'$, a função delta é nula, e $\mathfrak{f}_\ell(r,r')$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[r\mathfrak{f}_\ell(r,r')\right]-\frac{\ell(\ell+1)\mathfrak{f}_\ell(r,r')}{r^2}=0$$

Escrevendo $\mathfrak{f}_\ell(r,r')$ como

$$\mathfrak{f}_\ell(r,r')=\frac{f_\ell(r,r')}{r}$$

temos

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[r\frac{f_\ell(r,r')}{r}\right]-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\frac{f_\ell(r,r')}{r}=0$$

ou

$$\frac{d^2f_\ell}{dr^2}-\frac{\ell(\ell+1)f_\ell}{r^2}=0$$

ou ainda, multiplicando esta expressão por r^2, temos

$$r^2\frac{d^2f_\ell}{dr^2}-\ell(\ell+1)f_\ell=0$$

Trata-se de uma equação de Cauchy-Euler [1] idêntica à expressão 6.53,

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}-\ell(\ell+1)R=0$$

cujas soluções são dadas pela equação 6.54, que fica, no caso em estudo,

$$f_\ell(r,r')=a_\ell r^{\ell+1}+b_\ell r^{-\ell}$$

e então, a função de Green radial fica, considerando que existe uma solução para $r>r'$ e outra para $r<r'$,

$$\mathfrak{f}_\ell(r,r')=a_\ell r^\ell+\frac{b_\ell}{r^{\ell+1}},\qquad r>r' \tag{9.29}$$

e

$$\mathfrak{f}_\ell(r,r')=a'_\ell r^\ell+\frac{b'_\ell}{r^{\ell+1}},\qquad r<r' \tag{9.30}$$

[1] Veja, por exemplo, *Equações Diferenciais Aplicadas à Física.*

Como estamos estudando um problema envolvendo condições de Dirichlet, é necessário que a função de Green se anule sobre as superfícies esféricas de raios R_1 e R_2, e para tanto, devemos fazer as funções de Green radiais se anularem em $r' = R_1$ e $r' = R_2$. Além disso, como as funções de Green representam o potencial elétrico gerado na posição $\vec{r}$ por uma carga unitária situada na posição $\vec{r}'$, elas permanecem inalteradas se intercambiarmos a posição da carga com a do ponto de observação. Isso significa que as expressões 9.29 e 9.29 podem ser escritas também em termos de r', ou seja,

$$\mathfrak{f}_\ell(r, r') = a_\ell r'^{\,\ell} + \frac{b_\ell}{r'^{\,\ell+1}}, \qquad r > r' \tag{9.31}$$

e

$$\mathfrak{f}_\ell(r, r') = a'_\ell r'^{\,\ell} + \frac{b'_\ell}{r'^{\,\ell+1}}, \qquad r < r' \tag{9.32}$$

Assim, supondo que $R_2 > R_1$ e lembrando que as cargas estão situadas dentro da coroa esférica definida por $R_1 \leq r' \leq R_2$, vemos que as funções de Green acima, tanto em termos de r como para r', em R_1 e R_2, devem se anular. Quando $r > r'$, as funções de Green se anulam se $r = R_2$ ou se $r' = R_1$. Deste modo, a expressão 9.29, em $r = R_2$, fica

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(R_2) &= 0 \\ a_\ell R_2^\ell + \frac{b_\ell}{R_2^{\ell+1}} &= 0 \\ a_\ell R_2^\ell &= -\frac{b_\ell}{R_2^{\ell+1}} \\ a_\ell &= -\frac{b_\ell}{R_2^{2\ell+1}} \end{aligned}$$

e assim, obtemos para a função de Green radial, em termos de r, para $r > r'$,

$$\mathfrak{f}_\ell(r, r') = -\frac{b_\ell}{R_2^{2\ell+1}} r^\ell + \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}}$$

ou

$$\mathfrak{f}_\ell(r, r') = b_\ell \left[\frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{r^\ell}{R_2^{2\ell+1}} \right], \qquad r > r'$$

Outro modo de a função de Green se anular quando $r > r'$ é a função de Green radial 9.31 se anular em $r' = R_1$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(R_1) &= 0 \\ a_\ell R_1^\ell + \frac{b_\ell}{R_1^{\ell+1}} &= 0 \\ \frac{b_\ell}{R_1^{\ell+1}} &= -a_\ell R_1^\ell \\ b_\ell &= -a_\ell R_1^{2\ell+1} \end{aligned}$$

e assim, a função de Green radial em termos de r' fica

$$\mathfrak{f}_\ell(r, r') = a_\ell r'^{\,\ell} - \frac{a_\ell R_1^{2\ell+1}}{r'^{\,\ell+1}}$$

ou

$$\mathfrak{f}_\ell(r, r') = a_\ell \left[r'^{\,\ell} - \frac{R_1^{2\ell+1}}{r'^{\,\ell+1}} \right], \qquad r > r'$$

Combinando as duas funções de Green para r e para r', obtemos a função de Green total para $r > r'$, ou seja,

$$\mathfrak{f}_\ell(r, r') = b_\ell \left[\frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{r^\ell}{R_2^{2\ell+1}} \right] a_\ell \left[r'^{\,\ell} - \frac{R_1^{2\ell+1}}{r'^{\,\ell+1}} \right]$$

ou

$$\mathfrak{f}_\ell(r, r') = c_\ell \left[r'^{\,\ell} - \frac{R_1^{2\ell+1}}{r'^{\,\ell+1}} \right] \left[\frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{r^\ell}{R_2^{2\ell+1}} \right], \qquad r > r'$$

Note que, nesta expressão, se $r = R_2$ ou se $r' = R_1$, a função de Green se anula, como deve ser. Vejamos agora o caso $r < r'$. A expressão indicada para r é a 9.30, que deve se anular em R_1, isto é,

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(R_1) &= 0 \\ a'_\ell R_1^\ell + \frac{b'_\ell}{R_1^{\ell+1}} &= 0 \\ \frac{b'_\ell}{R_1^{\ell+1}} &= -a'_\ell R_1^\ell \\ b'_\ell &= -a'_\ell R_1^{2\ell+1} \end{aligned}$$

e assim, a função de Green em termos de r, para $r < r'$, torna-se

$$\mathfrak{f}_\ell(r,r') = a'_\ell r^\ell - \frac{a'_\ell R_1^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}}$$

ou

$$\mathfrak{f}_\ell(r,r') = a'_\ell\left[r^\ell - \frac{R_1^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}}\right], \qquad r < r'$$

Quando $r < r'$, a função de Green em termos de r' deve se anular para $r' = R_2$, e assim, usando a expressão 9.32, temos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}(R_2) &= 0 \\
a'_\ell R_2^\ell + \frac{b'_\ell}{R_2^{\ell+1}} &= 0 \\
a'_\ell R_2^\ell &= -\frac{b'_\ell}{R_2^{\ell+1}} \\
a'_\ell &= -\frac{b'_\ell}{R_2^{2\ell+1}}
\end{aligned}$$

de modo que a função de Green resulta em

$$\mathfrak{f}_\ell(r,r') = -\frac{b'_\ell}{R_2^{2\ell+1}} r'^{\,\ell} + \frac{b'_\ell}{r'^{\,\ell+1}}$$

ou

$$\mathfrak{f}_\ell(r,r') = b'_\ell\left[\frac{1}{r'^{\,\ell+1}} - \frac{r'^{\,\ell}}{R_2^{2\ell+1}}\right], \qquad r < r'$$

e reunindo as duas funções de Green, achamos

$$\mathfrak{f}_\ell(r,r') = a'_\ell\left[r^\ell - \frac{R_1^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}}\right] b'_\ell\left[\frac{1}{r'^{\,\ell+1}} - \frac{r'^{\,\ell}}{R_2^{2\ell+1}}\right]$$

ou

$$\mathfrak{f}_\ell(r,r') = c'_\ell\left[r^\ell - \frac{R_1^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{r'^{\,\ell+1}} - \frac{r'^{\,\ell}}{R_2^{2\ell+1}}\right], \qquad r < r'$$

Observe que as duas expressões para as funções de Green radiais totais podem ser reunidas numa única, na forma

$$\mathfrak{f}_\ell(r,r') = c_\ell\left[r_<^\ell - \frac{R_1^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^\ell}{R_2^{2\ell+1}}\right] \tag{9.33}$$

onde, como sempre, $r_<$ é o menor entre r e r', e $r_>$ é o maior entre eles. Resta determinar a constante c_ℓ que aparece nesta expressão. Para isso, utilizamos a equação diferencial para $\mathfrak{f}_\ell(r,r')$, dada pela equação 9.28, ou seja,

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[r\mathfrak{f}_\ell(r,r')\right] - \frac{\ell(\ell+1)\mathfrak{f}_\ell(r,r')}{r^2} = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r-r')$$

Vamos multiplicar esta equação por r, integrá-la no intervalo $[r = r'-\Delta, r = r'+\Delta]$, onde Δ é muito pequeno, e depois, tomar o limite $\Delta \to 0$, isto é,

$$\lim_{\Delta\to 0}\left\{\int_{r'-\Delta}^{r'+\Delta}\frac{d}{dr}\left[\frac{d\big(r\mathfrak{f}_\ell(r,r')\big)}{dr}\right]dr - \int_{r'-\Delta}^{r'+\Delta}\frac{\ell(\ell+1)\mathfrak{f}_\ell(r,r')}{r}\,dr\right\} = - \lim_{\Delta\to 0}\left\{\int_{r'-\Delta}^{r'+\Delta}\frac{4\pi}{r}\delta(r-r')\,dr\right\}$$

ou

$$\lim_{\Delta\to 0}\left\{\frac{d\left[r\mathfrak{f}_\ell(r,r')\right]}{dr}\bigg|_{r'-\Delta}^{r'+\Delta}\right\} - \lim_{\Delta\to 0}\left\{\int_{r'-\Delta}^{r'+\Delta}\frac{\ell(\ell+1)\mathfrak{f}_\ell(r,r')}{r}\,dr\right\} = -\lim_{\Delta\to 0}\left\{\frac{4\pi}{r'}\right\}$$

Quando o limite é tomado na integral, os limites de integração tornam-se iguais, e a integral, por definição, se anula. Além disso, o termo do lado direito não depende de Δ, e o limite pode ser calculado. Obtemos, portanto,

$$\lim_{\Delta\to 0}\left\{\frac{d\left[r\mathfrak{f}_\ell(r,r')\right]}{dr}\bigg|_{r'+\Delta} - \frac{d\left[r\mathfrak{f}_\ell(r,r')\right]}{dr}\bigg|_{r'-\Delta}\right\} = -\frac{4\pi}{r'}$$

Para calcular as derivadas, utilizamos a expressão 9.33 para a função de Green radial. Quando $r = r'+\Delta$, $r > r'$, de modo que $r_> = r$ e $r_< = r'$. Temos, então,

$$\left.\frac{d[r\mathfrak{f}_\ell(r,r')]}{dr}\right|_{r'+\Delta} = c_\ell\left[r'^{\,\ell} - \frac{R_1^{2\ell+1}}{r'^{\,\ell+1}}\right]\left\{\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^\ell} - \frac{r^{\ell+1}}{R_2^{2\ell+1}}\right]\right\}_{r'+\Delta}$$

$$= c_\ell\left[r'^{\,\ell} - \frac{R_1^{2\ell+1}}{r'^{\,\ell+1}}\right]\left[-\frac{\ell}{r^{\ell+1}} - \frac{(\ell+1)r^\ell}{R_2^{2\ell+1}}\right]_{r'+\Delta}$$

$$\left.\frac{d[r\mathfrak{f}_\ell(r,r')]}{dr}\right|_{r'+\Delta} = -\frac{c_\ell r'^{\,\ell}}{r^{\ell+1}}\left[1 - \left(\frac{R_1}{r'}\right)^{2\ell+1}\right]\left[\ell + (\ell+1)\left(\frac{r}{R_2}\right)^{2\ell+1}\right]_{r'+\Delta}$$

ou

$$\left.\frac{d[r\mathfrak{f}_\ell(r,r')]}{dr}\right|_{r'+\Delta} =$$

$$-\frac{c_\ell r'^{\,\ell}}{(r'+\Delta)^{\ell+1}}\left[1 - \left(\frac{R_1}{r'}\right)^{2\ell+1}\right]\left[\ell + (\ell+1)\left(\frac{r'+\Delta}{R_2}\right)^{2\ell+1}\right]$$

Se $r = r' - \Delta$, $r < r'$, e $r_> = r'$, e $r_< = r$. Assim, obtemos

$$\left.\frac{d[r\mathfrak{f}_\ell(r,r')]}{dr}\right|_{r'-\Delta} = c_\ell\left\{\frac{d}{dr}\left[r^{\ell+1} - \frac{R_1^{2\ell+1}}{r^\ell}\right]\right\}_{r'-\Delta}\left[\frac{1}{r'^{\,\ell+1}} - \frac{r'^{\,\ell}}{R_2^{2\ell+1}}\right]$$

$$= c_\ell\left[(\ell+1)r^\ell - \frac{(-\ell)R_1^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}}\right]_{r'-\Delta}\left[\frac{1}{r'^{\,\ell+1}} - \frac{r'^{\,\ell}}{R_2^{2\ell+1}}\right]$$

$$\left.\frac{d[r\mathfrak{f}_\ell(r,r')]}{dr}\right|_{r'-\Delta} = \frac{c_\ell r^\ell}{r'^{\,\ell+1}}\left[\ell + 1 + \ell\left(\frac{R_1}{r}\right)^{2\ell+1}\right]_{r'-\Delta}\left[1 - \left(\frac{r'}{R_2}\right)^{2\ell+1}\right]$$

ou

$$\left.\frac{d[r\mathfrak{f}_\ell(r,r')]}{dr}\right|_{r'-\Delta} =$$

$$\frac{c_\ell(r'-\Delta)^\ell}{r'^{\,\ell+1}}\left[\ell + 1 + \ell\left(\frac{R_1}{r'-\Delta}\right)^{2\ell+1}\right]\left[1 - \left(\frac{r'}{R_2}\right)^{2\ell+1}\right]$$

Reunindo as expressões acima, temos

$$\lim_{\Delta\to 0}\left\{ -\frac{c_\ell r'^{\,\ell}}{(r'+\Delta)^{\ell+1}}\left[1-\left(\frac{R_1}{r'}\right)^{2\ell+1}\right]\left[\ell+(\ell+1)\left(\frac{r'+\Delta}{R_2}\right)^{2\ell+1}\right]\right.$$
$$\left. -\frac{c_\ell(r'-\Delta)^\ell}{r'^{\,\ell+1}}\left[\ell+1+\ell\left(\frac{R_1}{r'-\Delta}\right)^{2\ell+1}\right]\left[1-\left(\frac{r'}{R_2}\right)^{2\ell+1}\right]\right\} = -\frac{4\pi}{r'}$$

ou

$$-\frac{c_\ell r'^{\,\ell}}{r'^{\,\ell+1}}\left[1-\left(\frac{R_1}{r'}\right)^{2\ell+1}\right]\left[\ell+(\ell+1)\left(\frac{r'}{R_2}\right)^{2\ell+1}\right]$$
$$-\frac{c_\ell r'^{\,\ell}}{r'^{\,\ell+1}}\left[\ell+1+\ell\left(\frac{R_1}{r'}\right)^{2\ell+1}\right]\left[1-\left(\frac{r'}{R_2}\right)^{2\ell+1}\right] = -\frac{4\pi}{r'}$$

ou ainda,

$$c_\ell\left[1-\left(\frac{R_1}{r'}\right)^{2\ell+1}\right]\left[\ell+(\ell+1)\left(\frac{r'}{R_2}\right)^{2\ell+1}\right]$$
$$+c_\ell\left[\ell+1+\ell\left(\frac{R_1}{r'}\right)^{2\ell+1}\right]\left[1-\left(\frac{r'}{R_2}\right)^{2\ell+1}\right] = 4\pi$$

que fica

$$c_\ell\left\{\ell+(\ell+1)\left(\frac{r'}{R_2}\right)^{2\ell+1}-\ell\left(\frac{R_1}{r'}\right)^{2\ell+1}-(\ell+1)\left(\frac{r'}{R_2}\right)^{2\ell+1}\left(\frac{R_1}{r'}\right)^{2\ell+1}\right.$$
$$\left.+\ell+1-(\ell+1)\left(\frac{r'}{R_2}\right)^{2\ell+1}+\ell\left(\frac{R_1}{r'}\right)^{2\ell+1}-\ell\left(\frac{R_1}{r'}\right)^{2\ell+1}\left(\frac{r'}{R_2}\right)^{2\ell+1}\right\} = 4\pi$$

ou

$$c_\ell\left\{2\ell+1-(2\ell+1)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2\ell+1}\right\} = 4\pi$$

ou ainda,

$$c_\ell = \frac{4\pi}{(2\ell+1)\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2\ell+1}\right]} \tag{9.34}$$

Com esta expressão, obtemos, para a função de Green radial 9.33,

$$\mathfrak{f}_\ell(r,r') = \frac{4\pi}{(2\ell+1)\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2\ell+1}\right]}\left[r_<^\ell - \frac{R_1^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^\ell}{R_2^{2\ell+1}}\right] \qquad (9.35)$$

enquanto o coeficiente $A_{\ell,m}(r,r',\theta',\phi')$ da equação 9.27 se torna

$$A_{\ell,m}(r,r',\theta',\phi') = 4\pi\frac{Y_{\ell,m}^*(\theta',\phi')}{(2\ell+1)\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2\ell+1}\right]}\left[r_<^\ell - \frac{R_1^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^\ell}{R_2^{2\ell+1}}\right]$$

e finalmente, a função de Green $\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}')$, dada pela expressão 9.23, fica

$$\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}') =$$

$$4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{Y_{\ell,m}^*(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi)}{(2\ell+1)\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2\ell+1}\right]}\left[r_<^\ell - \frac{R_1^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^\ell}{R_2^{2\ell+1}}\right] \qquad (9.36)$$

que está expressa numa forma fatorada, em termos das coordenadas esféricas, onde $r_>$ é o maior entre r e r', e $r_<$ é o menor entre eles. Note que, quando $R_1 \to 0$ e $R_2 \to \infty$, esta função de Green recai na expressão 9.17, que é aquela apropriada ao caso em que não há superfícies limitantes. Quando $R_2 \to \infty$, obtemos a função de Green para o problema exterior a uma esfera, que é dada pela equação 9.18. A função de Green para um problema *interior* a uma esfera de raio R é obtida quando fazemos $R_1 \to 0$ e $R_2 = R$ nesta expressão, o que resulta em

$$\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}') = 4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{Y_{\ell,m}^*(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi)}{2\ell+1}r_<^\ell\left[\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^\ell}{R^{2\ell+1}}\right] \qquad (9.37)$$

Vamos agora estudar alguns problemas envolvendo as funções de Green 9.36 e 9.37.

Exemplo 9.5. *No exemplo 9.4, estudamos o problema de uma esfera condutora aterrada, de raio R, dentro de um anel de raio R_A, com uma carga Q distribuída sobre ele. Vejamos agora o problema inverso, de um anel dentro de uma esfera, como mostra a figura 9.7.*

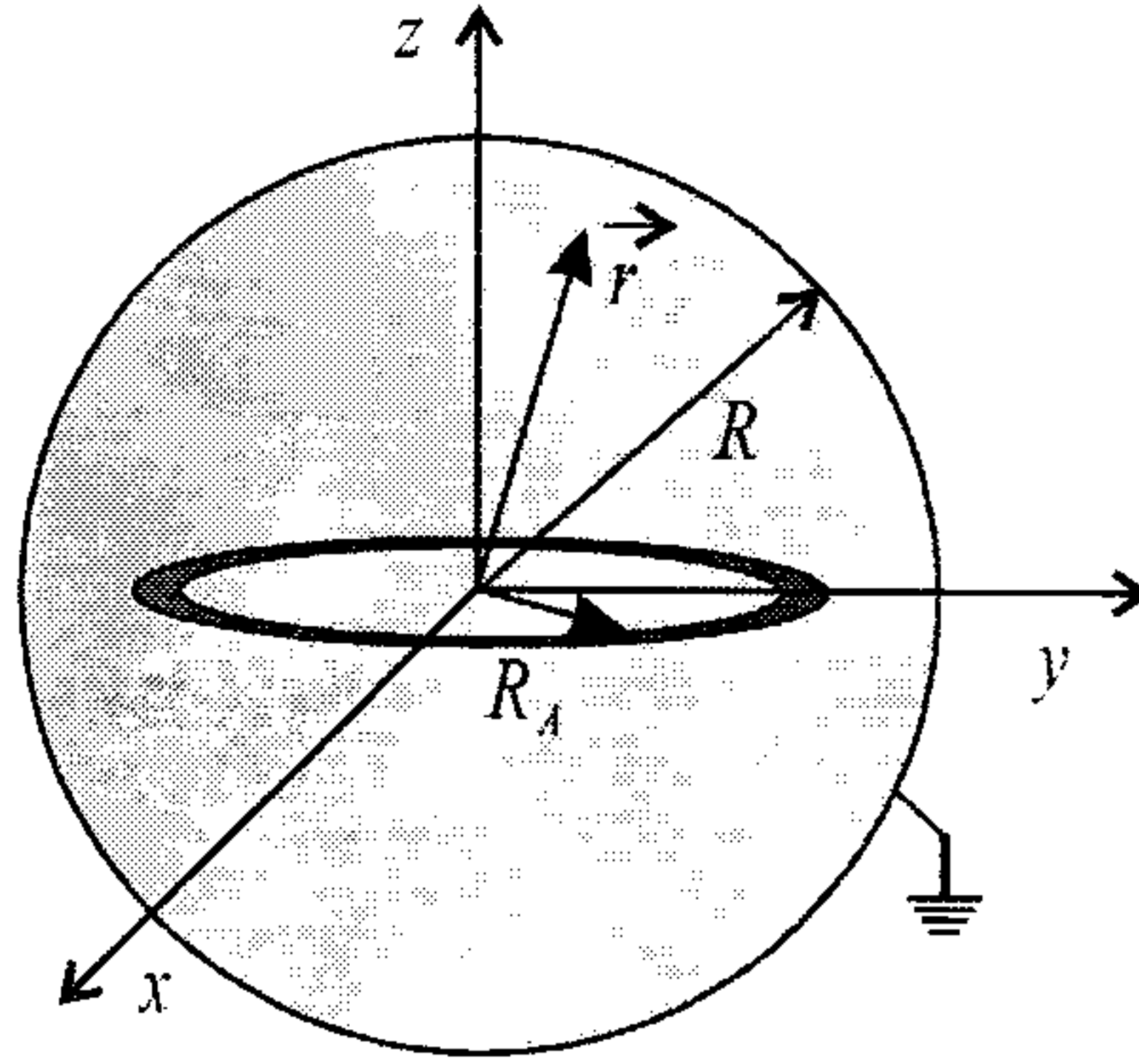



Figura 9.7: Um anel de cargas dentro de uma esfera condutora.

Para este problema, que segue as condições de contorno de Dirichlet, a função de Green indicada é dada pela expressão 9.37, na qual fazemos $R_2 = R$, que é o raio da esfera. A densidade de cargas, que é a mesma do exemplo 9.4, vale, pela equação 4.49,

$$\rho(r, \theta, \phi) = \frac{Q}{2\pi R_A^2}\delta(r - R_A)\delta(\cos\theta)$$

Além disso, o potencial elétrico é obtido mediante o uso da expressão 9.6, lembrando que a esfera está aterrada, que seu potencial é nulo e que a integral de superfície se anula. O potencial fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\mathfrak{F}_D(\vec{r}, \vec{r}\,')\, dV$$

Reunindo as expressões para a função de Green e para a densidade de cargas, temos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi R_A^2} \delta(r' - R_A)\delta(\cos\theta')$$
$$\times 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{Y_{\ell,m}^*(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi)}{2\ell+1} r_<^\ell \left[\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^\ell}{R^{2\ell+1}}\right]$$
$$\times r'^{\,2} \operatorname{sen}\theta' dr' d\theta' d\phi'$$

Trocando a ordem em que as integrais e as somatórias são feitas e introduzindo a substituição $d(\cos\theta') = -\operatorname{sen}\theta' d\theta'$, obtemos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_A^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{Y_{\ell,m}(\theta,\phi)}{2\ell+1} \int_0^R \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \delta(r' - R_A)\delta(\cos\theta')$$
$$\times Y_{\ell,m}^*(\theta',\phi') r_<^\ell \left[\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^\ell}{R^{2\ell+1}}\right] \times r')^2 dr' d(\cos\theta') d\phi'$$

Os harmônicos esféricos são dados pela expressão 6.78,

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos\theta) e^{im\phi}$$

e substituindo o harmônico esférico $Y_{\ell,m}^*(\theta',\phi')$, temos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_A^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{Y_{\ell,m}(\theta,\phi)}{2\ell+1}$$
$$\times \int_0^R \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \delta(r' - R_A)\delta(\cos\theta') \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos\theta') e^{-im\phi'}$$
$$\times r_<^\ell \left[\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^\ell}{R^{2\ell+1}}\right] r'^{\,2} dr' d(\cos\theta') d\phi'$$

A integral em ϕ' pode ser feita, e ela resulta em

$$\int_0^{2\pi} e^{-im\phi'}\, d\phi' = \left[\frac{e^{-im\phi'}}{-im}\right]_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-im\phi'}\,d\phi' = -\frac{1}{im}\left[e^{-im2\pi} - 1\right]$$
$$\int_0^{2\pi} e^{-im\phi'}\,d\phi' = 0$$

se $m \neq 0$. Quando $m = 0$, obtemos

$$\int_0^{2\pi} e^{-i.0\phi'}\,d\phi' = \int_0^{2\pi} d\phi'$$
$$= \left[\phi'\right]_0^{2\pi}$$
$$\int_0^{2\pi} e^{-im\phi'}\,d\phi' = 2\pi$$

Assim, o único valor de m que sobrevive é $m = 0$. Lembrando que $P_{\ell,0} = P_\ell$, achamos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{2\pi Q}{2\pi\epsilon_0 R_A^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{Y_{\ell,0}(\theta,\phi)}{2\ell+1}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$$
$$\times\int_0^R\int_{-1}^1 P_\ell(\cos\theta')\delta(\cos\theta')\delta(r'-R_A)r_<^\ell\left[\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^\ell}{R^{2\ell+1}}\right]r'^{\,2}dr'd(\cos\theta')$$

Além disso, pela equação 6.80,

$$Y_{\ell,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\theta)$$

e fazendo a integral em $\cos\theta'$, temos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0 R_A^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{2\ell+1}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\theta)\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$$
$$\times P_\ell(0)\int_0^R \delta(r'-R_A)r_<^\ell\left[\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^\ell}{R^{2\ell+1}}\right]r'^{\,2}dr'$$

ou, relembrando a expressão 6.70, que é

$$P_\ell(0) = \begin{cases}\frac{(-1)^{\frac{\ell}{2}}(\ell-1)!!}{2^{\frac{\ell}{2}}\frac{\ell}{2}!}, & \ell\,\text{par}\\ 0, & \ell\,\text{ímpar}\end{cases}$$

vemos que apenas os valores de ℓ par contribuem para a somatória, que pode ser escrita, considerando que $\ell \to 2\ell$, como

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_A^2}\sum_{\ell=0}^{\infty} P_{2\ell}(\cos\theta)\frac{(-1)^\ell(2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!}$$
$$\times \int_0^R \delta(r'-R_A) r_<^{2\ell}\left[\frac{1}{r_>^{2\ell+1}} - \frac{r_>^{2\ell}}{R^{4\ell+1}}\right] r'^{\,2} dr'$$

Para realizar a integral em r', consideramos inicialmente que $r_> = r$ e $r_< = r'$, e assim encontramos, para esta integral,

$$\int_0^R \delta(r'-R_A) r'^{\,2\ell}\left[\frac{1}{r^{2\ell+1}} - \frac{r^{2\ell}}{R^{4\ell+1}}\right] r'^{\,2} dr' =$$
$$\left[\frac{1}{r^{2\ell+1}} - \frac{r^{2\ell}}{R^{4\ell+1}}\right]\int_0^R \delta(r-R_A) r'^{\,2\ell+2} dr'$$

ou

$$\int_0^R \delta(r'-R_A) r'^{\,2\ell}\left[\frac{1}{r^{2\ell+1}} - \frac{r^{2\ell}}{R^{4\ell+1}}\right] r'^{\,2} dr' = \left[\frac{1}{r^{2\ell+1}} - \frac{r^{2\ell}}{R^{4\ell+1}}\right] R_A^{2\ell+2}$$

e então, o potencial para $r > r'$ é

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_A^2}\sum_{\ell=0}^{\infty} P_{2\ell}(\cos\theta)\frac{(-1)^\ell(2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!}\left[\frac{1}{r^{2\ell+1}} - \frac{r^{2\ell}}{R^{4\ell+1}}\right] R_A^{2\ell+2}$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell(2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} R_A^{2\ell}\left[\frac{1}{r^{2\ell+1}} - \frac{r^{2\ell}}{R^{4\ell+1}}\right] P_{2\ell}(\cos\theta)$$

Quando $r < r'$, temos $r_< = r$ e $r_> = r'$, e assim, a integral em r' torna-se

$$\int_0^R \delta(r'-R_A)r^{2\ell}\left[\frac{1}{r'^{\,2\ell+1}}-\frac{r'^{\,2\ell}}{R^{4\ell+1}}\right]r'^{\,2}dr' = r^{2\ell}\int_0^R \delta(r'-R_A)\left[\frac{1}{r'^{\,2\ell-1}}-\frac{r'^{\,2\ell+2}}{R^{4\ell+1}}\right]dr'$$

ou

$$\int_0^R \delta(r'-R_A)r^{2\ell}\left[\frac{1}{r'^{\,2\ell+1}}-\frac{r'^{\,2\ell}}{R^{4\ell+1}}\right]r'^{\,2}dr' = r^{2\ell}\left[\frac{1}{R_A^{2\ell-1}}-\frac{R_A^{2\ell+2}}{R^{4\ell+1}}\right]$$

$$\int_0^R \delta(r'-R_A)r^{2\ell}\left[\frac{1}{r'^{\,2\ell+1}}-\frac{r'^{\,2\ell}}{R^{4\ell+1}}\right]r'^{\,2}dr' = R_A^2 r^{2\ell}\left[\frac{1}{R_A^{2\ell+1}}-\frac{R_A^{2\ell}}{R^{4\ell+1}}\right]$$

de modo que o potencial elétrico, com esta expressão, fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_A^2}\sum_{\ell=0}^{\infty} P_{2\ell}(\cos\theta)\frac{(-1)^\ell(2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!}R_A^2 r^{2\ell}\left[\frac{1}{R_A^{2\ell+1}}-\frac{R_A^{2\ell}}{R^{4\ell+1}}\right]$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell(2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} r^{2\ell}\left[\frac{1}{R_A^{2\ell+1}}-\frac{R_A^{2\ell}}{R^{4\ell+1}}\right]P_{2\ell}(\cos\theta)$$

para o caso $r < r'$. Observe que as duas expressões podem ser reunidas numa só, que é

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell(2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} r_<^{2\ell}\left[\frac{1}{r_>^{2\ell+1}}-\frac{r_>^{2\ell}}{R^{4\ell+1}}\right]P_{2\ell}(\cos\theta)$$

sendo que $r_<$ é o menor entre r e R_A, e $r_>$ é o maior entre eles. Quando $R \to \infty$, obtemos o resultado para um anel no espaço livre, sem fronteiras, estudado no exemplo 6.9, cujo potencial elétrico é dado pelas expressões 6.75 e 6.74, como deve ser.

Exemplo 9.6. *Considere uma carga Q situada entre duas esferas condutoras aterradas de raios R_A e R_B ($R_B > R_A$), a uma distância D da origem, como*

mostra a figura 9.8. Calcule o potencial elétrico na região entre as cascas esféricas.

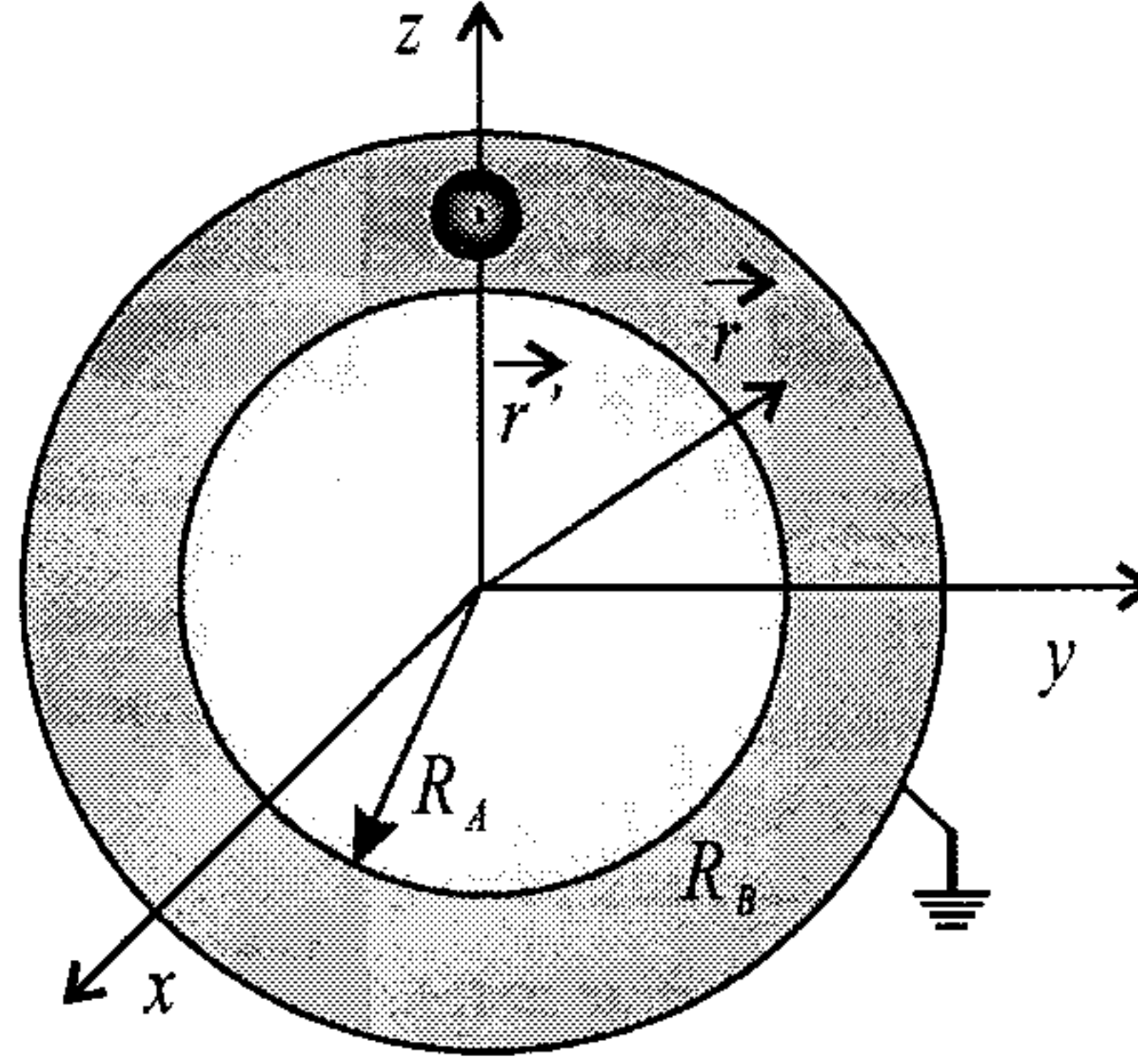



Figura 9.8: Uma carga Q situada entre duas esferas condutoras aterradas.

Para resolver este problema, precisamos usar a função de Green 9.36,

$$\mathfrak{F}(\vec{r},\vec{r}\,') =$$

$$4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi)}{(2\ell+1)\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2\ell+1}\right]} \left[r^{\ell}_{<} - \frac{R_1^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}_{<}}\right] \left[\frac{1}{r^{\ell+1}_{>}} - \frac{r^{\ell}_{>}}{R_2^{2\ell+1}}\right]$$

na equação 9.6, para obter o potencial elétrico. Nesta equação, a integral de superfície se anula, porque as duas esferas estão aterradas, e o potencial fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}\,')\mathfrak{F}_D(\vec{r},\vec{r}\,')\, dV$$

A carga está situada em $z = D$ ou, em coordenadas esféricas, no ponto $\text{P}(r = D, \theta = 0, \phi = 0)$. Assim, usando a expressão 4.41 para a função delta de Dirac em coordenadas esféricas, temos, para a densidade de cargas,

$$\rho(\vec{r}\,') = Q\delta(r' - D)\frac{\delta(\cos\theta' - \cos 0)}{r'}\frac{\delta(\phi' - 0)}{r'}$$

ou

$$\rho(\vec{r}\,') = \frac{Q}{r'^{\,2}}\delta(r' - D)\delta(\cos\theta' - 1)\delta(\phi')$$

Reunindo as expressões para a densidade de cargas e para a função de Green na equação do potencial elétrico, obtemos

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{R_A}^{R_B}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Q}{r'^{\,2}}\delta(r' - D)\delta(\cos\theta' - 1)\delta(\phi')$$

$$\times\, 4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')Y_{\ell,m}(\theta,\phi)}{(2\ell+1)\left[1-\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^{2\ell+1}\right]}\left[r_<^{\ell} - \frac{R_A^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^{\ell}}{R_B^{2\ell+1}}\right]$$

$$\times\, r'^{\,2}\,\mathrm{sen}\,\theta' dr' d\theta' d\phi'$$

ou, introduzindo $d(\cos\theta') = -\,\mathrm{sen}\,\theta'$ e trocando os sinais de integração com os das somatórias,

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{Q}{\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{Y_{\ell,m}(\theta,\phi)}{(2\ell+1)\left[1-\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^{2\ell+1}\right]}$$

$$\times\int_{R_A}^{R_B}\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\delta(r' - D)\delta(\cos\theta' - 1)\delta(\phi')Y^*_{\ell,m}(\theta',\phi')$$

$$\left[r_<^{\ell} - \frac{R_A^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^{\ell}}{R_B^{2\ell+1}}\right] dr' d(\cos\theta') d\phi'$$

As integrais angulares podem agora ser feitas, e elas resultam em

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{Q}{\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}\frac{Y_{\ell,m}(\theta,\phi)}{(2\ell+1)\left[1-\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^{2\ell+1}\right]}Y^*_{\ell,m}(0,0)$$

$$\times\int_{R_A}^{R_B}\delta(r' - D)\left[r_<^{\ell} - \frac{R_A^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^{\ell}}{R_B^{2\ell+1}}\right] dr'$$

Pela equação 6.78, os harmônicos esféricos são

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_{\ell,m}(\cos\theta)e^{im\phi}$$

e o harmônico esférico $Y^*_{\ell,m}(0,0)$ fica

$$Y^*_{\ell,m}(0,0) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_{\ell,m}(1)e^0$$

$$Y^*_{\ell,m}(0,0) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_{\ell,m}(1)$$

Se olharmos a tabela 6.3, veremos que os polinômios generalizados de Legendre $P_{\ell,m}(x)$ são nulos para $x = 1$ quando $m \neq 0$, pois sempre aparece uma função $\operatorname{sen}\theta$, que é nula em $\theta = 0$. Quando $m = 0$, o polinômio generalizado de Legendre vale 1, ou seja, $P_{\ell,0}(1) = 1$. Assim, o potencial fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{Y_{\ell,0}(\theta,\phi)}{(2\ell+1)\left[1-\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^{2\ell+1}\right]}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$$
$$\times\int_{R_A}^{R_B}\delta(r'-D)\left[r_<^{\ell}-\frac{R_A^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{r_>^{\ell+1}}-\frac{r_>^{\ell}}{R_B^{2\ell+1}}\right]dr'$$

Como, pela equação 6.80,

$$Y_{\ell,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\theta)$$

achamos

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)\left[1-\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^{2\ell+1}\right]}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}P_\ell(\cos\theta)\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$$
$$\times\int_{R_A}^{R_B}\delta(r'-D)\left[r_<^{\ell}-\frac{R_A^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{r_>^{\ell+1}}-\frac{r_>^{\ell}}{R_B^{2\ell+1}}\right]dr'$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{\left[1-\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^{2\ell+1}\right]}P_\ell(\cos\theta)$$
$$\times\int_{R_A}^{R_B}\delta(r'-D)\left[r_<^\ell-\frac{R_A^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{r_>^{\ell+1}}-\frac{r_>^\ell}{R_B^{2\ell+1}}\right]dr'$$

Para fazer a integral em r', vamos separar os casos $r > r'$ e $r < r'$. Quando $r > r'$, $r_> = r$ e $r_< = r'$, de forma que encontramos, para a integral, o valor

$$\int_{R_A}^{R_B}\delta(r'-D)\left[r'^{\,\ell}-\frac{R_A^{2\ell+1}}{r'^{\,\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{r^{\ell+1}}-\frac{r^\ell}{R_B^{2\ell+1}}\right]dr' =$$
$$\left[\frac{1}{r^{\ell+1}}-\frac{r^\ell}{R_B^{2\ell+1}}\right]\int_{R_A}^{R_B}\delta(r'-D)\left[r'^{\,\ell}-\frac{R_A^{2\ell+1}}{r'^{\,\ell+1}}\right]dr'$$

ou

$$\int_{R_A}^{R_B}\delta(r'-D)\left[r'^{\,\ell}-\frac{R_A^{2\ell+1}}{r'^{\,\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{r^{\ell+1}}-\frac{r^\ell}{R_B^{2\ell+1}}\right]dr' =$$
$$\left[\frac{1}{r^{\ell+1}}-\frac{r^\ell}{R_B^{2\ell+1}}\right]\left[D^\ell-\frac{R_A^{2\ell+1}}{D^{\ell+1}}\right]$$

e portanto, o potencial para $r > r'$ é

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left[D^\ell-\frac{R_A^{2\ell+1}}{D^{\ell+1}}\right]\frac{P_\ell(\cos\theta)}{\left[1-\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^{2\ell+1}\right]}\left[\frac{1}{r^{\ell+1}}-\frac{r^\ell}{R_B^{2\ell+1}}\right]$$

Quando $r < r'$, temos $r_< = r$ e $r_> = r'$, e assim, a integral em r' fica

$$\int_{R_A}^{R_B}\delta(r'-D)\left[r^\ell-\frac{R_A^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{r'^{\,\ell+1}}-\frac{r'^{\,\ell}}{R_B^{2\ell+1}}\right]dr' =$$
$$\left[r^\ell-\frac{R_A^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}}\right]\int_{R_A}^{R_B}\delta(r'-D)\left[\frac{1}{r'^{\,\ell+1}}-\frac{(r')^\ell}{R_B^{2\ell+1}}\right]dr'$$

ou

$$\int_{R_A}^{R_B} \delta(r' - D)\left[r^\ell - \frac{R_A^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{r'^{\,\ell+1}} - \frac{r'^{\,\ell}}{R_B^{2\ell+1}}\right] dr' = \left[r^\ell - \frac{R_A^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{D^{\ell+1}} - \frac{D^\ell}{R_B^{2\ell+1}}\right]$$

e o potencial para $r < r'$ se reduz a

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{P_\ell(\cos\theta)}{\left[1 - \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^{2\ell+1}\right]}\left[r^\ell - \frac{R_A^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{D^{\ell+1}} - \frac{D^\ell}{R_B^{2\ell+1}}\right]$$

As duas expressões para o potencial elétrico podem ser reunidas numa única, na forma

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{P_\ell(\cos\theta)}{\left[1 - \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^{2\ell+1}\right]}\left[r_<^\ell - \frac{R_A^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}}\right]\left[\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^\ell}{R_B^{2\ell+1}}\right] \qquad (9.38)$$

onde $r_<$ é o menor entre r e D, e $r_>$ é o maior entre eles. Note que, nesta expressão, fazendo $R_B \to \infty$, obtemos o potencial do problema de uma carga pontual em frente a uma esfera condutora aterrada, que já foi estudado por nós. Considerando $R_A \to 0$, temos o potencial para o problema dentro de uma esfera condutora que contém uma carga pontual no seu interior. Por fim, se $R_A \to 0$ e $R_B \to \infty$, temos uma carga no espaço livre, e o potencial se reduz, mediante o uso da expressão 6.76, a

$$\mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r} - \vec{D}|}$$

cuja demonstração é deixada como exercício (veja o exercício 9.8). Isso encerra nossa discussão sobre as funções de Green para o caso eletrostático. Para informações sobre as funções de Green em coordenadas cilíndricas, consulte, por exemplo, *Classical Electrodynamics*, de J. D. Jackson.

9.5 Exercícios

9.1 Considerando o hemisfério estudado no exemplo 9.3 e visto na figura 9.4, obtenha o potencial, em todo o espaço, para o caso $V_0 = 0$ e $V_1 = V$, sendo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad. Obtenha também o campo elétrico.

9.2 Utilizando o mesmo hemisfério do exercício anterior, resolva o problema de um hemisfério submetido aos potenciais $V_0 = -V$ e $V_1 = V$, com $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad. Calcule o potencial e o campo elétrico no eixo z e em todo o espaço, bem como a densidade de carga no hemisfério.

9.3 Uma esfera condutora de raio R tem, em seu interior, um disco de cargas com uma distribuição superficial de cargas homogênea. A esfera tem um potencial V_0 sobre sua superfície, e o disco tem raio R_D. Ache o potencial elétrico em todo o espaço.

9.4 Uma esfera de raio R, submetida a um potencial elétrico dado por $\mathbb{V}(R, \theta', \phi') = V_0 \cos\theta'$ na sua superfície tem, em seu interior, um segmento retilíneo condutor, de tamanho $2R$, com uma carga Q distribuída de forma homogênea sobre ele. O fio está situado no eixo z, a partir do qual o ângulo θ' é medido. Obtenha o potencial dentro da esfera. Obs.: utilize as funções delta para exprimir a densidade de cargas do fio, em particular as equações 4.50 e 4.51.

9.5 Ache o potencial para o problema de um anel de cargas de raio R cortado ao meio e situado perpendicularmente ao plano xy. O semi-anel tem uma carga Q distribuída de forma homogênea sobre ele.

9.6 Uma esfera condutora de raio R_1 está submetida ao potencial V_0. Essa esfera está situada dentro de outra, de raio R_2, submetida ao potencial $-V_0$, e entre elas existe um anel de cargas de raio R_A situado no plano xy, contendo uma carga total Q, distribuída de forma homogênea. Calcule o potencial elétrico na região entre as esferas.

9.7 Um dipolo pontual de momento de dipolo $\vec{p} = p_0 \hat{\mathbf{k}}$ está situado, em $\vec{r} = R\hat{\mathbf{j}}$, entre duas esferas condutoras. Sendo R_1 e R_2 os raios delas, com $R_2 > R > R_1$, obtenha o potencial elétrico entre as esferas e estude os limites:

a) $R_1 \to 0$.

b) $R_2 \to \infty$.

c) $R_1 \to 0$ ao mesmo tempo em que $R_2 \to \infty$.

Em todos os casos, compare os resultados com os já conhecidos.

9.8 Verifique que a expressão 9.38 contém os seguintes casos-limite:

a) $R_A \to 0$, carga pontual dentro de uma esfera condutora aterrada.

b) $R_B \to \infty$, carga pontual em frente a uma esfera condutora aterrada.

c) $R_A \to 0$ e $R_B \to \infty$, carga pontual no espaço livre.

9.9 Quatro cargas Q estão situadas no plano xy, formando um quadrado de lado L, cujo centro coincide com a origem. Uma esfera de raio R_1 ($R_1 < \frac{L}{2}$), condutora e aterrada, é colocada no meio do quadrado de cargas, estando seu centro também na origem. Uma segunda esfera, de raio R_2 ($R_2 > L$), também condutora, é colocada de forma concêntrica com a primeira. Sobre esta segunda esfera, o potencial vale $V(R_2, \theta, \phi) = V_0 \operatorname{sen} 2\theta \cos 3\phi$. Ache o potencial elétrico em todo o espaço e estude os limites:

a) $R_1 \to 0$.

b) $R_2 \to \infty$.

c) $R_1 \to 0$ ao mesmo tempo em que $R_2 \to \infty$.

d) $Q \to 0$.

e) $V_0 \to 0$.

Capítulo 10

Campos Elétricos, II: Meios Dielétricos

Até agora estudamos campos e potenciais elétricos no vácuo ou em meios condutores perfeitos. Entretanto, na prática, todos os meios, mesmo os melhores condutores, não são perfeitos. De fato, falando rigorosamente, toda porção de matéria, não importando o tipo específico de elementos químicos que a forma, apresenta um caráter isolante, que pode ser mais ou menos pronunciado, quando ela é submetida a um potencial ou campo elétrico externos. No caso dos metais, esse caráter isolante é fraco, ao passo que em plásticos, vidros, etc. ele é bastante importante. Isso levanta duas questões. A primeira: como é o campo elétrico dentro de um material dielétrico submetido a um campo externo aplicado? E a segunda: como é o campo elétrico produzido por um dielétrico? Essas perguntas serão respondidas em seguida, mas, desde já, podemos adiantar que as diferenças existentes nas expressões para as grandezas eletrostáticas no vácuo, em condutores perfeitos ou em dielétricos, são pequenas em muitos casos. De fato, já poderíamos esperar isso, basicamente por dois motivos. Em primeiro lugar, até o momento procuramos desenvolver detalhadamente toda a teoria, concentrando-nos apenas em meios condutores perfeitos ou no vácuo, os quais, rigorosamente falando, não existem. Assim, teríamos feito um grande trabalho sem nenhuma utilidade e precisaríamos partir do zero novamente, o que não parece muito lógico.

Em segundo lugar, em todas as expressões aparece a constante de permissividade elétrica ϵ_0 associada ao vácuo. Seria ilógico ressaltar a existência dessa constante para o vácuo, que a rigor é imaterial, se as outras substâncias materiais também não tivessem uma permissividade elétrica ϵ associada. Na

verdade, em muitas situações importantes, toda a teoria desenvolvida até o momento pode ser aplicada, bastando apenas mudar a constante ϵ_0 pela permissividade elétrica do meio dielétrico desejado. Vejamos então o que ocorre com um material quando um campo elétrico externo é aplicado sobre ele.

10.1 Visão Microscópica Qualitativa dos Dielétricos

Antes de estudar os materiais dielétricos quantitativamente, vamos discutir fisicamente os processos que ocorrem nesses materiais quando eles são submetidos a um campo elétrico externo.

Do ponto de vista microscópico, um dielétrico sob a ação de um campo externo está sujeito a uma combinação de dois fatores: os momentos de dipolo intrínsecos dos constituintes do dielétrico podem ser orientados na direção do campo externo, ou então, se o material não tem dipolos intrínsecos, o campo externo pode provocar o aparecimento de dipolos elétricos induzidos. Vejamos separadamente cada um destes fatores.

Quando um campo elétrico externo age sobre um dielétrico formado por constituintes que possuem dipolos elétricos intrínsecos, como ocorre com a água, esses dipolos sofrem a ação de forças elétricas, o que causa torques que tendem a orientar os vetores momento de dipolo na mesma direção e sentido que o do campo externo aplicado (veja as seções 4.5 e 4.6), fazendo com que a energia potencial de interação seja minimizada. Esta orientação, porém, em geral não é perfeita, porque sofre também a influência da temperatura do sistema, que tende a perturbar o alinhamento, introduzindo um fator entrópico. A figura 10.1 apresenta uma configuração possível para um material dielétrico submetido a um campo elétrico externo.

A grandeza termodinâmica que deve ser minimizada é a energia livre de Helmholtz, ou potencial de Helmholtz, se houver um reservatório de temperatura ou banho térmico em contato com o sistema, o que é normalmente o caso. O potencial de Helmholtz é escrito, em termos de variáveis termodinâmicas, como

$$F = U - TS$$

onde U é a energia interna, T é a temperatura, e S, a entropia do sistema. Quando $T = 0$, $F = U$, e temos um problema atérmico, para o qual basta minimizar a energia interna do sistema.

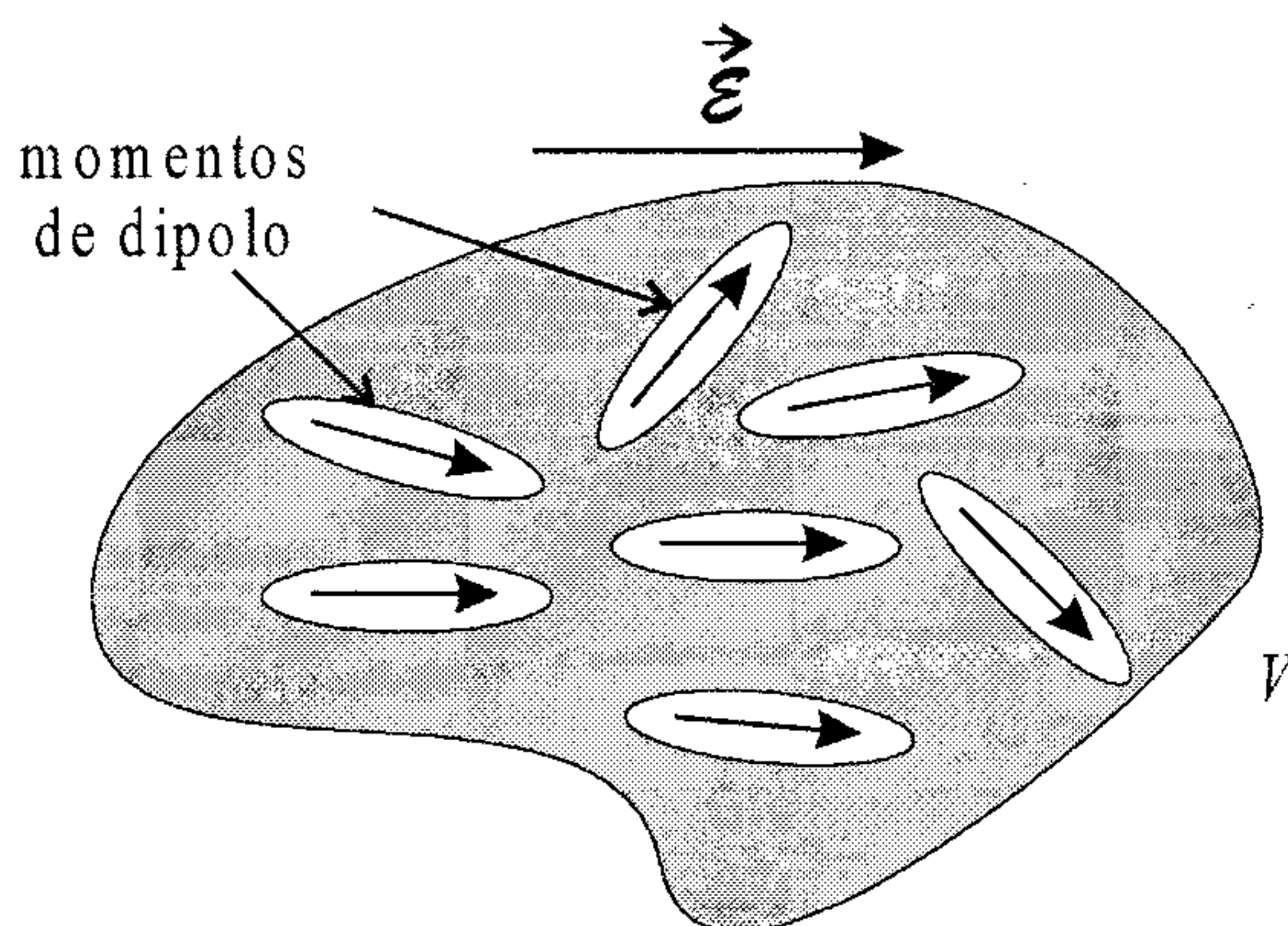



Figura 10.1: Material dielétrico formado por dipolos intrínsecos sob a ação de um campo elétrico externo.

Como conseqüência do alinhamento parcial dos vetores momento de dipolo na direção e sentido do campo externo aplicado, aparece, em cada volume V do material, onde V é pequeno o suficiente para ser tratado como infinitesimal do ponto de vista macroscópico, mas grande o suficiente para conter vários momentos de dipolo microscópicos (V é conhecido como volume mesoscópico), um momento de dipolo microscópico resultante $\Delta\vec{p}$, que é a soma dos momentos de dipolo individuais, ou seja,

$$\Delta\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$$

É conveniente dividir esta grandeza pelo volume V, para obter uma outra, que é independente do tamanho desse volume, conhecida como *polarização elétrica*, ou *polarização*, $\vec{\mathcal{P}}$, dada por

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{V}\sum_i \vec{p}_i \tag{10.1}$$

Note que, antes de o campo elétrico ser aplicado, os momentos de dipolo estavam orientados aleatoriamente, e assim, $\vec{\mathcal{P}} = 0$. Quando o campo elétrico é ligado, os dipolos se orientam, produzindo um $\vec{\mathcal{P}} \neq 0$. A unidade da polarização é $\mathrm{C/m^2}$, já que a unidade do momento de dipolo é C.m.

Os dipolos, ao se orientarem na direção e sentido do campo elétrico externo, produzem eles próprios um campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}_d$ macroscópico resultante, que é a soma vetorial dos campos elétricos gerados por cada dipolo. O campo

elétrico de um dipolo é mais intenso na região central entre as duas cargas que o compõe, e, pela equação 4.30, discutida logo antes da seção 4.6, nessa região o campo elétrico tem sentido oposto ao do vetor momento de dipolo, o que significa que o campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}_d$, que é a soma dos campos elétricos dos dipolos, é orientado, principalmente, na direção do campo externo, mas no sentido oposto, o que diminui o valor do campo elétrico macroscópico dentro do dielétrico. Quando isso ocorre, os próprios dipolos são atingidos, pois sua orientação é devida ao campo elétrico total que age sobre eles, e assim, o campo produzido por eles afeta e é afetado sucessivamente pelo campo externo, até que se chega à situação de equilíbrio entre o campo externo e o campo $\vec{\mathcal{E}}_d$ produzido pelos dipolos. Mesmo na situação de equilíbrio, e isto é importante, o campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}_{\text{int}}$ macroscópico dentro do dielétrico é menor do que o campo externo. Esta situação é apresentada na figura 10.2. Note que o campo elétrico que atua sobre um dipolo individual não é o campo macroscópico $\vec{\mathcal{E}}$ ou $\vec{\mathcal{E}}_{\text{int}}$, e sim um campo elétrico microscópico molecular $\vec{\mathcal{E}}_m$, que será discutido em maiores detalhes na seção 10.4. Vamos agora verificar o que ocorre com os dielétricos formados por constituintes que não possuem momentos de dipolo intrínsecos.

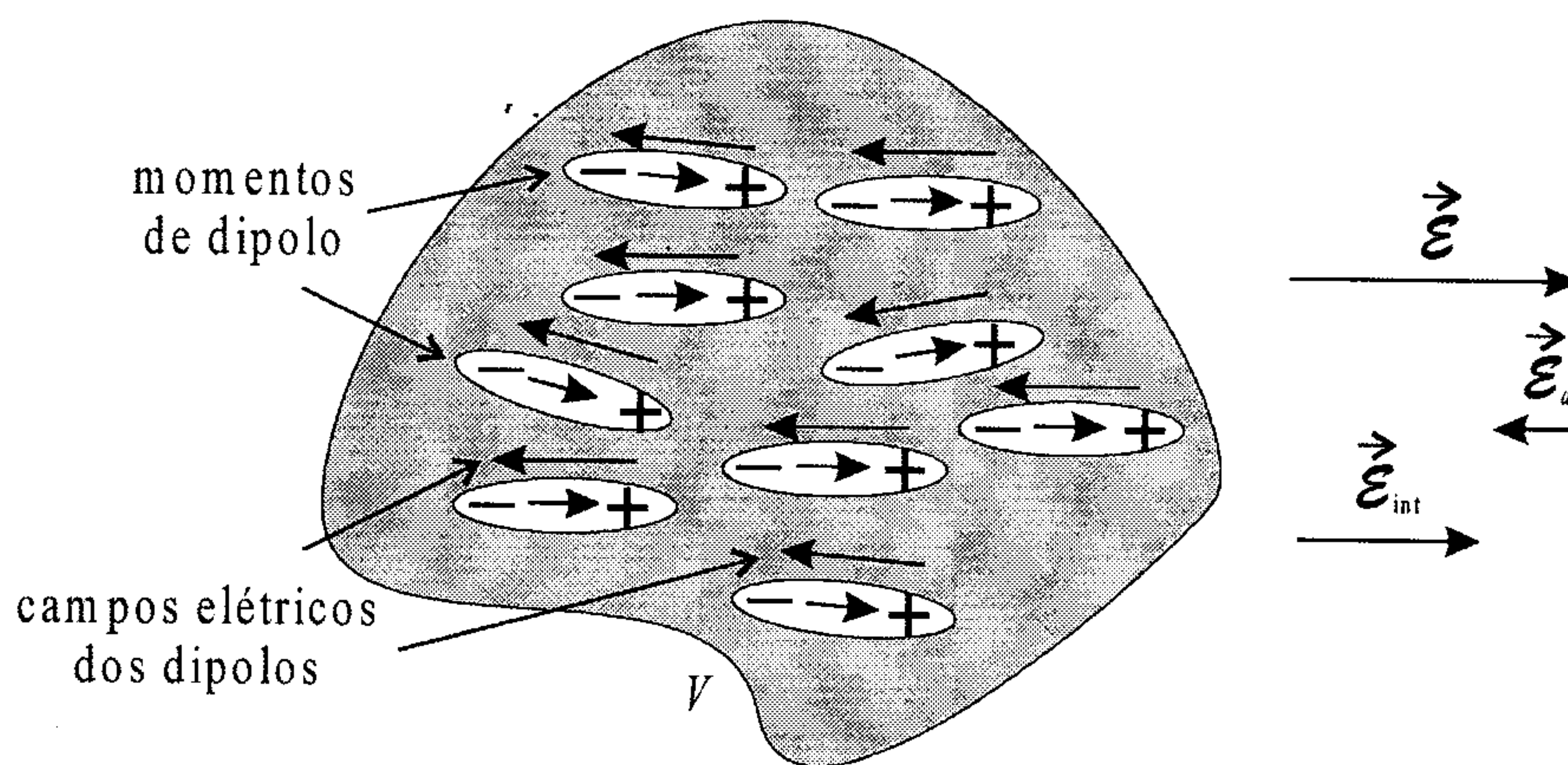



Figura 10.2: Dielétrico formado por dipolos intrínsecos sob a ação de um campo elétrico externo $\vec{\mathcal{E}}$, e formação do campo elétrico dos dipolos $\vec{\mathcal{E}}_d$ e do campo total interno macroscópico $\vec{\mathcal{E}}_{\text{int}}$.

Um material dielétrico que não possui momentos de dipolo intrínseco também pode sofrer a influência de campos elétricos externos. Isso porque,

apesar de não ter moléculas ou outros constituintes polares, ele é formado por apolares, nos quais o centro "geométrico" das cargas positivas coincide com o centro das cargas negativas, como na figura 10.3, desde que o campo elétrico externo esteja desligado.

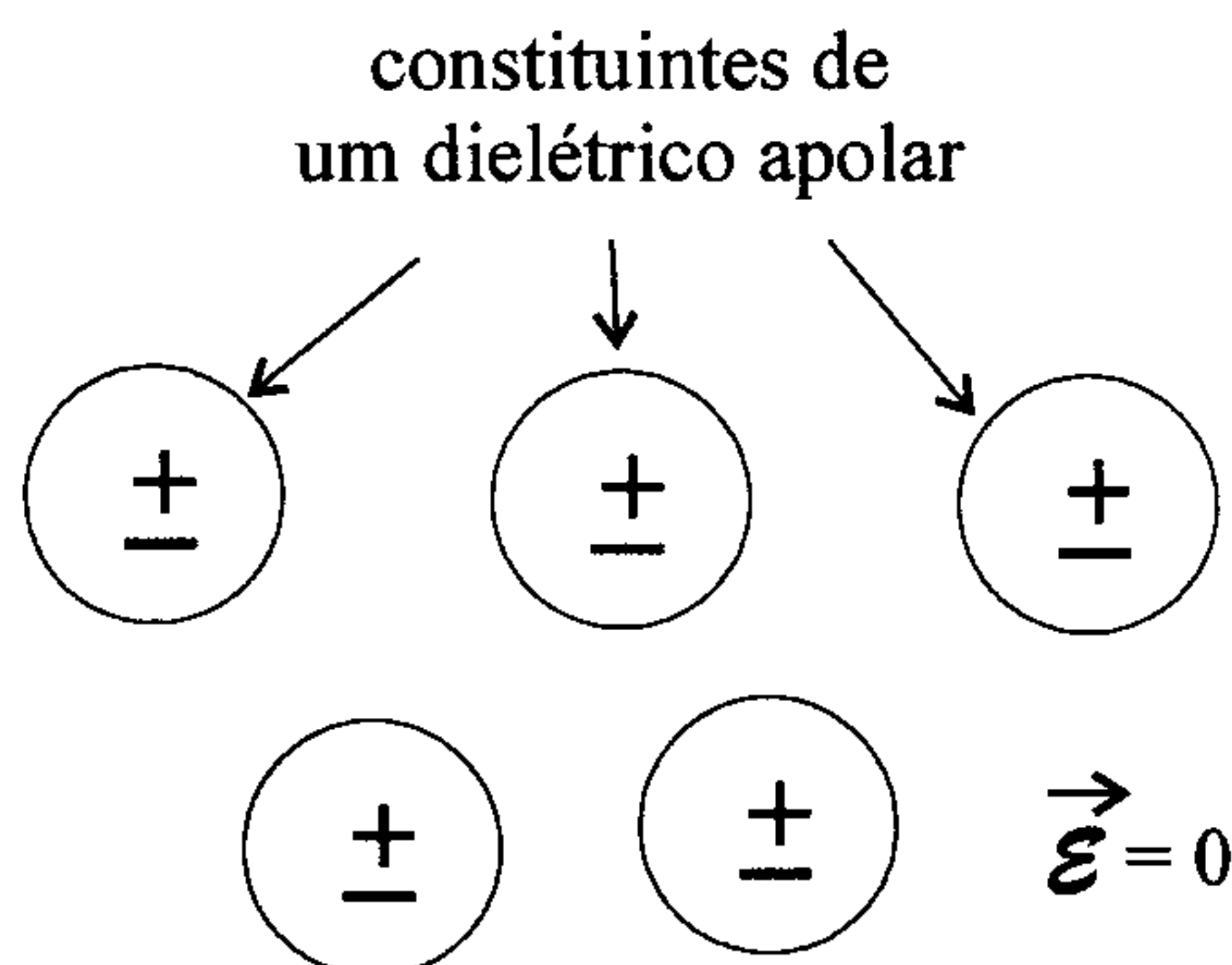



Figura 10.3: Constituintes apolares de um dielétrico sem momentos de dipolo intrínseco.

Quando o campo externo é ligado, as cargas negativas e positivas, que antes estavam, em média, na mesma posição, sofrem a ação do campo elétrico e da força elétrica por ele causada, de modo que eles se separam por uma certa distância. Essa separação não aumenta indefinidamente, porque também existe a força elétrica entre as cargas, que, afinal, é o fator responsável pela existência das moléculas do dielétrico. Assim, é como se cada molécula fosse "esticada", estando as cargas negativas unidas às positivas por uma "mola" microscópica, como pode ser visto na figura 10.4.

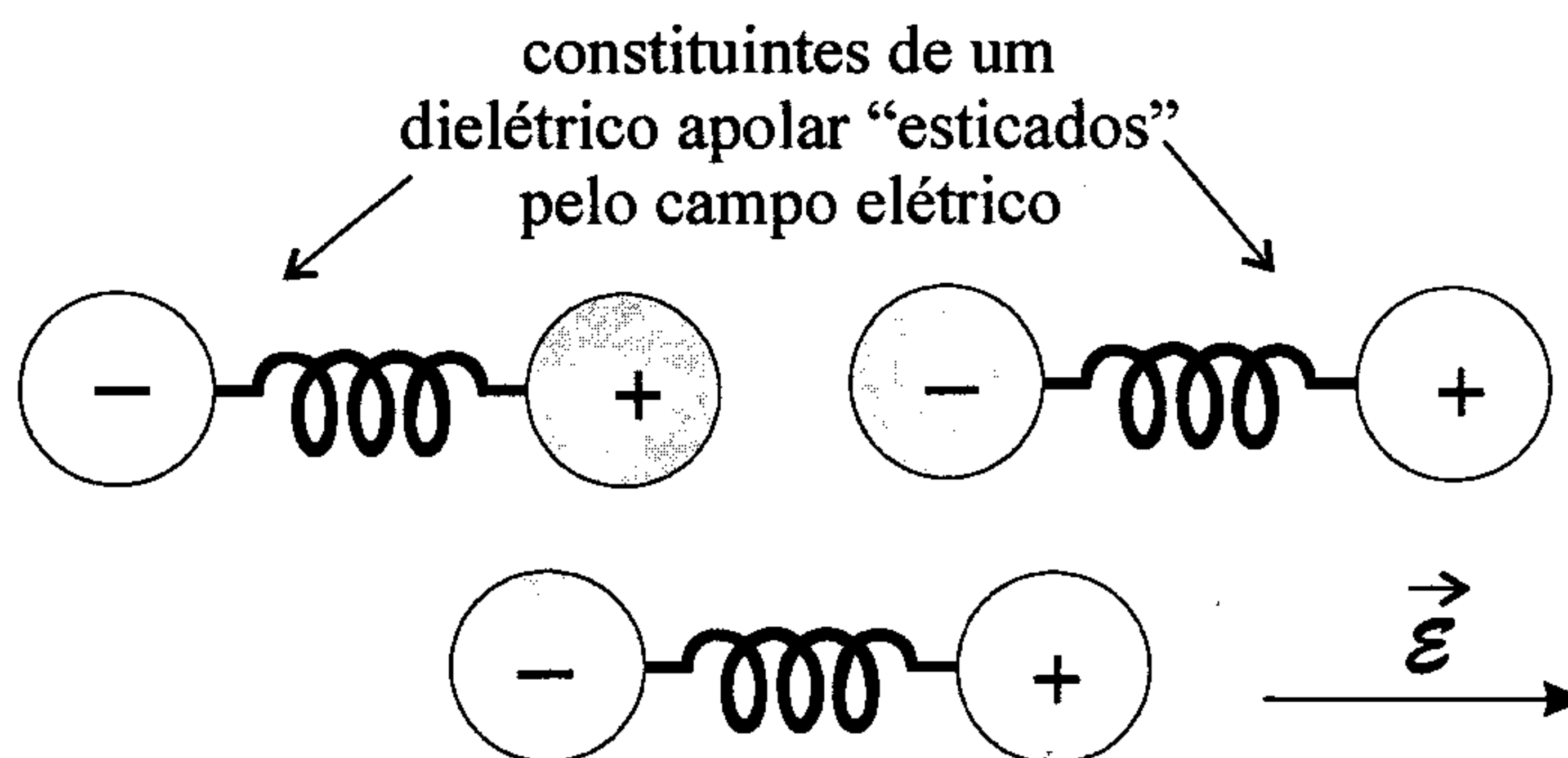



Figura 10.4: Dielétrico apolar sujeito a um campo externo não-nulo.

Quando o campo externo é novamente desligado, as "molas" fazem com que as cargas voltem a ficar situadas no mesmo lugar. Quanto maior o campo externo, mais distendidas ficam as molas, e se o campo for muito grande, as moléculas são partidas, como ocorre com uma mola submetida a um esforço muito grande, e o material pode ser destruído.

É fácil perceber, da figura 10.4, que o campo externo induz a formação de dipolos elétricos, chamados, por esse motivo, de dipolos induzidos. Os vetores momento de dipolo dos dipolos se orientam na mesma direção e sentido que o do campo externo, e assim, aparece uma polarização $\vec{\mathcal{P}}$, da mesma forma como no caso dos dipolos intrínsecos. De fato, após a formação dos dipolos induzidos, os dois processos se assemelham muito, porque, como o campo elétrico produzido pelos dipolos é mais intenso na direção do vetor momento de dipolo, mas no sentido contrário, aparece um campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}_d$ macroscópico devido aos dipolos, orientado na direção contrária à do campo externo, e desse modo, o campo total macroscópico $\vec{\mathcal{E}}_{\text{int}}$ dentro do dielétrico fica menor do que o campo externo, da mesma forma como ocorre quando os dipolos são intrínsecos. Como, em geral, as substâncias são formadas por constituintes polares e apolares, o campo elétrico externo aplicado orienta os dipolos intrínsecos na direção e sentido do campo externo, além de produzir dipolos induzidos, que também se orientam da mesma forma que o campo externo. Esta orientação dos dipolos, todavia, significa que o campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}_d$ gerado por eles é mais intenso na mesma direção, só que no sentido oposto, do campo externo, o que produz um campo elétrico macroscópico $\vec{\mathcal{E}}_{\text{int}}$ menor do que $\vec{\mathcal{E}}$ dentro do dielétrico. Esta é uma descrição qualitativa bastante boa para o comportamento dos dielétricos em presença de um campo elétrico externo, desde que ele não seja muito intenso. Quando ele é, a rigidez dielétrica do material pode ser quebrada, e ele passa de dielétrico a condutor, como ocorre com o ar próximo ao pára-raios em dias de tempestade, o que foi discutido no exemplo 6.3, na explicação que inicia na página 346. Assim, estaremos limitados a campos elétricos não muito intensos. Outro fato a ressaltar é que, como todos os materiais são formados por átomos, moléculas, etc., todos eles respondem ao campo elétrico externo. No entanto, nos condutores, as "molas" que seguram os elétrons aos íons positivos são muito fracas e podem ser facilmente rompidas, o que já não ocorre nos isolantes, em que as ligações são bastante fortes. As ligações nos metais, chamadas ligações metálicas, pertencem ao primeiro caso, enquanto as ligações covalentes e iônicas estão entre os do segundo.

Uma explicação mais completa do que a apresentada passa, necessariamente, por conceitos de Mecânica Quântica. Entretanto, podemos ter uma idéia do processo, considerando a figura 10.5, que representa os potenciais elétricos produzidos pelos íons positivos pertencentes a um material sólido que possui um certo ordenamento cristalino.

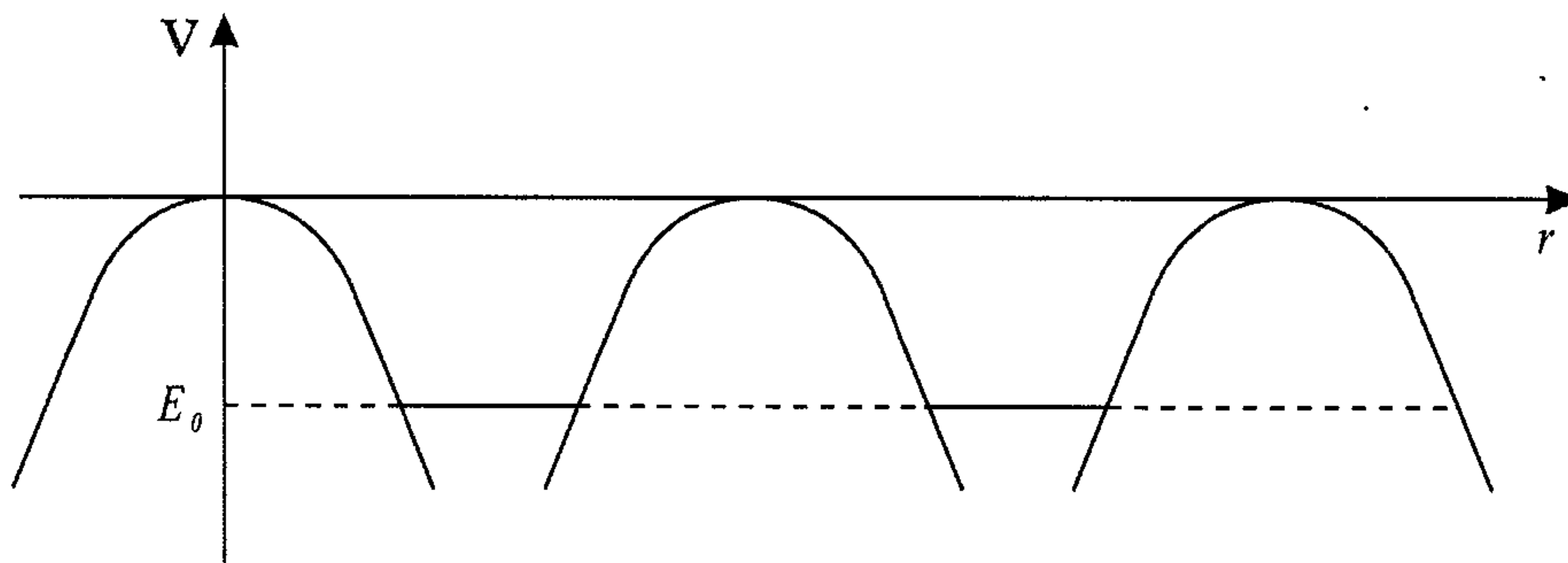



Figura 10.5: Poços de potencial característicos de materiais cristalinos.

Os elétrons do material estão "amarrados" ou "presos" dentro dos poços de potencial, sendo que o "fundo" do poço é representado pela energia E_0. Quanto mais "raso" o poço, menor a energia necessária para tirar os elétrons de dentro dele, e assim, campos elétricos extremamente fracos são suficientes para fornecer esta pequena energia, o que faz com que o material se comporte como um bom condutor. Se o poço for "profundo", é preciso muita energia para tirar os elétrons de dentro dele, e o campo elétrico deve ter uma intensidade um pouco maior, o que caracteriza um material isolante. Se o campo for intenso, os elétrons são arrancados dos poços de potencial, o que corresponde a quebrar a rigidez dielétrica do material, fazendo com que ele se torne condutor. Para maiores esclarecimentos sobre estes processos, consulte livros de Estado Sólido, Estrutura da Matéria e Mecânica Quântica, alguns dos quais estão listados nas referências bibliográficas.

Estudada qualitativamente a influência de um campo externo num material dielétrico, o próximo passo seria o estudo quantitativo desse efeito. Antes, porém, é importante verificar o campo elétrico produzido por um material dielétrico.

10.2 Campo Elétrico de um Dielétrico

Vamos considerar inicialmente um material dielétrico que preenche todo o espaço. Esse material pode ser dividido em elementos de volume ΔV me-

soscópicos, isto é, infinitesimais do ponto de vista macroscópico, mas grandes o suficiente para conter várias moléculas de dielétrico. Em cada um desses volumes existe uma densidade volumétrica de cargas reais ρ, e uma polarização elétrica $\vec{\mathcal{P}}$, que é, pela equação 10.1, o momento de dipolo total (intrínseco ou induzido) $\Delta\vec{p}$ dentro do volume ΔV, dividido por ΔV. Considerando que ΔV é bem pequeno, cada um desses volumes produz uma certa contribuição para o potencial elétrico gerado pelo dielétrico, e a soma destas parcelas produz o potencial elétrico total. O potencial elétrico gerado no ponto $\vec{r}$ pelo elemento de volume ΔV situado em $\vec{r}\,'$ é dado pela soma de um termo referente à carga que existe dentro do volume ΔV, dado por $\rho(\vec{r}\,')\Delta V$, com outro que está associado ao momento de dipolo total $\Delta\vec{p} = \vec{\mathcal{P}}\Delta V$. Assim, usando as equações 5.14 e 5.33, temos

$$\Delta\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}\,')\Delta V}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{\mathcal{P}}\Delta V)\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

ou

$$\Delta\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{\vec{\mathcal{P}}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]\Delta V$$

A soma de todas as contribuições dá o potencial elétrico total. Tratando ΔV como infinitesimal, temos

$$\mathbb{V}(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \left[\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]dV$$

A expressão 5.9 é

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

sendo que o operador ∇ age sobre as coordenadas $\vec{r}$, sem linha. Entretanto, queremos que ele atue sobre as coordenadas $\vec{r}\,'$, e neste caso, temos

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = -\nabla'\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] \tag{10.2}$$

cuja demonstração é deixada como exercício (veja o exercício 10.1). Uma vez obtida esta equação, a expressão 5.9 fica

$$\nabla'\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

que, substituída na equação do potencial, resulta em

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \left\{ \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')\cdot\nabla'\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]\right\} dV$$

Agora, temos que

$$\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')\cdot\nabla'\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\nabla'\cdot\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')$$

Integrando os dois lados desta expressão no volume V, obtemos

$$\int_V \nabla'\cdot\left[\frac{\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] dV = \int_V \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')\cdot\nabla'\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] dV + \int_V \frac{\nabla'\cdot\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV$$

ou

$$\int_V \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')\cdot\nabla'\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] dV = \int_V \nabla'\cdot\left[\frac{\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] dV - \int_V \frac{\nabla'\cdot\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV$$

O teorema do divergente 1.54 estabelece que

$$\int_V \nabla\cdot\vec{B}\, dV = \oint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, dA$$

e assim, podemos reescrever o primeiro termo do lado direito da penúltima equação como

$$\int_V \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')\cdot\nabla'\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] dV = \oint_S \frac{\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')\cdot\hat{n}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dA - \int_V \frac{\nabla'\cdot\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV$$

onde S é a superfície que delimita o volume V. Agora, voltando à equação do potencial elétrico, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\vec{r}) = {} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')\cdot\hat{n}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dA - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\nabla'\cdot\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV \qquad (10.3)\end{aligned}$$

Nesta expressão, os termos $\vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n}$ e $-\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}$ têm unidades, respectivamente, de carga por unidade de área e carga por unidade de volume. Além disso, eles são funções escalares derivadas da polarização $\vec{\mathcal{P}}$. Por causa disso, vamos definir a densidade volumétrica de carga de polarização $\rho_{\mathcal{P}}$, dada por

$$\rho_{\mathcal{P}} = -\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} \tag{10.4}$$

associada à maior ou menor homogeneidade da polarização dentro do volume V, e também a densidade superficial de carga de polarização $\sigma_{\mathcal{P}}$, através de

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n} \tag{10.5}$$

que está ligada à componente da polarização em S orientada na direção normal à superfície. Essa densidade superficial existe apenas nas superfícies que formam os contornos do dielétrico. Em termos destas quantidades, o potencial elétrico 10.3 pode ser escrito alternativamente como

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dA + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho_{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV \tag{10.6}$$

onde fica claro que as contribuições para o potencial elétrico vêm da carga real líquida dentro do dielétrico, representada por ρ, da carga volumétrica de polarização, associada a $\rho_{\mathcal{P}}$, e da superfície S que delimita o dielétrico, ligada à densidade de carga superficial $\sigma_{\mathcal{P}}$. No caso em estudo, em que o dielétrico preenche todo o espaço, não existe superfície, ou ela pode ser considerada infinita. Assim, o termo de superfície na expressão 10.3 se anula e podemos reunir as duas integrais de volume em uma só, ou seja,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \left\{\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{\nabla'\cdot\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right\}dV$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,') - \nabla'\cdot\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV$$

ou ainda, usando a equação 10.4,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,') + \rho_{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV$$

Vamos comparar esta expressão com a equação 5.12 para o potencial elétrico no vácuo.

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV$$

Da comparação, vemos que elas são idênticas, se entendermos a grandeza $\rho(\vec{r}\,') - \nabla' \cdot \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,') = \rho(\vec{r}\,') + \rho_{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')$ como sendo uma densidade de cargas "efetiva". Com essa densidade de cargas, a primeira lei de Maxwell 4.14 na forma diferencial fica

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho - \nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}}{\epsilon_0}$$

que pode ser reescrita como

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \rho - \nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}$$

ou

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} = \rho$$

ou ainda,

$$\nabla \cdot \left[\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}\right] = \rho$$

A grandeza entre colchetes é conhecida como *deslocamento elétrico* $\vec{\mathcal{D}}$, isto é,

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}} \qquad (10.7)$$

Observe que o deslocamento elétrico $\vec{\mathcal{D}}$ tem a mesma unidade que a polarização $\vec{\mathcal{P}}$, dada em C/m^2, e ela é diferente da unidade do campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}$. Assim, embora o deslocamento elétrico esteja associado ao campo elétrico, ele não é um campo elétrico. Com esta definição, temos

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho \qquad (10.8)$$

que é a primeira lei de Maxwell, agora válida para qualquer meio, escrita em termos do deslocamento elétrico. Para retornarmos ao campo elétrico, devemos notar que, no vácuo, $\vec{\mathcal{P}} = 0$, e assim,

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}$$

Analogamente, num meio qualquer, caracterizado por uma permissividade elétrica ϵ, a relação entre $\vec{\mathcal{D}}$ e $\vec{\mathcal{E}}$ fica, então,

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}} \tag{10.9}$$

e assim, a primeira lei de Maxwell 10.8 pode ser escrita como

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{\mathcal{E}} = \rho$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon} \tag{10.10}$$

Note que a única diferença entre as expressões 4.14 e 10.10 é a constante ϵ, que caracteriza o meio. Assim, a lei de Gauss 4.12, que é a primeira lei de Maxwell escrita na forma integral, fica, simplesmente,

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{Q}{\epsilon} \tag{10.11}$$

ou, em termos do deslocamento elétrico,

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{D}} \cdot \hat{n}\, dA = Q \tag{10.12}$$

Aqui vale lembrar que Q é a carga total líquida dentro de uma superfície gaussiana S_G que delimita um volume V dentro do dielétrico. Além disso, reunindo a expressão 10.10,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

com a relação 5.17,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla \mathbb{V}$$

percebemos que o potencial elétrico satisfaz a equação

$$\nabla \cdot [-\nabla \mathbb{V}] = \frac{\rho}{\epsilon}$$

ou

$$\nabla^2 \mathbb{V} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

que é a equação de Poisson 6.1, apenas com ϵ no lugar de ϵ_0. Por fim, quando não há cargas livres no volume V, $\rho = 0$ e a equação de Poisson torna-se a equação de Laplace 6.2,

$$\nabla^2 \mathbb{V} = 0$$

A conclusão é que toda a teoria e todos os resultados obtidos até agora para o vácuo ou para meios perfeitamente condutores ficam completamente idênticos quando estamos dentro de um meio dielétrico infinito, que preenche todo o espaço, bastando apenas substituir ϵ_0, a permissividade elétrica do vácuo, por ϵ, a permissividade do dielétrico.

Os resultados anteriores são muito importantes, porque esclarecem que a diferença entre um meio dielétrico infinito, o vácuo e um condutor perfeito é mínima e se reduz a uma simples constante. De fato, esses resultados vão além disso. A lei de Gauss 10.11 relaciona o campo elétrico produzido sobre uma superfície gaussiana S_G com as cargas Q situadas dentro do volume V do dielétrico delimitado por essa superfície gaussiana S_G. As cargas situadas fora de S_G não contribuem em nada nesta equação. Assim, ela, na realidade, independe do tamanho do dielétrico, ou da condição de ele ser finito ou infinito. Ou seja, ela permanece válida para um meio dielétrico infinito ou para um dielétrico de volume V finito e é absolutamente geral. Para facilitar o entendimento dessa aparentemente surpreendente conclusão, vamos considerar a figura 10.6, que apresenta uma superfície gaussiana S_G dentro de um dielétrico qualquer.

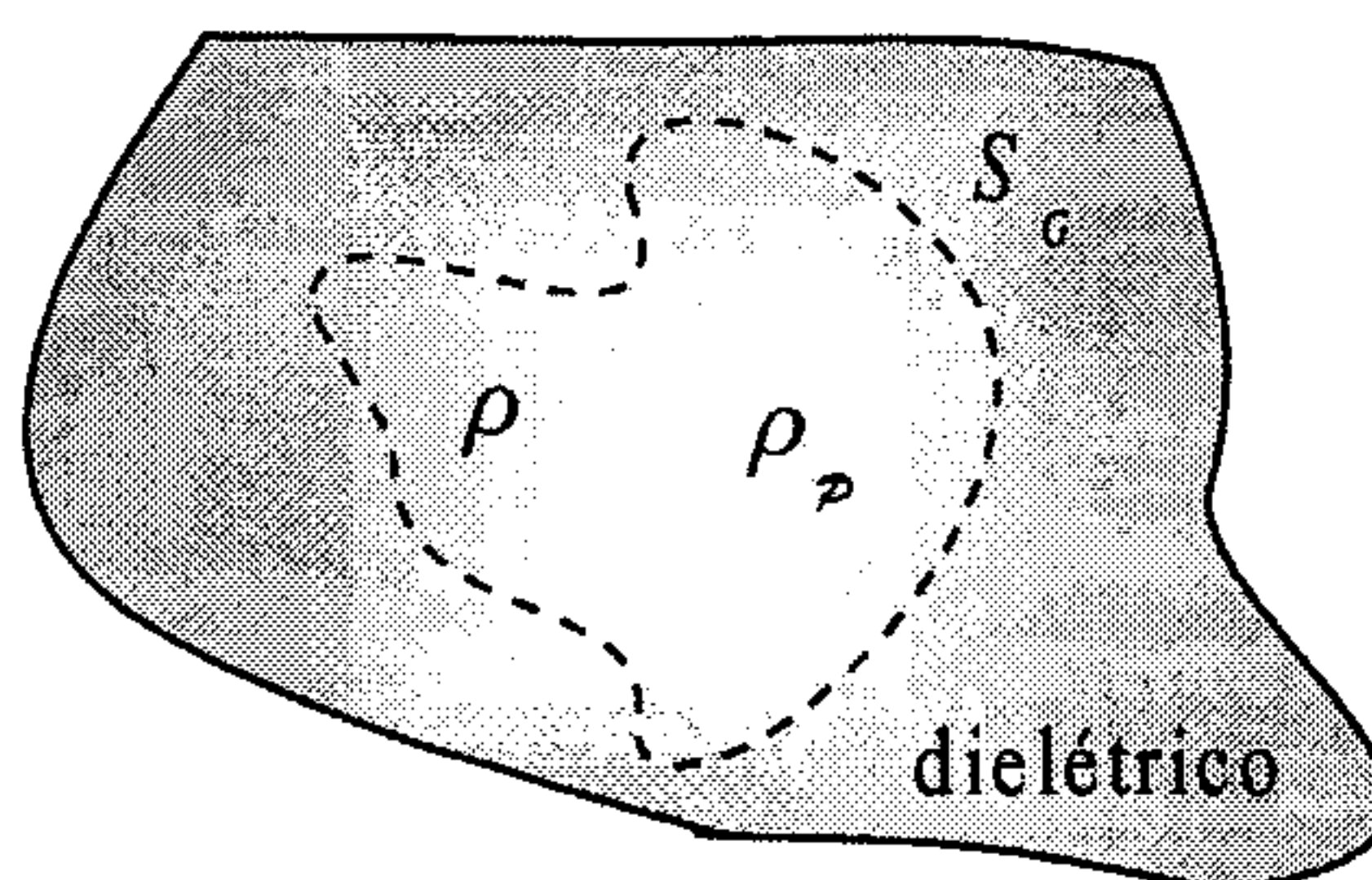



Figura 10.6: Uma superfície gaussiana S_G dentro de um dielétrico.

A lei de Gauss 4.12 usual para este caso é

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{Q + Q_{\mathcal{P}}}{\epsilon_0} \tag{10.13}$$

onde Q é a carga líquida real dentro da superfície gaussiana S_G, e $Q_{\mathcal{P}}$ é a carga total de polarização dentro de S_G. Esta expressão pode ser reescrita como

$$\epsilon_0 \oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = Q + Q_{\mathcal{P}}$$

A carga total de polarização dentro de S_G é obtida mediante o uso das expressões 10.4 e 10.5, que são, respectivamente,

$$\rho_{\mathcal{P}} = -\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}$$

que é a densidade volumétrica de cargas de polarização, e

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n}$$

que é a densidade superficial de cargas de polarização, existente nos contornos do dielétrico. A carga total de polarização pode ser calculada mediante a soma da integral da densidade volumétrica de cargas $\rho_{\mathcal{P}}$ em todo o volume V, definido pela superfície S_G, com a integral de superfície de $\sigma_{\mathcal{P}}$ sobre S_G. No entanto, S_G é uma superfície gaussiana, não uma fronteira real do dielétrico, e não contribui para o cálculo. Assim, a carga total de polarização dentro do volume V é dada apenas pela integral de volume de $\rho_{\mathcal{P}}$, isto é,

$$Q_{\mathcal{P}} = \int_V \rho_{\mathcal{P}}\, dV = -\int_V \nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}\, dV$$

Aplicando o teorema do divergente à integral acima, obtemos, por meio de uma manipulação matemática,

$$Q_{\mathcal{P}} = -\oint_{S_G} \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n}\, dA$$

De posse desta expressão, a lei de Gauss inicial fica

$$\epsilon_0 \oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = Q - \oint_{S_G} \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n}\, dA$$

ou

$$\oint_{S_G} \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA + \oint_{S_G} \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n}\, dA = Q$$

ou, reunindo as duas integrais numa só,

$$\oint_{S_G} \left[\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}\right] \cdot \hat{n}\, dA = Q$$

Com a definição 10.7 para o deslocamento elétrico,

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}$$

obtemos

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{D}} \cdot \hat{n}\, dA = Q$$

que é a lei de Gauss em termos do deslocamento elétrico, dada pela expressão 10.12. Com a utilização da relação entre o deslocamento elétrico e o campo elétrico definida pela equação 10.9, encontramos

$$\oint_{S_G} \epsilon \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = Q$$

ou

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{Q}{\epsilon}$$

que é a expressão 10.11 para a lei de Gauss no dielétrico envolvendo o campo elétrico. Note que esta expressão depende apenas da carga real Q, enquanto na equação 10.13, que é

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{Q + Q_{\mathcal{P}}}{\epsilon_0}$$

aparecem as cargas reais e as de polarização. A substituição de ϵ_0 por ϵ faz com que as cargas de polarização sejam incluídas implicitamente nesta constante. Portanto, dentro de um dielétrico qualquer, o campo elétrico pode ser calculado mediante a equação 10.11. E para uma generalização ainda maior, esta equação também serve para calcular o campo elétrico produzido

pelo dielétrico fora dele. Para demonstrar isso, partimos novamente da lei de Gauss 4.12 usual, que é

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{Q + Q_{\mathcal{P}}}{\epsilon_0}$$

onde agora S_G é uma superfície gaussiana que envolve todo o dielétrico, como indica a figura 10.7.

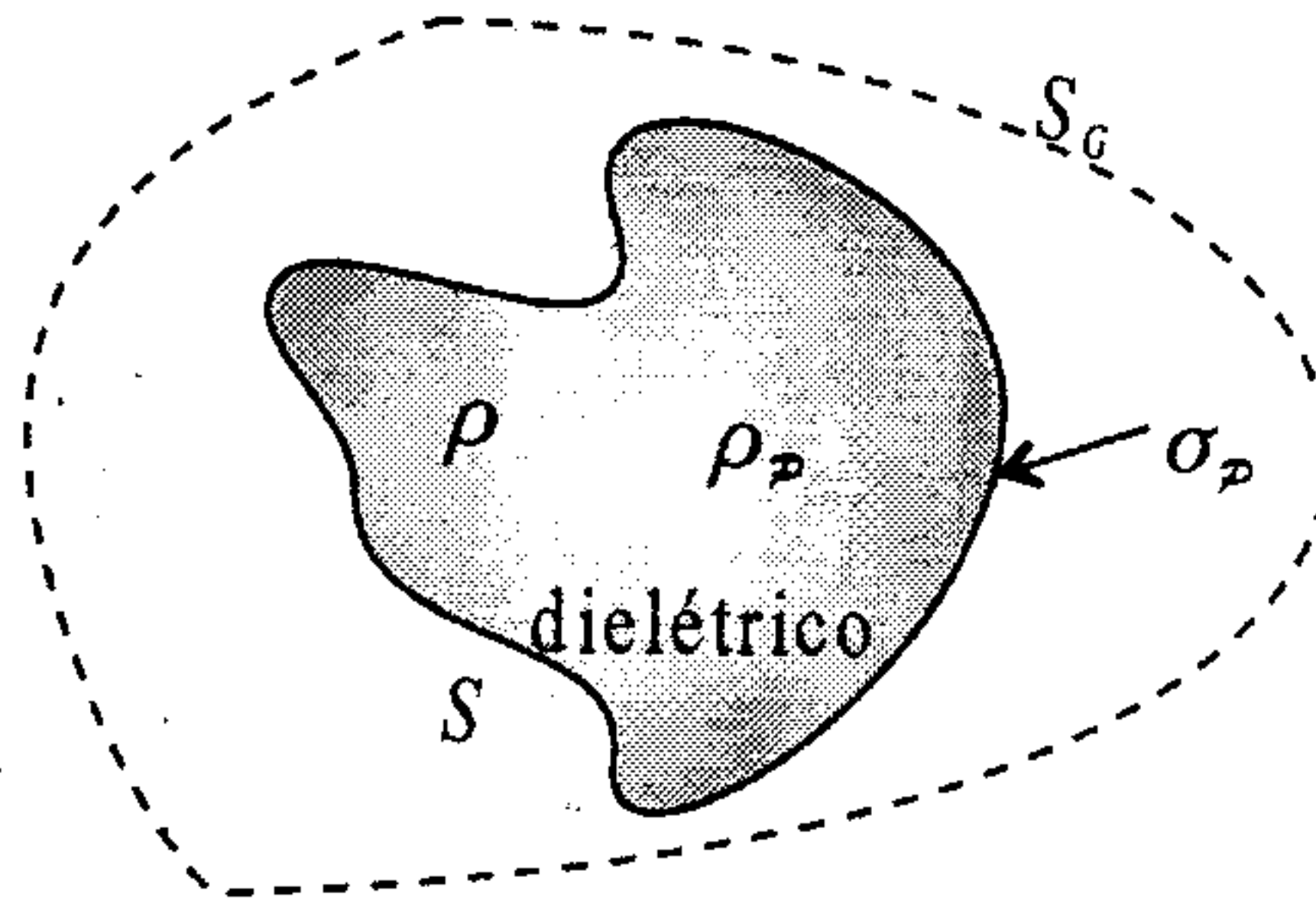



Figura 10.7: Superfície gaussiana S_G envolvendo um dielétrico por inteiro.

A lei de Gauss pode ser reescrita como

$$\epsilon_0 \oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = Q + Q_{\mathcal{P}}$$

sendo que, agora, a carga de polarização é dada por

$$Q_{\mathcal{P}} = \int_V \rho_{\mathcal{P}}\, dV + \oint_S \sigma_{\mathcal{P}}\, dA$$

pois existe uma superfície de contorno do dielétrico dentro da superfície gaussiana [1]. Utilizando as definições 10.4 e 10.5 para as densidades de carga de polarização, achamos

$$Q_{\mathcal{P}} = -\int_V \nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}\, dV + \oint_S \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n}\, dA$$

O teorema do divergente pode ser usado para transformar qualquer uma dessas integrais, e o resultado é independente da escolha que fizermos. Optando por transformar a primeira, encontramos

[1] A superfície gaussiana novamente não contribui para a integral.

$$Q_{\mathcal{P}} = -\oint_S \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n}\, dV + \oint_S \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n}\, dA$$

ou

$$Q_{\mathcal{P}} = 0$$

o que já era esperado, pois Q_P é a carga total induzida no dielétrico pelos processos de polarização discutidos na seção anterior, e, é claro, nenhum desses processos cria cargas do nada, apenas ocorre a formação ou orientação dos dipolos microscópicos. Assim, a lei de Gauss fica

$$\epsilon_0 \oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = Q$$

ou

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

ou ainda, como estamos fora do dielétrico, no vácuo, onde $\vec{\mathcal{P}} = 0$, e $\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}$,

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{D}} \cdot \hat{n}\, dA = Q$$

que é novamente a expressão 10.12. Sua contrapartida diferencial é a equação 10.8,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho$$

e ambas representam a primeira lei de Maxwell do Eletromagnetismo, mesmo para o caso de campos dependentes do tempo, como veremos oportunamente, e elas têm uma validade extremamente geral.

De fato, devemos ressaltar esta conclusão. A primeira lei de Maxwell do Eletromagnetismo, dada pelas equações 10.8 ou 10.12, é apenas uma forma de descrever, em linguagem matemática, o fato físico mais fundamental de que as cargas elétricas são geradoras de campo elétrico. Esse fato físico não muda, estejam as cargas paradas ou em movimento, e sejam os campos gerados por elas estáticos ou dependentes do tempo.

A lei de Gauss é particularmente útil em problemas que exibem alto grau de simetria, como os que foram estudados na seção 4.4. Para um caso geral, ela pode não ser muito eficaz. Devemos, então, utilizar a equação 10.3,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')\cdot\hat{n}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dA - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\nabla'\cdot\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV$$

para o potencial elétrico no ponto $\vec{r}$, que é válida para qualquer situação, dentro ou fora do dielétrico. Obtemos o campo elétrico desta expressão mediante o gradiente negativo, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V}(\vec{r})$$

ou, utilizando as definições para as densidades de carga de polarização,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \nabla\left[\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]dV - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \nabla\left[\frac{\sigma_{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]dA - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \nabla\left[\frac{\rho_{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]dV$$

Os operadores agem apenas sobre as funções das coordenadas $\vec{r}$, e assim, temos

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]dV - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \sigma_{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]dA - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho_{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]dV$$

Usando a equação 5.9, que é

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

achamos

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho_{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \sigma_{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dA \quad (10.14)$$

que é o campo elétrico em qualquer ponto do espaço, dentro ou fora do dielétrico. Vejamos agora alguns exemplos envolvendo os conceitos estudados até o momento.

Exemplo 10.1. *Considere uma barra de seção reta retangular, de lados a e b e comprimento L, como mostra a figura 10.8. Essa barra é feita de um material dielétrico de permissividade ϵ, e ela possui uma polarização dada por*

$$\vec{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_0 z\,\hat{\mathbf{k}}$$

onde $\mathcal{P}_0 > 0$. Encontre as densidades de carga de polarização e a carga total de polarização.

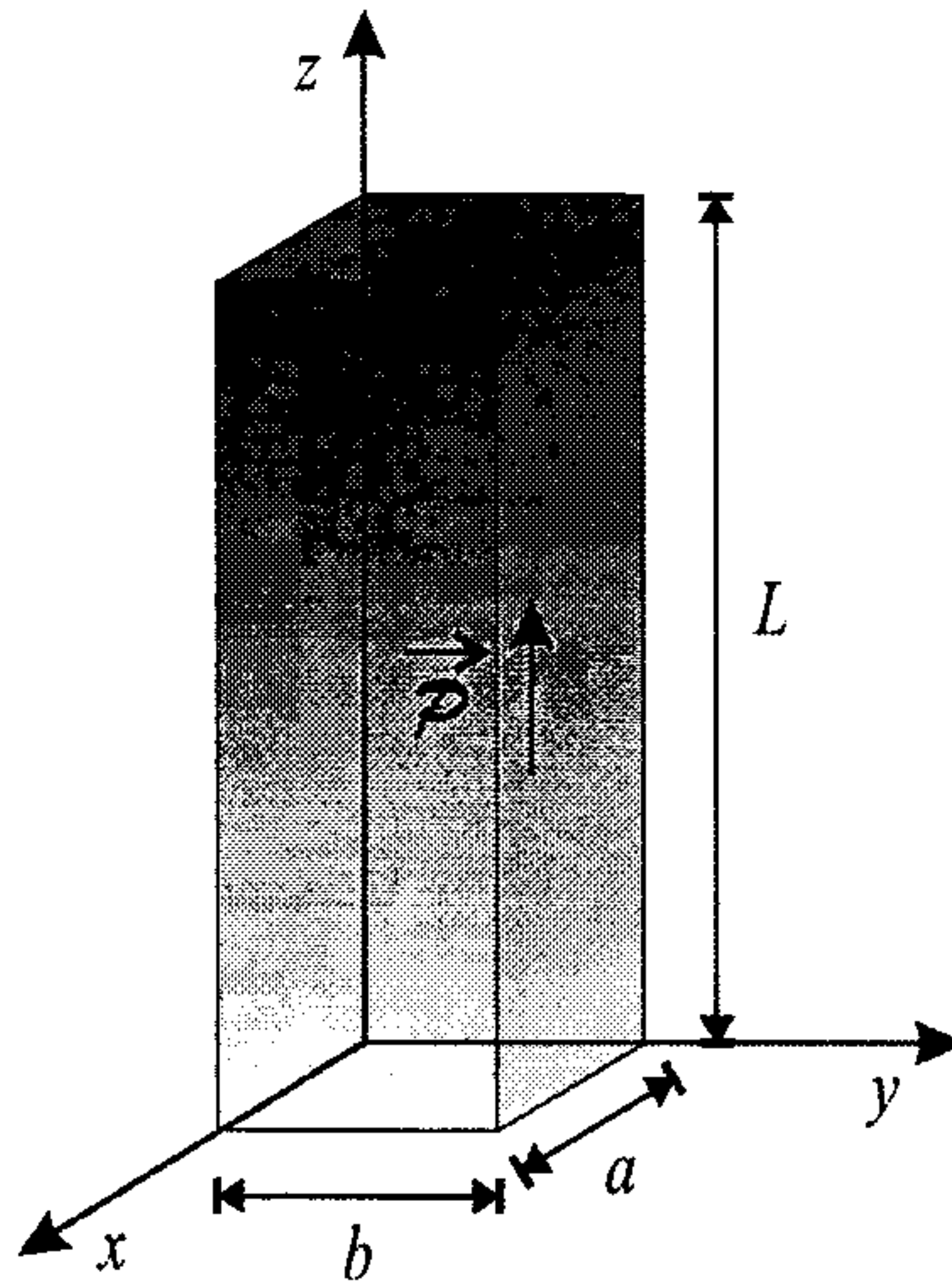



Figura 10.8: Barra retangular dielétrica de tamanho L e permissividade ϵ.

A densidade volumétrica de carga de polarização é obtida através da equação 10.4, isto é,

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{P}} &= -\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} \\ &= -\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \mathcal{P}_0 z\,\hat{\mathbf{k}} \\ \rho_{\mathcal{P}} &= -\mathcal{P}_0 \end{aligned}$$

e a carga de polarização devida à densidade volumétrica torna-se

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{P}_V} &= \int_V \rho_{\mathcal{P}}\, dV \\ Q_{\mathcal{P}_V} &= -\int_V \mathcal{P}_0\, dV \end{aligned}$$

$$Q_{\mathcal{P}_V} = -\mathcal{P}_0 \int_V dV$$
$$Q_{\mathcal{P}_V} = -\mathcal{P}_0 abL$$

A densidade superficial de carga de polarização pode ser encontrada mediante a equação 10.5, e devemos atentar para o fato de que existem seis superfícies na barra. Assim, iniciando com a superfície no plano xy com $z = 0$, temos $\hat{n} = -\hat{\mathbf{k}}$, e então,

$$\sigma_{\mathcal{P}}(z = 0) = -\mathcal{P}_0.0\,\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}$$
$$\sigma_{\mathcal{P}}(z = 0) = 0$$

A superfície no plano xy com $z = L$ tem como versor normal $\hat{n} = \hat{\mathbf{k}}$, e a sua densidade superficial é

$$\sigma_{\mathcal{P}}(z = L) = \mathcal{P}_0 L\,\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}$$
$$\sigma_{\mathcal{P}}(z = L) = \mathcal{P}_0 L$$

A superfície no plano xz, com y=0, tem um versor normal $\hat{n} = -\hat{\mathbf{j}}$, e assim,

$$\sigma_{\mathcal{P}}(y = 0) = -\mathcal{P}_0 z\,\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{j}}$$
$$\sigma_{\mathcal{P}}(y = 0) = 0$$

Da mesma forma, o versor normal à superfície em $y = b$ vale $\hat{n} = \hat{\mathbf{j}}$, e desse modo,

$$\sigma_{\mathcal{P}}(y = b) = \mathcal{P}_0 z\,\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{j}}$$
$$\sigma_{\mathcal{P}}(y = b) = 0$$

Por fim, as superfícies no plano yz têm normais $\hat{n} = -\hat{\mathbf{i}}$, em $x = 0$, e $\hat{n} = \hat{\mathbf{i}}$, em $x = a$. As densidades superficiais ficam

$$\sigma_{\mathcal{P}}(x = 0) = -\mathcal{P}_0 z\,\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}}$$
$$\sigma_{\mathcal{P}}(x = 0) = 0$$

e

$$\sigma_{\mathcal{P}}(x = a) = \mathcal{P}_0 z\,\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}}$$
$$\sigma_{\mathcal{P}}(x = a) = 0$$

A carga superficial de polarização pode ser obtida mediante a integral de superfície das densidades superficiais de carga de polarização. Como a única densidade superficial não-nula ocorre no plano em $z = L$, temos

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{P}_S} &= \int_S \sigma_{\mathcal{P}}(z = L)\, dA \\ &= \int_S \mathcal{P}_0 L\, dA \\ &= \mathcal{P}_0 L \int_S dA \\ Q_{\mathcal{P}_S} &= \mathcal{P}_0 Lab \end{aligned}$$

A carga total de polarização é a soma das cargas de polarização volumétrica e superficial, ou seja,

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{P}} &= Q_{\mathcal{P}_V} + Q_{\mathcal{P}_S} \\ &= -\mathcal{P}_0 Lab + \mathcal{P}_0 Lab \\ Q_{\mathcal{P}} &= 0 \end{aligned}$$

e assim, a carga total de polarização é nula, como deve ser.

Exemplo 10.2. *Uma esfera dielétrica descarregada de raio R e permissividade ϵ tem uma polarização $\vec{\mathcal{P}}$ uniforme, orientada no sentido positivo do eixo z, como mostra a figura 10.9. Calcule as densidades de carga de polarização e o campo elétrico dentro da esfera, no eixo z.*

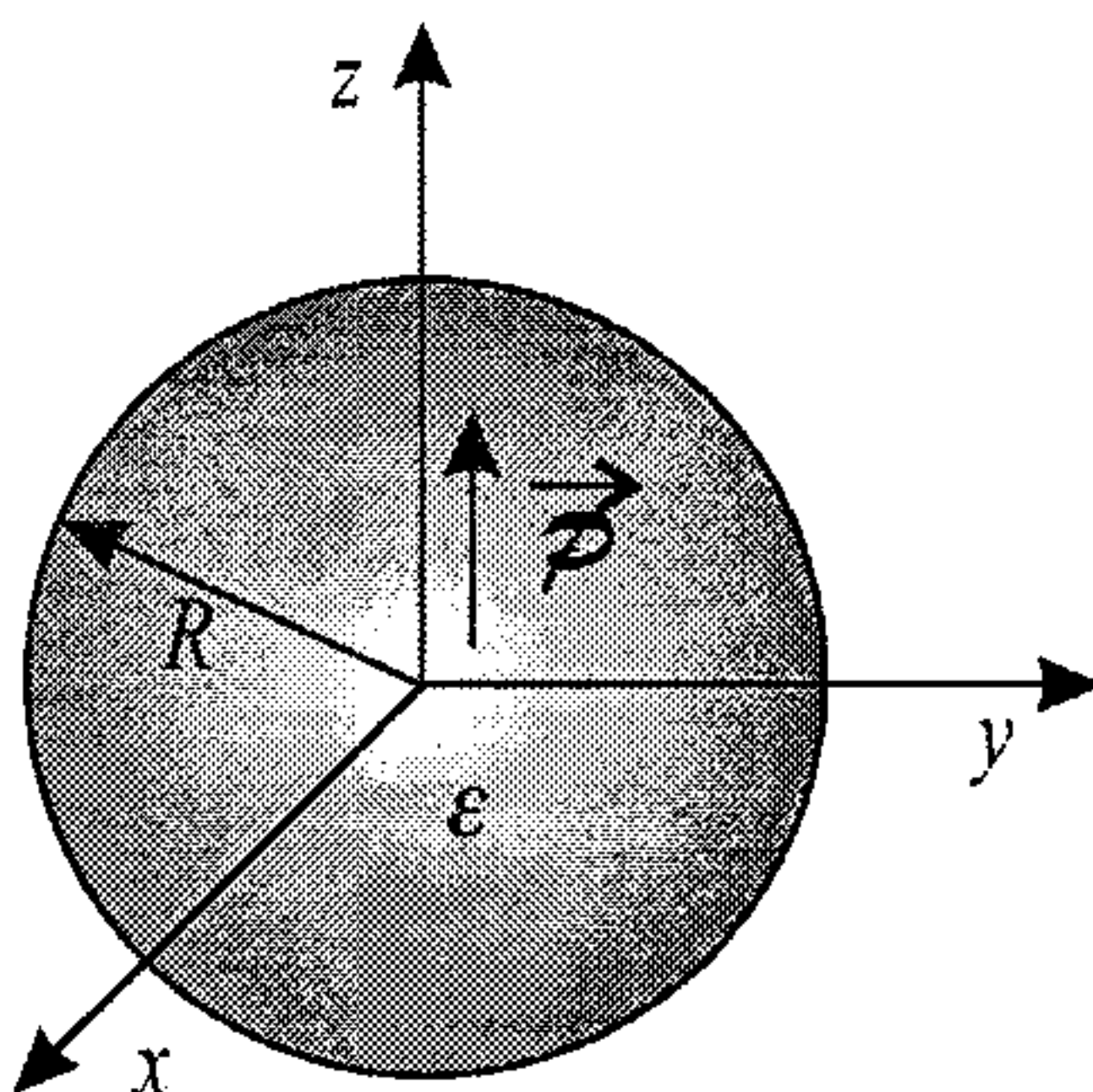



Figura 10.9: Esfera dielétrica de permissividade ϵ e polarização homogênea $\vec{\mathcal{P}} = \mathcal{P}\,\hat{\mathbf{k}}$.

A densidade volumétrica de polarização pode ser calculada através da equação 10.4, e ela fica

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{P}} &= -\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} \\
&= -\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \mathcal{P}\,\hat{\mathbf{k}} \\
\rho_{\mathcal{P}} &= 0
\end{aligned}$$

Este resultado já era esperado, pois a polarização é uniforme e seu divergente deve mesmo ser nulo. A densidade superficial de carga de polarização sobre a superfície da esfera é encontrada mediante a expressão 10.5, isto é,

$$\sigma_{\mathcal{P}}(r = R) = \mathcal{P}\,\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{n}$$

O versor normal à esfera é dado pelo versor $\hat{\mathbf{r}}$ em coordenadas esféricas. Assim, utilizando a expressão 1.38 para escrever o versor $\hat{\mathbf{k}}$ em coordenadas esféricas, temos

$$\hat{\mathbf{k}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

e dessa forma,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{P}}(r = R) &= \mathcal{P}\,(\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} \\
\sigma_{\mathcal{P}}(r = R) &= \mathcal{P}\,\cos\theta
\end{aligned}$$

Lembrando que o elemento de área para r fixo em coordenadas esféricas é obtido através da equação 1.49, temos, para a carga superficial de polarização,

$$\begin{aligned}
Q_{\mathcal{P}_S} &= \int_S \sigma_{\mathcal{P}}(r = R)\, dA \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{P}\cos\theta\, R^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi \\
&= \mathcal{P}R^2 \int_0^{\pi} [\phi]_0^{2\pi} \cos\theta\, \operatorname{sen}\theta d\theta \\
Q_{\mathcal{P}_S} &= 2\pi R^2 \mathcal{P} \int_0^{\pi} \cos\theta\, \operatorname{sen}\theta d\theta
\end{aligned}$$

Para realizar esta integral, fazemos

$$
\begin{aligned}
u &= \operatorname{sen}^2\theta \\
du &= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta \\
\frac{du}{2} &= \operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta
\end{aligned}
$$

e assim, obtemos

$$
\begin{aligned}
Q_{\mathcal{P}_S} &= 2\pi R^2 \mathcal{P}\int_0^{\pi}\frac{du}{2} \\
&= \pi R^2\mathcal{P}\left[\operatorname{sen}^2\theta\right]_0^{\pi} \\
Q_{\mathcal{P}_S} &= 0
\end{aligned}
$$

Este resultado também já era esperado, pois a carga de polarização volumétrica é nula, bem como a carga total de polarização, o que implica que a carga superficial de polarização deve se anular.

Para encontrar o campo elétrico no eixo z dentro da esfera, inicialmente calculamos o potencial elétrico, através da equação 10.6, ou seja,

$$
\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dA + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho_{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV
$$

sendo que a densidade de cargas real ρ é nula, pois a esfera está descarregada. Além disso, como a densidade volumétrica é nula, resta apenas a integral de superfície nesta expressão. Os termos $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$ aparecem na figura 10.10.

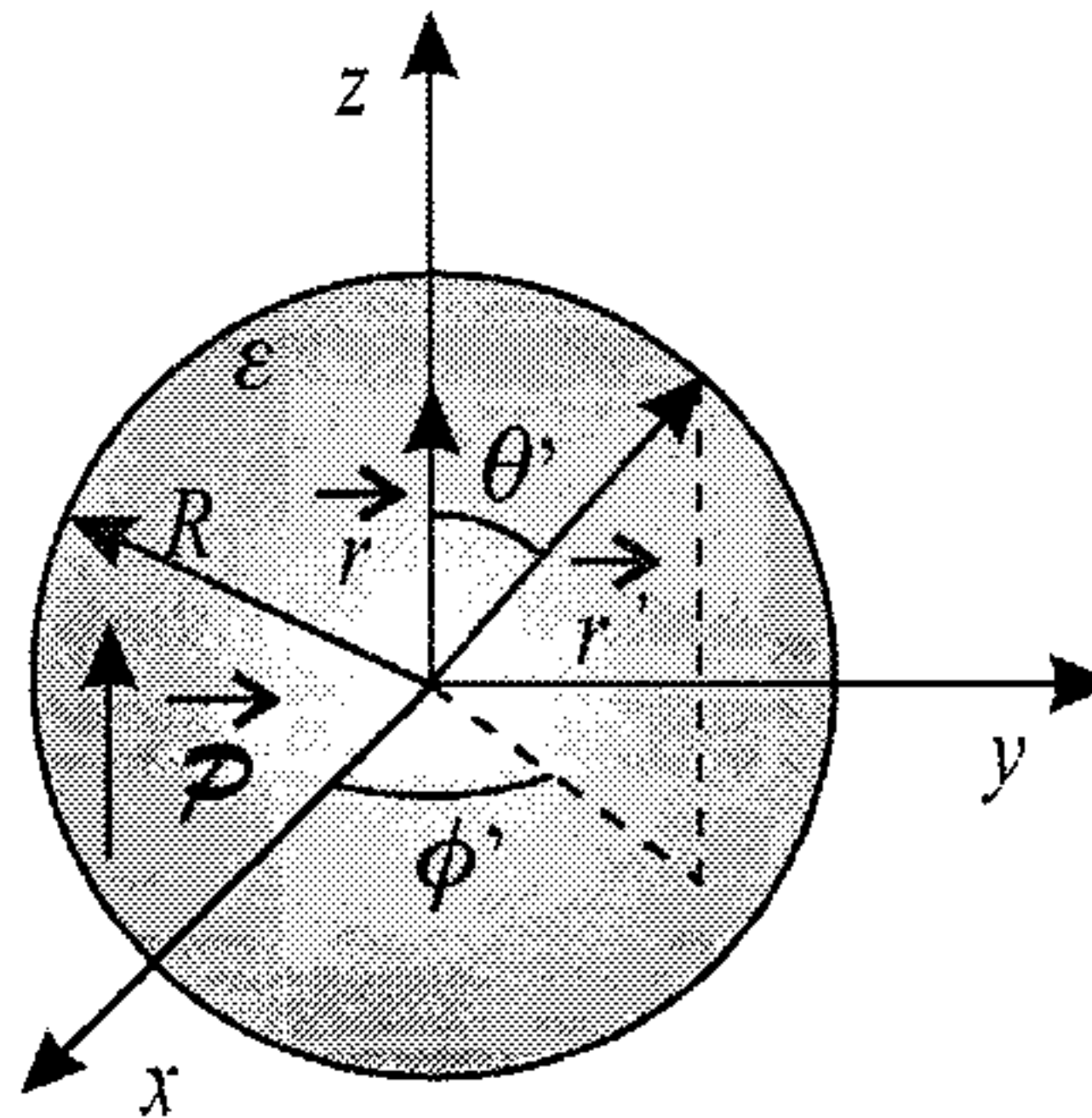



Figura 10.10: Vetores $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$ para a esfera dielétrica de permissividade ϵ e polarização homogênea $\vec{\mathcal{P}} = \mathcal{P}\,\hat{\mathbf{k}}$.

Da figura, temos

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= z\,\hat{\mathbf{k}} \\
\vec{r}\,' &= R\,\mathrm{sen}\,\theta'\cos\phi'\,\hat{\mathbf{i}} + R\,\mathrm{sen}\,\theta'\,\mathrm{sen}\,\phi'\,\hat{\mathbf{j}} + R\cos\theta'\,\hat{\mathbf{k}} \\
\vec{r} - \vec{r}\,' &= -R\,\mathrm{sen}\,\theta'\cos\phi'\,\hat{\mathbf{i}} - R\,\mathrm{sen}\,\theta'\,\mathrm{sen}\,\phi'\,\hat{\mathbf{j}} + (z - R\cos\theta')\,\hat{\mathbf{k}} \\
|\vec{r} - \vec{r}\,'| &= \sqrt{R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta' + z^2 - 2zR\cos\theta' + R^2\cos^2\theta'} \\
|\vec{r} - \vec{r}\,'| &= \sqrt{R^2 - 2zR\cos\theta' + z^2}
\end{aligned}$$

e o potencial elétrico no eixo z fica

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathcal{P}\cos\theta'\,R^2\,\mathrm{sen}\,\theta' d\theta' d\phi'}{\sqrt{R^2 - 2zR\cos\theta' + z^2}} \\
&= \frac{\mathcal{P}R^2}{4\pi\epsilon_0}\left[\phi'\right]_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta'\,\mathrm{sen}\,\theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 - 2zR\cos\theta' + z^2}} \\
\mathbb{V}(z) &= \frac{R^2\mathcal{P}}{2\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta'\,\mathrm{sen}\,\theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 - 2zR\cos\theta' + z^2}}
\end{aligned}$$

Para realizar esta integral, vamos definir

$$\begin{aligned}
u &\doteq R^2 - 2zR\cos\theta' + z^2 \\
\cos\theta' &= \frac{R^2 + z^2 - u}{2zR} \\
du &= 2zR\,\mathrm{sen}\,\theta' d\theta' \\
\frac{du}{2zR} &= \mathrm{sen}\,\theta' d\theta' \\
\theta' = 0 &\Rightarrow u_1 = R^2 - 2zR + z^2 = (R - z)^2 \\
\theta' = \pi &\Rightarrow u_2 = R^2 + 2zR + z^2 = (R + z)^2
\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(z) &= \frac{R^2\mathcal{P}}{2\epsilon_0}\int_{u_1}^{u_2}\frac{\frac{R^2+z^2-u}{2zR}\frac{du}{2zR}}{\sqrt{u}} \\
&= \frac{\mathcal{P}}{8z^2\epsilon_0}\int_{u_1}^{u_2}\frac{\left(R^2 + z^2 - u\right)du}{\sqrt{u}} \\
\mathbb{V}(z) &= \frac{\mathcal{P}\left(R^2 + z^2\right)}{8z^2\epsilon_0}\int_{u_1}^{u_2}u^{-\frac{1}{2}}du - \frac{\mathcal{P}}{8z^2\epsilon_0}\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{u}\,du
\end{aligned}$$

$$\mathbb{V}(z) = \frac{\mathcal{P}\big(R^2+z^2\big)}{8z^2\epsilon_0}\Big[2\sqrt{u}\Big]_{u_1}^{u_2} - \frac{\mathcal{P}}{8z^2\epsilon_0}\frac{2}{3}\Big[u^{\frac{3}{2}}\Big]_{u_1}^{u_2}$$
$$\mathbb{V}(z) = \frac{\mathcal{P}\big(R^2+z^2\big)}{4z^2\epsilon_0}\Big[\sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}\Big] - \frac{\mathcal{P}}{12z^2\epsilon_0}\Big[u_2^{\frac{3}{2}} - u_1^{\frac{3}{2}}\Big]$$

ou

$$\mathbb{V}(z) = \frac{\mathcal{P}\big(R^2+z^2\big)}{4z^2\epsilon_0}\Big[\sqrt{(z+R)^2}-\sqrt{(R-z)^2}\Big] - \frac{\mathcal{P}}{12z^2\epsilon_0}\Big\{\Big[(R+z)^2\Big]^{\frac{3}{2}} - \Big[(R-z)^2\Big]^{\frac{3}{2}}\Big\}$$

Aqui é preciso tomar cuidado, pois

$$\sqrt{(R-z)^2} = |R-z| = \begin{cases} R-z, & R \geq z \\ z-R, & R \leq z \end{cases}$$

No nosso caso, $R \geq z$, e assim,

$$\mathbb{V}(z) = \frac{\mathcal{P}\big(R^2+z^2\big)}{4z^2\epsilon_0}\big[z+R-(R-z)\big] - \frac{\mathcal{P}}{12z^2\epsilon_0}\Big[(R+z)^3-(R-z)^3\Big]$$

ou

$$\mathbb{V}(z) = \frac{\mathcal{P}\big(R^2+z^2\big)}{4z^2\epsilon_0}(2z) - \frac{\mathcal{P}}{12z^2\epsilon_0}\Big[(R+z)^3-(R-z)^3\Big]$$

ou ainda,

$$\mathbb{V}(z) = \frac{\mathcal{P}\big(R^2+z^2\big)}{2z\epsilon_0} - \frac{\mathcal{P}}{12z^2\epsilon_0}\Big[(R+z)^3-(R-z)^3\Big]$$

Temos também

$$\begin{aligned}(R+z)^3 &= (R+z)^2(R+z)\\ &= \big(R^2+2zR+z^2\big)(R+z)\\ &= R^3+2zR^2+Rz^2+zR^2+2z^2R+z^3\\ (R+z)^3 &= R^3+3zR^2+3Rz^2+z^3\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
(R-z)^3 &= (R-z)^2(R-z) \\
&= \left(R^2 - 2zR + z^2\right)(R-z) \\
&= R^3 - 2zR^2 + Rz^2 - zR^2 + 2z^2R - z^3 \\
(R-z)^3 &= R^3 - 3zR^2 + 3Rz^2 - z^3
\end{aligned}
$$

e assim, obtemos

$$
\begin{aligned}
(R+z)^3 - (R-z)^3 &= R^3 + 3zR^2 + 3Rz^2 + z^3 - \left(R^3 - 3zR^2 + 3Rz^2 - z^3\right) \\
&= R^3 + 3zR^2 + 3Rz^2 + z^3 - R^3 + 3zR^2 - 3Rz^2 + z^3 \\
(R+z)^3 - (R-z)^3 &= 2z(3R^2 + z^2)
\end{aligned}
$$

Com este resultado, o potencial fica

$$\mathbb{V}(z) = \frac{\mathcal{P}\left(R^2 + z^2\right)}{2z\epsilon_0} - \frac{\mathcal{P}}{12z^2\epsilon_0} 2z(3R^2 + z^2)$$

ou

$$\mathbb{V}(z) = \frac{\mathcal{P}\left(R^2 + z^2\right)}{2z\epsilon_0} - \frac{\mathcal{P}}{6z\epsilon_0}(3R^2 + z^2)$$

ou ainda,

$$\mathbb{V}(z) = \frac{\mathcal{P}R^2}{2z\epsilon_0} + \frac{\mathcal{P}z}{2\epsilon_0} - \frac{\mathcal{P}R^2}{2z\epsilon_0} - \frac{\mathcal{P}z}{6\epsilon_0}$$

ou finalmente,

$$\mathbb{V}(z) = \frac{\mathcal{P}z}{3\epsilon_0}$$

O campo elétrico pode ser obtido mediante o gradiente negativo do potencial elétrico, ou seja,

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}(z) &= -\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\frac{\mathcal{P}z}{3\epsilon_0} \\
&= -\frac{\mathcal{P}}{3\epsilon_0}\hat{\mathbf{k}} \\
\vec{\mathcal{E}}(z) &= -\frac{\vec{\mathcal{P}}}{3\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

e o campo produzido pela esfera no eixo z é proporcional à polarização $\vec{\mathcal{P}}$ e tem sentido contrário ao desta, como deve ser.

O campo elétrico e o deslocamento elétrico estão relacionados pela expressão 10.9,

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon\vec{\mathcal{E}}$$

Da mesma forma, para um grande número de materiais, a polarização $\vec{\mathcal{P}}$ pode ser associada ao campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}$, através de

$$\vec{\mathcal{P}} = \chi\vec{\mathcal{E}} \tag{10.15}$$

onde χ, chamada de *susceptibilidade elétrica*, é uma propriedade do material que está associada também à permissividade, já que podemos escrever

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{D}} &= \epsilon_0\vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}} \\ \epsilon\vec{\mathcal{E}} &= \epsilon_0\vec{\mathcal{E}} + \chi\vec{\mathcal{E}} \\ \epsilon\vec{\mathcal{E}} &= (\epsilon_0 + \chi)\vec{\mathcal{E}} \\ \epsilon &= \epsilon_0 + \chi \\ \chi &= \epsilon - \epsilon_0 \end{aligned} \tag{10.16}$$

Existe ainda uma outra grandeza importante, que é a razão entre a permissividade elétrica ϵ do meio dielétrico e a permissividade ϵ_0 do vácuo, ou seja,

$$\mathcal{K} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \tag{10.17}$$

que é chamada de *constante dielétrica* do meio. A tabela 10.1 apresenta os valores desta grandeza para alguns materiais usuais. Observe que a constante dielétrica é sempre maior ou, no máximo, igual a um ($\mathcal{K} \geq 1$).

Um dielétrico que segue as expressões 10.9 e 10.15, as quais são, respectivamente,

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon\vec{\mathcal{E}}$$

e

$$\vec{\mathcal{P}} = \chi\vec{\mathcal{E}}$$

é chamado de dielétrico linear e isotrópico. Ele é linear quando a relação entre o campo elétrico, a polarização e o deslocamento elétrico é linear, e isotrópico

Material	Constante Dielétrica $\mathcal{K}$ $(=\frac{\epsilon}{\epsilon_0})$
Vácuo	1
Ar (1 atm)	1,00059
Mica	5,4
Âmbar	2,7
Porcelana	6,5
Vidro	5 a 10
Polietileno	2 a 3
Água (destilada, 20° C)	80,1
Água (destilada, 0° C)	87,8

Tabela 10.1: Valores da constante dielétrica para algumas substâncias.

quando possui uma única susceptibilidade elétrica, independente da direção espacial em que ela é medida. Para campos não muito intensos, a grande maioria dos materiais dielétricos comporta-se de forma linear e isotrópica. Quando o campo elétrico fica muito intenso, a relação pode tornar-se mais complicada, e além disso, o sistema pode ter sua rigidez dielétrica rompida, passando a comportar-se como um condutor, e não mais como um isolante. A susceptibilidade χ depende das variáveis termodinâmicas do sistema, em particular a temperatura. Portanto, a permissividade ϵ e a constante dielétrica $\mathcal{K}$ também são influenciadas por estas grandezas, principalmente no que se refere a materiais líquidos e gasosos. Por isso, aparecem as condições em que foram medidas as constantes dielétricas para alguns dos materiais da tabela 10.1.

Quando o dielétrico não é isotrópico, ele é dito anisotrópico. A calcita é um exemplo deste tipo de material. Neste caso, as relações 10.9 e 10.15 devem ser substituídas por

$$\vec{\mathcal{D}} = \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

e

$$\vec{\mathcal{P}} = \overleftrightarrow{\chi} \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

onde $\overleftrightarrow{\epsilon}$ é agora o *tensor permissividade elétrica* e $\overleftrightarrow{\chi}$ é o *tensor susceptibilidade elétrica.* O material apresenta uma permissividade e uma susceptibilidade que dependem da sua orientação em relação a um sistema de eixos e a situação fica bem mais complicada, mas a primeira lei de Maxwell 10.8 continua válida. Nós vamos estudar apenas materiais isotrópicos, e os interessados em maiores detalhes com relação aos anisotrópicos devem consultar as referências bibliográficas.

Exemplo 10.3. *Calcule o campo elétrico, o deslocamento elétrico e a polarização produzidos por uma carga Q imersa num meio dielétrico infinito de permissividade ϵ.*

O campo elétrico gerado pela carga Q pode ser calculado por meio da lei de Gauss 10.11, isto é,

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{Q}{\epsilon}$$

Vamos considerar uma superfície gaussiana esférica de raio r em torno da carga Q, de modo que o versor normal à superfície seja $\hat{n} = \hat{\mathbf{r}}$. O campo elétrico deve ter uma simetria esférica radial, e assim, $\vec{\mathcal{E}} = \pm\mathcal{E}\,\hat{\mathbf{r}}$, onde o sinal positivo representa o campo gerado por uma carga positiva e o sinal negativo está associado a uma carga negativa. Obtemos, portanto,

$$\begin{aligned}
\oint_{S_G} \pm\mathcal{E}\,\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}\, dA &= \frac{Q}{\epsilon} \\
\pm\mathcal{E} \oint_{S_G} dA &= \frac{Q}{\epsilon} \\
\pm\mathcal{E} 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\epsilon} \\
\mathcal{E} &= \pm\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r^2}
\end{aligned}$$

ou, em termos vetoriais,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Note que o campo elétrico produzido por uma carga Q no vácuo é

$$\vec{\mathcal{E}}_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

de modo que a razão entre os módulos dos campos elétricos fica

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_v} &= \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r^2}}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}} \\ &= \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \\ \mathcal{E} &= \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\mathcal{E}_v\end{aligned}$$

Lembrando que a constante dielétrica $\mathcal{K}$ é dada pela expressão 10.17,

$$\mathcal{K} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

temos

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_v}{\mathcal{K}}$$

e como $\mathcal{K} \geq 1$, $\mathcal{E} \leq \mathcal{E}_v$. Ou seja, o campo elétrico de uma carga Q no vácuo é sempre maior ou, no máximo, igual ao campo elétrico gerado por uma carga Q imersa num dielétrico. O dielétrico atenua o campo elétrico por um fator igual à constante dielétrica do meio. Podemos entender isto facilmente se observarmos a figura 10.11, que apresenta uma carga Q positiva dentro de um dielétrico de permissividade ϵ.

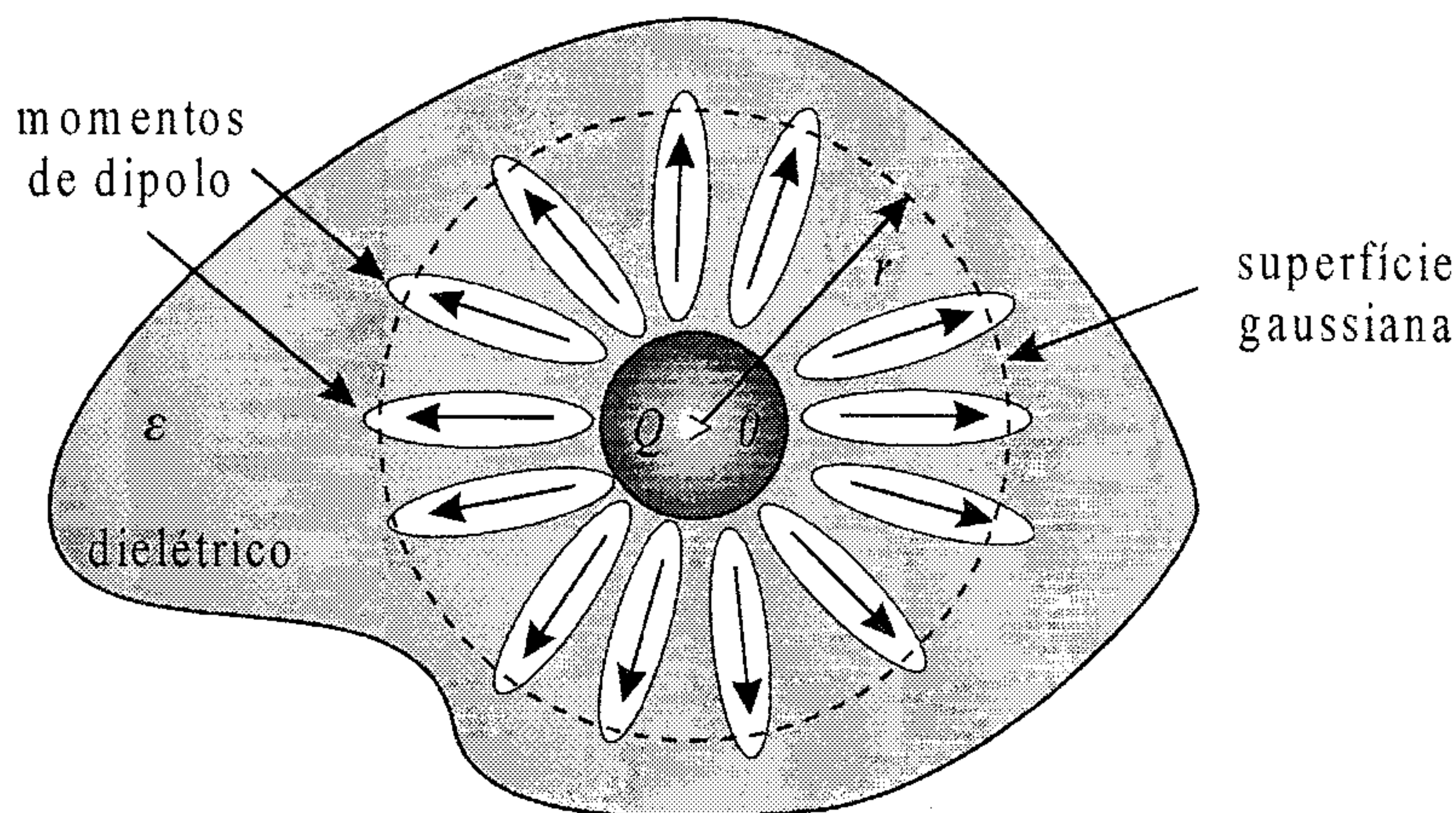



Figura 10.11: Uma carga Q positiva imersa num meio dielétrico de permissividade ϵ.

Na figura aparece também a superfície gaussiana esférica de raio r, assim como os dipolos induzidos ou intrínsecos que constituem o dielétrico,

orientados na direção radial em relação à carga Q. Os dipolos se distribuem de forma homogênea dentro da gaussiana, e os vetores momento de dipolo ficam no sentido de $\hat{\mathbf{r}}$, para fora. Isto faz com que surja um campo elétrico produzido pelos dipolos, orientado na direção radial, só que no sentido de $-\hat{\mathbf{r}}$, ou seja, para dentro. Assim, o campo produzido pela carga se soma com o campo produzido pelos dipolos, e o resultado é um campo mais fraco por um fator $\mathcal{K}$, como mostramos acima. Trata-se de um resultado geral, válido não apenas para uma carga pontual, mas também para qualquer distribuição de cargas. Utilizando esse resultado, e lembrando os conceitos de campo elétrico macroscópico gerado pelos dipolos, $\vec{\mathcal{E}}_d$, e campo elétrico macroscópico total interno, $\vec{\mathcal{E}}_{\text{int}}$, discutidos na seção anterior, podemos relacioná-los através de

$$\vec{\mathcal{E}}_{\text{int}} = \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{E}}_d$$

e

$$\vec{\mathcal{E}}_{\text{int}} = \frac{1}{\mathcal{K}}\vec{\mathcal{E}}$$

que são equações para os campos macroscópicos. Podemos calcular também o deslocamento elétrico, por intermédio da equação 10.12, que é

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{D}} \cdot \hat{n}\, dA = Q$$

O deslocamento elétrico também deve ter uma simetria radial, e assim, $\vec{\mathcal{D}} = \pm\mathcal{D}\,\hat{\mathbf{r}}$. O resultado é

$$\begin{aligned} \oint_{S_G} \pm\mathcal{D}\,\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}\, dA &= Q \\ \pm\mathcal{D} \oint_{S_G} dA &= Q \\ \pm\mathcal{D} 4\pi r^2 &= Q \\ \mathcal{D} &= \pm\frac{Q}{4\pi r^2} \end{aligned}$$

ou, em termos vetoriais,

$$\vec{\mathcal{D}} = \frac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Observe que a relação 10.9 entre o deslocamento e o campo elétrico é verificada, pois

$$\begin{aligned}
\epsilon\vec{\mathcal{E}} &= \epsilon\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \\
\epsilon\vec{\mathcal{E}} &= \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \\
\epsilon\vec{\mathcal{E}} &= \vec{\mathcal{D}}
\end{aligned}$$

O deslocamento elétrico, a polarização e o campo elétrico estão relacionados pela equação 10.7, ou seja,

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0\vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}$$

Portanto, a polarização é

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{D}} - \epsilon_0\vec{\mathcal{E}}$$

e assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{P}} &= \frac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{\mathbf{r}} - \epsilon_0\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \\
&= \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\frac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \\
&= \left(1 - \frac{1}{\mathcal{K}}\right)\frac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \\
&= \frac{\mathcal{K}-1}{\mathcal{K}}\frac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \\
\vec{\mathcal{P}} &= \frac{\mathcal{K}-1}{\mathcal{K}}\vec{\mathcal{D}}
\end{aligned}$$

ou, em termos das permissividades,

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{P}} &= \frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}\vec{\mathcal{D}} \\
&= \frac{\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon_0}}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}\vec{\mathcal{D}} \\
&= \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon}\vec{\mathcal{D}} \\
&= (\epsilon - \epsilon_0)\vec{\mathcal{E}} \\
\vec{\mathcal{P}} &= \chi\vec{\mathcal{E}}
\end{aligned}$$

de forma que a expressão 10.15 também é verificada. A polarização pode ser escrita expressamente como

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{Q\chi}{4\pi\epsilon}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

A densidade volumétrica de carga de polarização, mediante o uso do operador ∇ em coordenadas esféricas dado pela expressão B.16, é

$$\rho_{\mathcal{P}} = -\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}$$
$$\rho_{\mathcal{P}} = -\frac{Q\chi}{4\pi\epsilon}\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r}}{r^3}\right]$$

O divergente da função entre colchetes é dado pela expressão 4.18, que é

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\right] = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

e assim, considerando $\vec{r}\,' = 0$, temos

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r}}{r^3}\right] = 4\pi\delta(\vec{r})$$

ou

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r}}{r^3}\right] = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq 0 \\ 4\pi, & \vec{r} = 0 \end{cases}$$

Como em $\vec{r} = 0$ existe uma carga real, este ponto não é acessível para a carga de polarização, e então, $\vec{r} \neq 0$. O divergente se anula e a densidade volumétrica de carga de polarização fica

$$\rho_{\mathcal{P}} = -\frac{Q\chi}{4\pi\epsilon}\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r}}{r^3}\right]$$
$$\rho_{\mathcal{P}} = 0$$

A carga real Q possui uma pequena superfície esférica S_Q, de raio R_Q, que, formalmente, vai a zero. Nessa superfície existe uma densidade superficial de carga de polarização, dada por

$$\sigma_{\mathcal{P}}(r = R_Q) = \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n}$$
$$\sigma_{\mathcal{P}}(r = R_Q) = \left[\frac{Q\chi}{4\pi\epsilon}\frac{\vec{r}}{r^3}\right]_{r=R_Q} \cdot \hat{n}$$

O versor normal à superfície S_Q da carga deve apontar para fora do dielétrico, e assim, ele corresponde ao versor $-\hat{\mathbf{r}}$. Assim, a densidade superficial fica

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{P}}(r = R_Q) &= \frac{Q\chi}{4\pi\epsilon}\left[\frac{\vec{r}}{r^3}\right]_{r=R_Q} \cdot (-\hat{\mathbf{r}}) \\ &= -\frac{Q\chi}{4\pi\epsilon}\left[\frac{1}{r^2}\right]_{r=R_Q} \\ \sigma_{\mathcal{P}}(r = R_Q) &= -\frac{\chi}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{R_Q^2}\end{aligned}$$

A carga de polarização sobre a superfície S_Q é dada por

$$\begin{aligned}Q_{\mathcal{P}} &= \sigma_{\mathcal{P}}(r = R_Q)A \\ &= \sigma_{\mathcal{P}}(r = R_Q)4\pi R_Q^2 \\ &= -\frac{\chi}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{R_Q^2}4\pi R_Q^2 \\ Q_{\mathcal{P}} &= -\frac{Q\chi}{\epsilon}\end{aligned}$$

e agora, no limite $R_Q \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{R_Q\to 0} Q_{\mathcal{P}} &= \lim_{R_Q\to 0} -\frac{Q\chi}{\epsilon} \\ \lim_{R_Q\to 0} Q_{\mathcal{P}} &= -\frac{Q\chi}{\epsilon}\end{aligned}$$

A carga total dentro da superfície gaussiana é a soma da carga Q com a carga de polarização $Q_{\mathcal{P}}$, ou seja,

$$\begin{aligned}Q_t &= Q - \frac{Q\chi}{\epsilon} \\ &= Q\frac{\epsilon - \chi}{\epsilon} \\ &= Q\frac{\epsilon - (\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \\ &= Q\frac{\epsilon_0}{\epsilon} \\ Q_t &= \frac{Q}{\mathcal{K}}\end{aligned}$$

e assim, a carga total dentro da superfície gaussiana é menor do que a carga real por um fator $\mathcal{K}$, que é a constante dielétrica. Isso explica o porquê de o campo elétrico da carga ser menor por um fator $\mathcal{K}$. Como a carga é reduzida por um fator $\mathcal{K}$, o campo também diminui pelo mesmo fator, pois ele é diretamente proporcional à carga dentro da superfície gaussiana.

Vejamos agora o que ocorre com os vetores do campo elétrico e do deslocamento elétrico na interface entre dois meios dielétricos distintos.

10.3 Condições de Contorno na Interface entre Dois Meios Dielétricos

Na seção anterior, vimos como é o campo elétrico dentro e fora de um material dielétrico. Precisamos também saber o que acontece com o campo e com o deslocamento elétricos na passagem de um região para a outra, ou seja, nas interfaces entre dois dielétricos, caracterizados por permissividades elétricas diferentes. Para obter as condições de contorno que o campo e o deslocamento elétricos devem seguir numa junção entre dois meios diferentes, vamos utilizar a lei de Gauss 10.12 em termos do deslocamento elétrico, que é

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{D}} \cdot \hat{n}\, dA = Q$$

lembrando também o fato de que o potencial e o campo elétrico estão relacionados pela expressão

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla \mathbb{V}$$

de forma que, mesmo num dielétrico,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = 0$$

que é a segunda lei de Maxwell 5.18 na forma diferencial, escrita agora para meios dielétricos. Esta equação estabelece que o campo elétrico na Eletrostática é conservativo. Desta expressão decorre que o potencial elétrico pode ser obtido mediante a equação 5.19,

$$-\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = d\mathbb{V}$$

que, integrada, resulta na segunda lei de Maxwell na forma integral, equação 5.20, ou seja,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

a qual também é válida, agora para meios dielétricos. A primeira condição de contorno é encontrada mediante uma superfície gaussiana cilíndrica, de altura L desprezível e área dA, situada na interface entre os dois meios dielétricos, como mostra a figura 10.12.

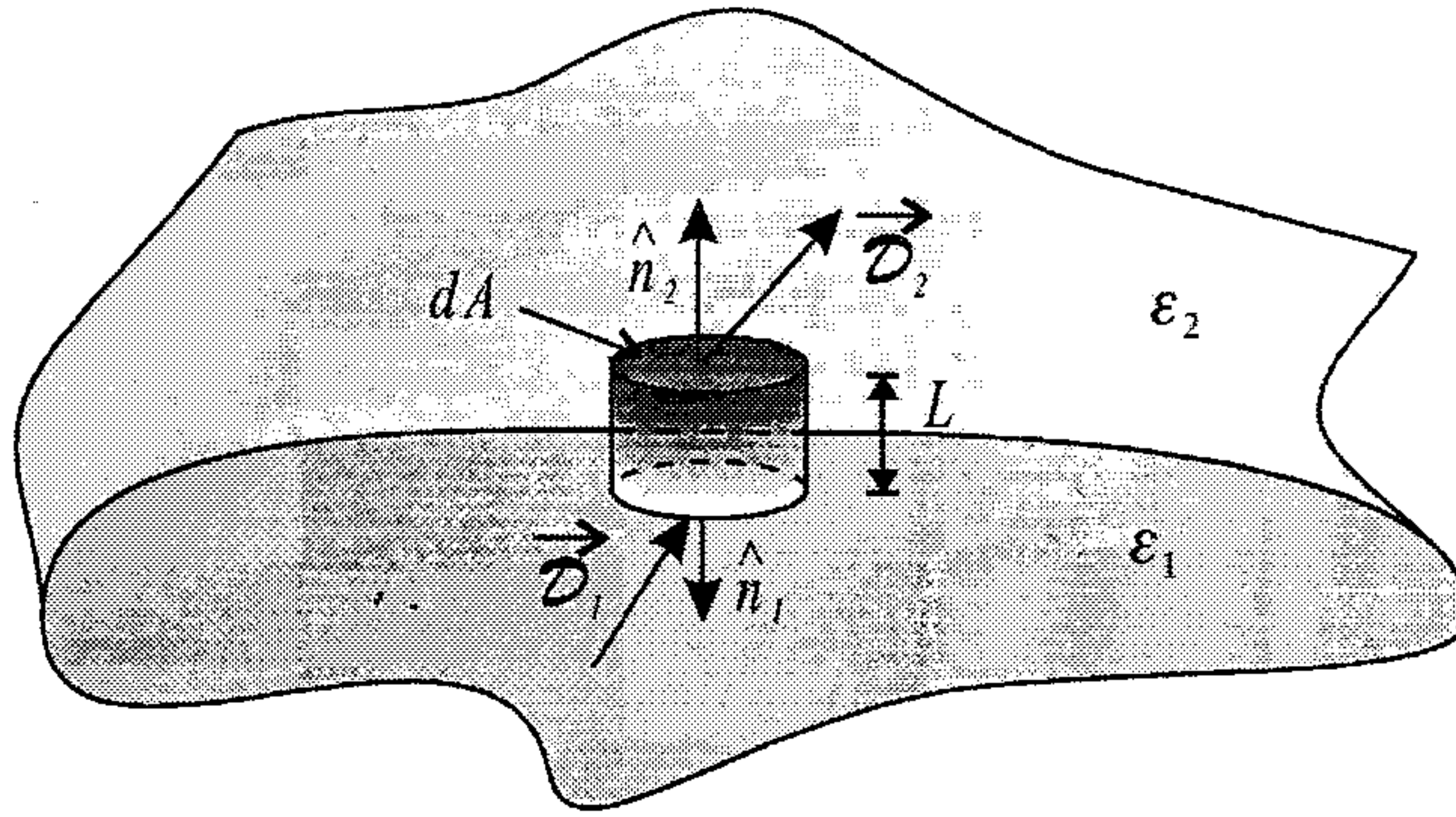



Figura 10.12: Uma superfície gaussiana cilíndrica de área dA e altura desprezível, na interface entre dois meios dielétricos.

Para essa superfície gaussiana, temos

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{D}} \cdot \hat{n}\, dA = \int_{A_1} \vec{\mathcal{D}}_1 \cdot \hat{n}_1\, dA_1 + \int_{A_2} \vec{\mathcal{D}}_2 \cdot \hat{n}_2\, dA_2 + \int_{A_L} \vec{\mathcal{D}}_L \cdot \hat{n}_L\, dA_L$$

onde A_1 e A_2 são as bases do cilindro nos meios 1 e 2, e A_L é a área lateral, que tende a zero, pois vamos tomar o limite $L \to 0$. Assim, só contribuem as duas primeiras integrais. $\vec{\mathcal{D}}_1$ é o deslocamento elétrico no meio 1, que tem uma permissividade ϵ_1, e $\vec{\mathcal{D}}_2$ é o deslocamento elétrico no meio 2, que tem uma permissividade ϵ_2. A normal à superfície 2 é $\hat{n}_2$, enquanto a normal à superfície 1 é $\hat{n}_1$. Note que $\hat{n}_2 = -\hat{n}_1$. Com estas definições, as integrais se tornam, lembrando também que $dA_1 = dA_2$,

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{D}} \cdot \hat{n}\, dA = -\vec{\mathcal{D}}_1 \cdot \hat{n}_2\, dA_2 + \vec{\mathcal{D}}_2 \cdot \hat{n}_2\, dA_2$$

ou

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{D}} \cdot \hat{n}\, dA = (\vec{\mathcal{D}}_2 - \vec{\mathcal{D}}_1) \cdot \hat{n}_2\, dA_2$$

Pela lei de Gauss 10.12, esta integral de superfície está relacionada à carga dentro da superfície gaussiana, ou seja,

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{D}} \cdot \hat{n}\, dA = Q$$

Como $L \to 0$, a carga é dada apenas por

$$Q = \sigma dA_2$$

onde σ é a densidade superficial de carga real existente na interface entre os dois meios. Temos, portanto,

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{D}} \cdot \hat{n}\, dA = \sigma dA_2$$

ou

$$(\vec{\mathcal{D}}_2 - \vec{\mathcal{D}}_1) \cdot \hat{n}_2\, dA_2 = \sigma dA_2$$

ou ainda,

$$(\vec{\mathcal{D}}_2 - \vec{\mathcal{D}}_1) \cdot \hat{n}_2 = \sigma \tag{10.18}$$

o que significa que o deslocamento elétrico não é, em geral, contínuo através de uma interface. De fato, sua descontinuidade está associada à densidade superficial de carga real (não é a carga de polarização) na junção entre os dielétricos. Esta é a primeira condição de contorno para os dielétricos. Se não houver densidade de carga real na interface, $\sigma = 0$, e assim, obtemos

$$(\vec{\mathcal{D}}_2 - \vec{\mathcal{D}}_1) \cdot \hat{n}_2 = 0$$

ou

$$\vec{\mathcal{D}}_2 \cdot \hat{n}_2 = \vec{\mathcal{D}}_1 \cdot \hat{n}_2 \tag{10.19}$$

e a componente normal do deslocamento elétrico torna-se contínua. Observe que não se trata do vetor deslocamento elétrico como um todo, apenas a componente normal à junção.

Podemos verificar a expressão 10.18 para um caso bastante importante, o da interface entre um condutor e o vácuo. No vácuo e no condutor perfeito, a polarização $\vec{\mathcal{P}}$ é nula. Além disso, dentro do condutor, o campo elétrico é nulo, de modo que o deslocamento elétrico também se anula. No vácuo, o deslocamento está relacionado ao campo elétrico por $\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}$. Reunindo todas estas considerações, e associando o meio 2 ao vácuo e o meio 1 ao condutor, temos

$$(\vec{\mathcal{D}}_v - \vec{\mathcal{D}}_c) \cdot \hat{n}_v = \sigma$$

$$\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}_v = \sigma$$

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}$$

que é a equação 6.44, a qual dá a densidade de carga na superfície de um condutor. Conseqüentemente, a equação 10.18 reproduz esse resultado anterior, como deve ser.

A expressão 10.19 pode ser reescrita, mediante a consideração do fato de que $\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}$, como

$$\epsilon_2 \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot \hat{n}_2 = \epsilon_1 \vec{\mathcal{E}}_1 \cdot \hat{n}_2 \tag{10.20}$$

em que ficam explicitados os campos elétricos. Vejamos agora a segunda condição de contorno na interface. Para obtê-la, consideramos um circuito retangular fechado que passa de um meio ao outro, como mostra a figura 10.13. Da figura, vemos que o retângulo tem dois lados paralelos à interface: os lados $d\vec{\ell}_1$, no meio 1, e $d\vec{\ell}_2$, no meio 2, sendo que $d\vec{\ell}_1 = -d\vec{\ell}_2$. Os outros dois lados têm tamanho L, que é muito pequeno, e portanto, formalmente fazemos $L \to 0$. Vamos utilizar a equação 5.19,

$$d\mathbb{V} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

para calcular as diferenças de potencial elétrico entre todos os pontos do retângulo. Iniciando do ponto A e seguindo no sentido anti-horário, temos

$$d\mathbb{V}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell}_1$$

$$\mathbb{V}(B) - \mathbb{V}(A) = -\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell}_1$$

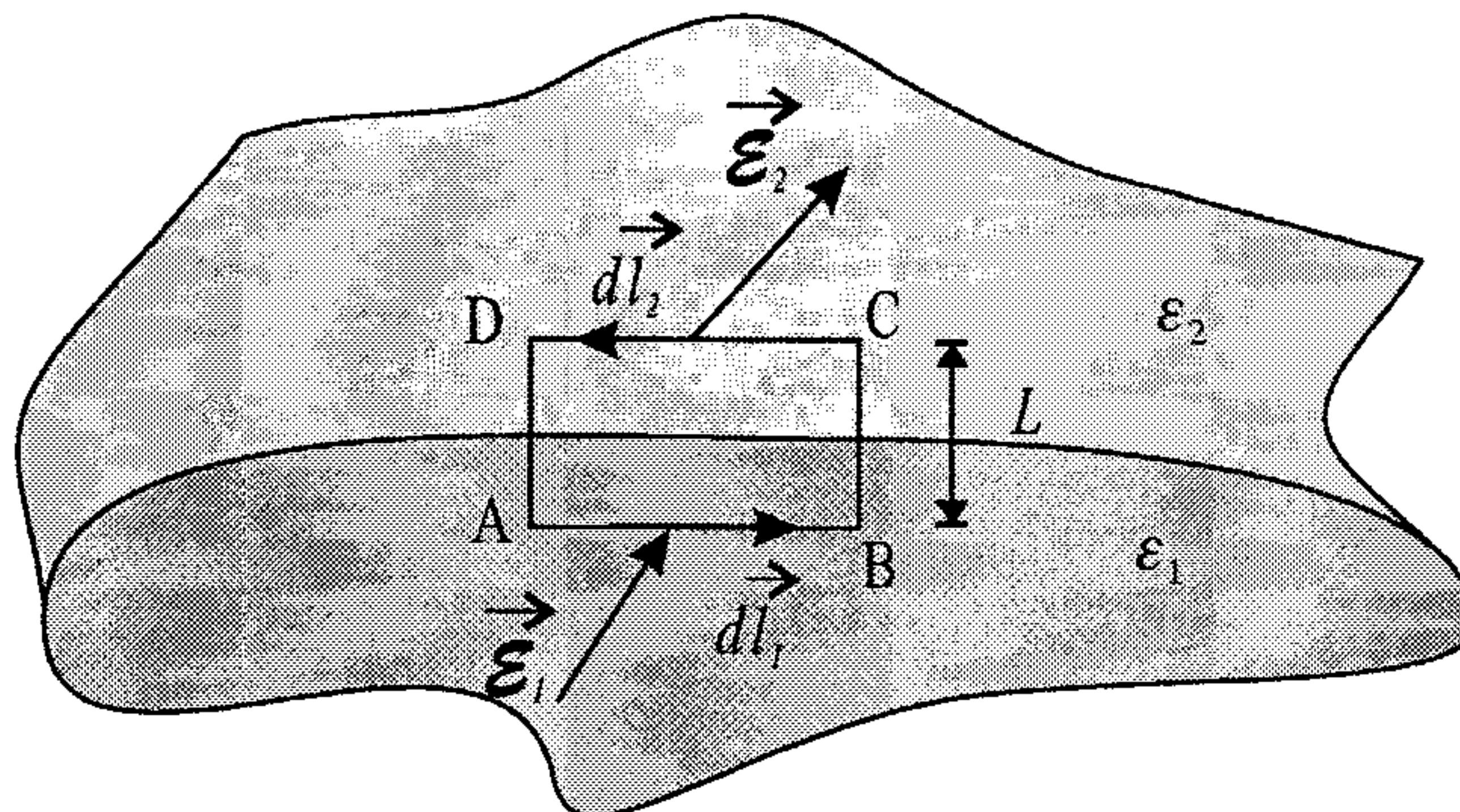



Figura 10.13: Um circuito fechado retangular na interface entre dois dielétricos.

$$
\begin{aligned}
d\mathbb{V}_{\mathrm{B}\to\,\mathrm{C}} &= -\vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{L} \\
\mathbb{V}(C)-\mathbb{V}(B) &= -\mathcal{E}L\cos\theta \\
\mathbb{V}(C)-\mathbb{V}(B) &= 0, \qquad \text{no limite } L\to 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\mathbb{V}_{\mathrm{C}\to\mathrm{D}} &= -\vec{\mathcal{E}}_2\cdot d\vec{\ell}_2 \\
\mathbb{V}(D)-\mathbb{V}(C) &= -\vec{\mathcal{E}}_2\cdot d\vec{\ell}_2
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
d\mathbb{V}_{\mathrm{D}\to\mathrm{A}} &= -\vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{L} \\
\mathbb{V}(A)-\mathbb{V}(D) &= -\mathcal{E}L\cos\theta \\
\mathbb{V}(A)-\mathbb{V}(D) &= 0, \qquad \text{no limite } L\to 0
\end{aligned}
$$

Agora, vamos somar todas as diferenças de potencial no circuito, isto é,

$$
\begin{aligned}
d\mathbb{V}_{\mathrm{A}\to\mathrm{A}} &= d\mathbb{V}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + d\mathbb{V}_{\mathrm{B}\to\,\mathrm{C}} + d\mathbb{V}_{\mathrm{C}\to\mathrm{D}} + d\mathbb{V}_{\mathrm{D}\to\mathrm{A}} \\
&= \mathbb{V}(B)-\mathbb{V}(A)+\mathbb{V}(C)-\mathbb{V}(B)+\mathbb{V}(D)-\mathbb{V}(C)+\mathbb{V}(A)-\mathbb{V}(D) \\
d\mathbb{V}_{\mathrm{A}\to\mathrm{A}} &= 0
\end{aligned}
$$

e assim, a diferença de potencial, ao darmos uma volta completa no circuito, é nula, como aliás deve ser, já que o campo eletrostático é conservativo e o trabalho feito pela força elétrica num circuito fechado é nulo. Por outro lado, esta equação também nos fornece o seguinte:

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathbb{V}(B) - \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(C) - \mathbb{V}(B) + \mathbb{V}(D) - \mathbb{V}(C) + \mathbb{V}(A) - \mathbb{V}(D) \\
&= -\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 + 0 + -\vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 + 0 \\
0 &= -\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 - \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2
\end{aligned}
$$

Como $d\vec{\ell}_1 = -d\vec{\ell}_2$, obtemos

$$\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 - \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 = 0$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 \tag{10.21}$$

de modo que o campo elétrico *tangencial* à fronteira entre os dois meios dielétricos é contínuo através da interface. Esta é a segunda condição de contorno para a região entre os dielétricos.

Vejamos como esta condição se comporta na interface entre o vácuo (meio 2) e um condutor perfeito (meio 1). Dentro do condutor perfeito o campo elétrico é nulo, o que implica que o campo elétrico tangencial à superfície também é nulo. Assim, obtemos

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 &= \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 \\
0 &= \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2
\end{aligned}
$$

Como, em geral, nem $\vec{\mathcal{E}}_2$ nem $d\vec{\ell}_2$ são nulos, para que o produto escalar se anule sempre é necessário que

$$\vec{\mathcal{E}}_2 \perp d\vec{\ell}_2$$

o que, por sua vez, implica que o campo elétrico não tem uma componente tangencial à superfície, apenas uma componente normal. Isso está de acordo com o exemplo 4.15, em que vimos que o campo nas proximidades de um condutor, mas fora dele, é sempre perpendicular à superfície. Esse campo é dado pela equação 4.25,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{n}$$

onde $\hat{n}$ é a normal ao condutor. Assim, novamente a condição de contorno obtida reproduz um caso já estudado.

De posse destas condições de contorno, podemos estudar alguns problemas relevantes.

Exemplo 10.4. *Considere dois meios dielétricos semi-infinitos, de permissividades ϵ_1 e ϵ_2, separados por um plano infinito localizado em $y = 0$. No meio 2 existe uma carga pontual Q, situada a uma distância Y da interface entre os dois meios, como mostra a figura 10.14. Calcule o campo elétrico e o deslocamento elétrico para $y > 0$ e $y < 0$.*

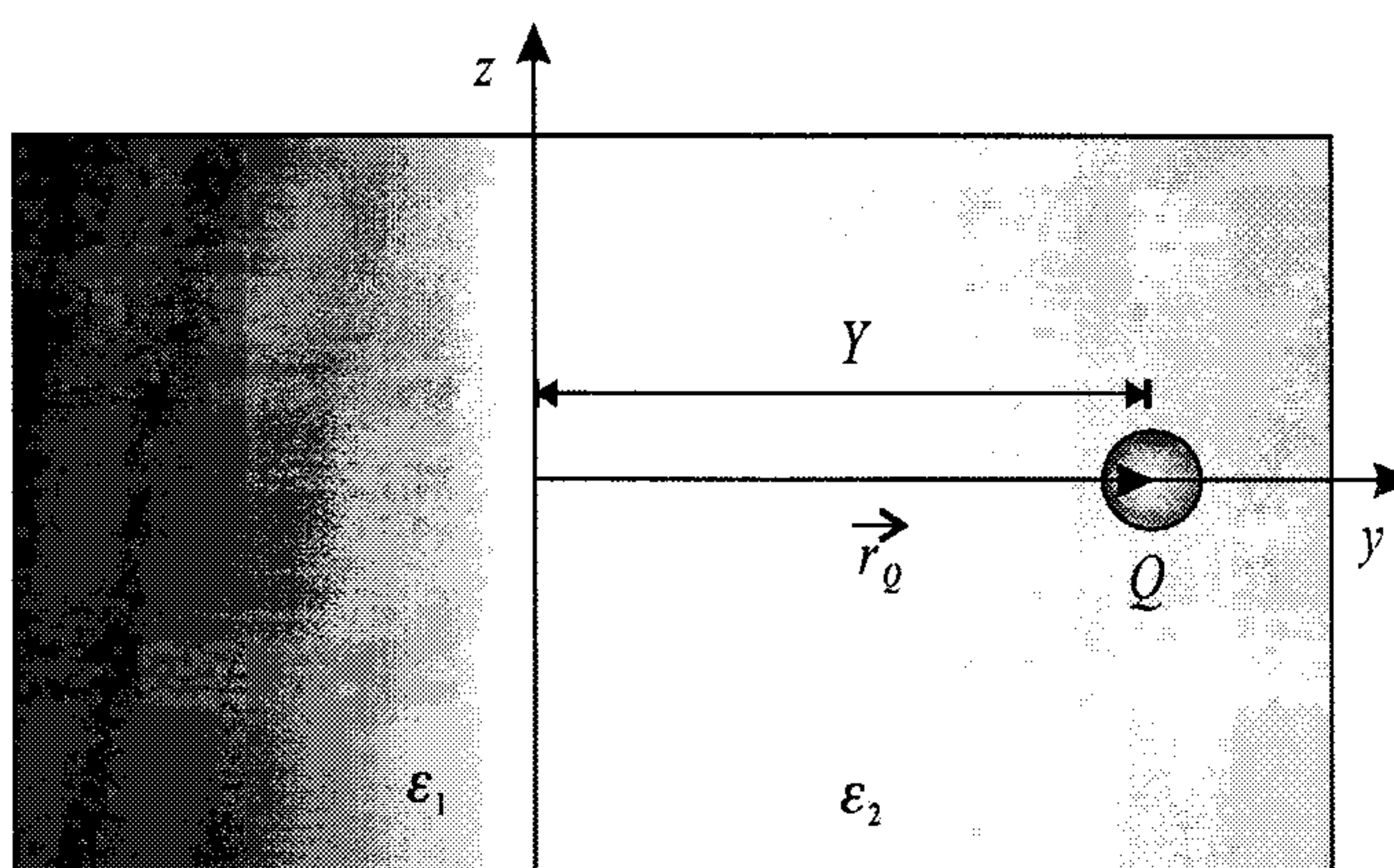



Figura 10.14: Uma carga Q imersa num dielétrico semi-infinito, separado de outro dielétrico por um plano infinito situado em $y = 0$.

Para resolver este problema, vamos usar um método semelhante ao método das imagens discutido na seção 7.1.1 do capítulo 7, já que o campo elétrico gerado pela carga Q produz uma polarização sobre os dipolos dos meios 1 e 2. O campo gerado pelos dipolos do meio 1 pode ser substituído pelo campo de uma carga pontual q, situada à mesma distância Y da interface, só que no meio 1, como mostra a figura 10.15. Note que q não precisa, necessariamente, estar relacionada à carga Q através de $q = -Q$, como ocorre no método das imagens quando existe um condutor aterrado na interface.

O potencial elétrico na região $y > 0$ é a soma dos potenciais elétricos gerados pelas duas cargas, ou seja,

$$\mathbb{V}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2}\frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_2}\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|}$$

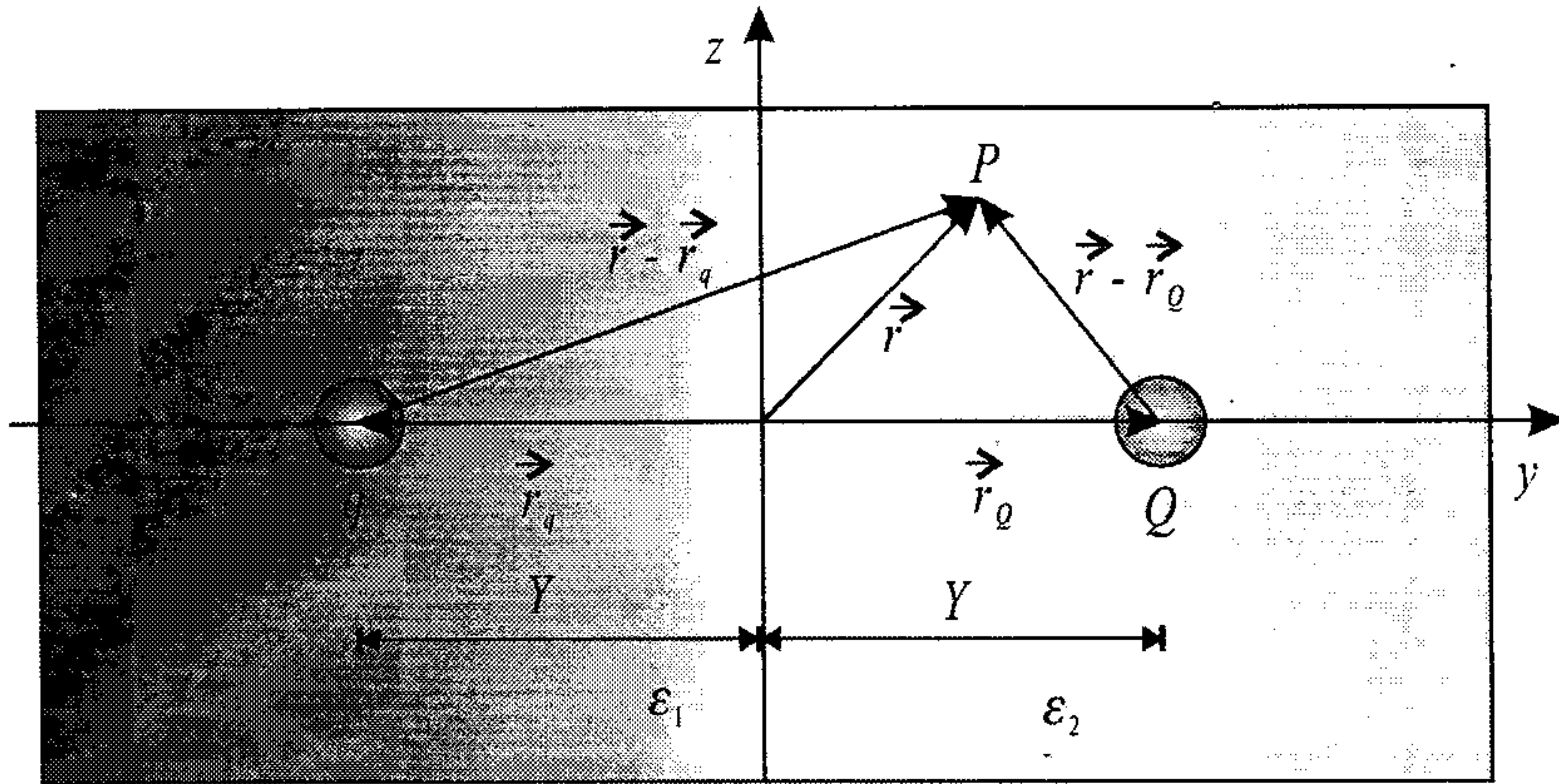



Figura 10.15: Uma carga Q imersa num dielétrico semi-infinito, e sua imagem q situada no outro dielétrico.

onde apenas substituímos, na expressão do potencial de uma carga pontual no vácuo, a permissividade usual ϵ_0 pela permissividade do meio no qual estamos calculando o potencial, que é o meio 2. Da figura, temos

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \\
\vec{r}_Q &= Y\,\hat{\mathbf{j}} \\
\vec{r}_q &= -Y\,\hat{\mathbf{j}} \\
\vec{r} - \vec{r}_Q &= x\,\hat{\mathbf{i}} + (y - Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \\
|\vec{r} - \vec{r}_Q| &= \sqrt{x^2 + (y - Y)^2 + z^2} \\
\vec{r} - \vec{r}_q &= x\,\hat{\mathbf{i}} + (y + Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \\
|\vec{r} - \vec{r}_q| &= \sqrt{x^2 + (y + Y)^2 + z^2}
\end{aligned}
$$

A partir destas expressões, achamos

$$
\mathbb{V}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2}\left[\frac{Q}{\sqrt{x^2 + (y - Y)^2 + z^2}} + \frac{q}{\sqrt{x^2 + (y + Y)^2 + z^2}}\right]
$$

O campo elétrico para $y > 0$ é obtido através do gradiente negativo desta equação, ou seja,

$$
\vec{\mathcal{E}}_2 = -\nabla\mathbb{V}_2
$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_2 = -\nabla\left\{\frac{1}{4\pi\epsilon_2}\left[\frac{Q}{\sqrt{x^2+(y-Y)^2+z^2}} + \frac{q}{\sqrt{x^2+(y+Y)^2+z^2}}\right]\right\}$$
$$\vec{\mathcal{E}}_2 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_2}\nabla\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-Y)^2+z^2}}\right] - \frac{q}{4\pi\epsilon_2}\nabla\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+Y)^2+z^2}}\right]$$

Lembrando a equação 5.9,

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

e considerando que os termos cujos gradientes no potencial elétrico devemos calcular são justamente do tipo $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$, encontramos

$$\vec{\mathcal{E}}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y-Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+(y-Y)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{q}{4\pi\epsilon_2}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y+Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+(y+Y)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Na interface, em $y = 0$, o campo elétrico torna-se

$$\vec{\mathcal{E}}_2(y=0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (-Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+(0-Y)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{q}{4\pi\epsilon_2}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (0+Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+(0+Y)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_2(y=0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} - Y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{q}{4\pi\epsilon_2}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + Y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

O deslocamento elétrico no meio 2, em $y = 0$, é, simplesmente,

$$\vec{\mathcal{D}}_2(y=0) = \epsilon_2\vec{\mathcal{E}}_2$$
$$\vec{\mathcal{D}}_2(y=0) = \frac{Q}{4\pi}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} - Y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{q}{4\pi}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + Y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Vamos precisar da componente normal à superfície do deslocamento elétrico, que é a componente na direção y, ou seja,

$$\vec{\mathcal{D}}_{2_\perp} = \frac{Y}{4\pi}\frac{-Q+q}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,\hat{\mathbf{j}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{D}}_{2_\perp} = \frac{Y}{4\pi}\frac{q-Q}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,\hat{\mathbf{j}} \tag{10.22}$$

Necessitamos também da componente tangencial à junção, em $y = 0$, do campo elétrico, que é dada pelas componentes em x e z, isto é,

$$\vec{\mathcal{E}}_{2_\parallel}(y=0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}}+z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{q}{4\pi\epsilon_2}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}}+z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_{2_\parallel}(y=0) = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_2}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}}+z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{10.23}$$

Agora, devemos calcular o potencial elétrico na região $y < 0$, dentro do meio 1. Note que, nesta região, não há cargas reais, e assim, nela a solução deve satisfazer a equação de Laplace. Como existe uma carga real Q no meio 2, e como podem existir cargas de polarização nesse meio, as quais, como já vimos, atenuam o valor da carga real Q, o potencial sobre o meio 1 é gerado por uma carga q' situada na mesma posição que a da carga real Q. Eventualmente, podemos ter $q' = Q$, mas é melhor não fixar o valor de q' de antemão. Assim, no meio 1, o potencial é

$$\mathbb{V}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1}\frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}_{q'}|}$$

O campo elétrico é o gradiente negativo desta expressão, ou seja,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_1 &= -\nabla\mathbb{V}_1\\ &= -\nabla\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_1}\frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}_{q'}|}\right]\\ \vec{\mathcal{E}}_1 &= -\frac{q'}{4\pi\epsilon_1}\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_{q'}|}\right]\end{aligned}$$

Para o gradiente do termo entre colchetes, usamos a equação 5.9, e assim, obtemos

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = \frac{q'}{4\pi\epsilon_1}\frac{\vec{r}-\vec{r}_{q'}}{\left[\vec{r}-\vec{r}_{q'}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = \frac{q'}{4\pi\epsilon_1}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y-Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + (y-Y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Em $y = 0$, isto é, na interface, o campo elétrico vale

$$\vec{\mathcal{E}}_1(y=0) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_1}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} - Y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + Y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

O deslocamento elétrico é

$$\vec{\mathcal{D}}_1 = \epsilon_1\vec{\mathcal{E}}_1$$

$$\vec{\mathcal{D}}_1 = \frac{q'}{4\pi}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y-Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + (y-Y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

e, na junção, temos

$$\vec{\mathcal{D}}_1(y=0) = \frac{q'}{4\pi}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} - Y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + Y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

A componente normal do deslocamento elétrico é a componente em y, ou seja,

$$\vec{\mathcal{D}}_{1_\perp}(y=0) = -\frac{Y}{4\pi}\frac{q'}{\left[x^2 + Y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,\hat{\mathbf{j}} \qquad . \qquad (10.24)$$

ao passo que a componente tangencial do campo elétrico está nas direções x e z, e ela fica

$$\vec{\mathcal{E}}_{1_\parallel}(y=0) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_1}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + Y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad (10.25)$$

Agora precisamos considerar as condições de contorno para os vetores do campo elétrico e do deslocamento elétrico. A primeira condição, dada pela equação 10.19, envolve as componentes normais do deslocamento elétrico, ou seja,

$$\vec{\mathcal{D}}_2 \cdot \hat{n}_2 = \vec{\mathcal{D}}_1 \cdot \hat{n}_2$$

Vamos escolher como versor normal o versor $\hat{n}_2 = \hat{\mathbf{j}}$. Assim, temos

$$\vec{\mathcal{D}}_2 \cdot \hat{\mathbf{j}} = \vec{\mathcal{D}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}$$

Nesta expressão, precisamos utilizar apenas as componentes normais dos deslocamentos elétricos, dadas pelas equações 10.22 e 10.24, ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{Y}{4\pi}\frac{q-Q}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} &= -\frac{Y}{4\pi}\frac{q'}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} \\
\frac{Y}{4\pi}\frac{q-Q}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} &= -\frac{Y}{4\pi}\frac{q'}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
q-Q &= -q' \\
Q-q &= q' \qquad (10.26)
\end{aligned}$$

e assim, obtemos uma relação entre as três cargas que aparecem no problema. A outra vem da segunda condição de contorno na interface, dada pela equação 10.21,

$$\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2$$

O elemento de arco no plano xz, tangente à superfície de separação entre os dielétricos, é

$$d\vec{\ell}_2 = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}$$

Portanto, usando as expressões 10.23 e 10.25, achamos

$$\begin{aligned}
\frac{q'}{4\pi\epsilon_1}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}}+z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\cdot(dx\,\hat{\mathbf{i}}+dz\,\hat{\mathbf{k}}) &= \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_2}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}}+z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\cdot(dx\,\hat{\mathbf{i}}+dz\,\hat{\mathbf{k}}) \\
\frac{q'}{4\pi\epsilon_1}\frac{xdx+zdz}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} &= \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_2}\frac{xdx+zdz}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{q'}{\epsilon_1} &= \frac{Q+q}{\epsilon_2} \\
Q+q &= \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}q' \qquad (10.27)
\end{aligned}$$

Reunindo as equações 10.27 e 10.27, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} Q-q = q' \\ Q+q = \dfrac{\epsilon_2}{\epsilon_1}q' \end{cases}$$

Somando estas equações, encontramos

$$
\begin{aligned}
2Q &= q' + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} q' \\
2Q &= q' \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\epsilon_1} \\
q' &= Q \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}
\end{aligned}
\tag{10.28}
$$

e, desse modo, a carga q' é uma fração da carga Q. A carga q é obtida mediante a subtração das equações do sistema de equações, ou seja,

$$
\begin{aligned}
-2q &= q' - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} q' \\
-2q &= q' \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1} \\
q &= Q \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1} \\
q &= Q \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}
\end{aligned}
\tag{10.29}
$$

Com estes valores para as cargas q e q', os campos elétricos ficam

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}_1 &= \frac{Q \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}{4\pi\epsilon_1} \frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y - Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + (y - Y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
\vec{\mathcal{E}}_1 &= \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y - Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + (y - Y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

para o meio 1, e

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}_2 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_2} \frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y - Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + (y - Y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Q \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}{4\pi\epsilon_2} \frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y + Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + (y + Y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
\vec{\mathcal{E}}_2 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_2} \left[\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y - Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + (y - Y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y + Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + (y + Y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right]
\end{aligned}
$$

para o meio 2. Os deslocamentos elétricos são

$$
\vec{\mathcal{D}}_1 = \epsilon_1 \vec{\mathcal{E}}_1
$$

$$\vec{\mathcal{D}}_1 = \frac{Q\epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}}+(y-Y)\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+(y-Y)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$\vec{\mathcal{D}}_2 = \epsilon_2\vec{\mathcal{E}}_2$$
$$\vec{\mathcal{D}}_2 = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{x\,\hat{\mathbf{i}}+(y-Y)\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+(y-Y)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{\epsilon_2-\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}}+(y+Y)\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+(y+Y)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Por fim, as polarizações tornam-se

$$\vec{\mathcal{P}}_1 = \chi_1\vec{\mathcal{E}}_1$$
$$\vec{\mathcal{P}}_1 = \frac{\chi_1 Q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}}+(y-Y)\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+(y-Y)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$\vec{\mathcal{P}}_2 = \chi_2\vec{\mathcal{E}}_2$$
$$\vec{\mathcal{P}}_2 = \frac{\chi_2 Q}{4\pi\epsilon_2}\left[\frac{x\,\hat{\mathbf{i}}+(y-Y)\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+(y-Y)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{\epsilon_2-\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}}+(y+Y)\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+(y+Y)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

A densidade superficial de carga de polarização é dada por

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}\cdot\hat{n}$$

sendo $\hat{n}$ a normal à superfície para fora do dielétrico. Assim, na interface, para o meio 1 a normal é $\hat{\mathbf{j}}$, ao passo que, para o meio 2 ela vale $-\hat{\mathbf{j}}$. As densidades superficiais de carga de polarização são

$$\sigma_{\mathcal{P}_1} = \vec{\mathcal{P}}_1\cdot\hat{\mathbf{j}}$$
$$\sigma_{\mathcal{P}_2} = -\vec{\mathcal{P}}_2\cdot\hat{\mathbf{j}}$$

A densidade superficial total de carga de polarização é a soma das duas densidades de carga, isto é,

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \sigma_{\mathcal{P}_1}+\sigma_{\mathcal{P}_2}$$
$$\sigma_{\mathcal{P}} = (\vec{\mathcal{P}}_1-\vec{\mathcal{P}}_2)\cdot\hat{\mathbf{j}}$$

ou, lembrando que devemos calcular as polarizações em $y = 0$,

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \left\{ \frac{\chi_1 Q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)} \frac{x\,\hat{\mathbf{i}} - Y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\chi_2 Q}{4\pi\epsilon_2}\left[\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} - Y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\epsilon_2-\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2} \frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + Y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right] \right\} \cdot \hat{\mathbf{j}}$$

e então,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{P}} &= -\left\{ \frac{\chi_1}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)} - \frac{\chi_2}{4\pi\epsilon_2}\left[1 - \frac{\epsilon_2-\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2}\right] \right\} \frac{QY}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\left\{ \frac{\chi_1}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)} - \frac{\chi_2}{2\pi\epsilon_2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2} \right\} \frac{QY}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{1}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left\{ \chi_1 - \frac{\chi_2\epsilon_1}{\epsilon_2} \right\} \frac{QY}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{1}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)} \frac{\epsilon_2\chi_1 - \chi_2\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{QY}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{1}{2\pi\epsilon_2(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[\epsilon_2(\epsilon_1-\epsilon_0) - (\epsilon_2-\epsilon_0)\epsilon_1\right] \frac{QY}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
\sigma_{\mathcal{P}} &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_2(\epsilon_1+\epsilon_2)} \epsilon_0(\epsilon_1-\epsilon_2) \frac{QY}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

ou

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \frac{Q}{2\pi} \frac{\epsilon_0(\epsilon_2-\epsilon_1)}{\epsilon_2(\epsilon_1+\epsilon_2)} \frac{Y}{\left[x^2+Y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Note que, quando o meio 1 é um condutor que tem $\epsilon_1 \ggg \epsilon_2$ ou, formalmente, $\epsilon_1 \to \infty$, os campos elétricos tornam-se

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}}_1 &= \lim_{\epsilon_1 \to \infty} \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)} \frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y-Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2+(y-Y)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
\vec{\mathcal{E}}_1 &= 0
\end{aligned}$$

e

$$\vec{\mathcal{E}}_2 = \lim_{\epsilon_1 \to \infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_2} \left[\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y-Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + (y-Y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y+Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + (y+Y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right]$$
$$\vec{\mathcal{E}}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2} \left[\frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y-Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + (y-Y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y+Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + (y+Y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

O campo dentro do condutor se anula, e o campo no dielétrico é aquele gerado pela carga real Q, em $Y\,\hat{\mathbf{j}}$, e pela carga-imagem $-Q$, localizada em $-Y\,\hat{\mathbf{j}}$, como foi estudado no método das imagens. A densidade superficial de carga de polarização fica

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \lim_{\epsilon_1 \to \infty} \frac{Q}{2\pi} \frac{\epsilon_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{Y}{\left[x^2 + Y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$
$$\sigma_{\mathcal{P}} = -\frac{Q}{2\pi} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \frac{Y}{\left[x^2 + Y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Além disso, quando $\epsilon_1 = \epsilon_2$, ou seja, quando temos na verdade um único meio, obtemos

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1} \frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y-Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + (y-Y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$\vec{\mathcal{E}}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1} \frac{x\,\hat{\mathbf{i}} + (y-Y)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}}{\left[x^2 + (y-Y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

e portanto, $\vec{\mathcal{E}}_1 = \vec{\mathcal{E}}_2$, como deve ser, já que não existe, de fato, uma interface entre dois meios distintos. Os deslocamentos elétricos e as polarizações também se tornam iguais, o que fica como exercício.

Exemplo 10.5. *Considere um campo elétrico uniforme na direção z, dado por $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\,\hat{\mathbf{k}}$, no vácuo. Nesse campo uniforme é colocada uma esfera dielétrica de raio R e permissividade ϵ, descarregada e isolada. A esfera perturba o campo elétrico na região próxima a ela, mas é muito pequena para alterar o campo nas regiões distantes. Obtenha, para este problema, as grandezas eletrostáticas relevantes.*

Este problema tem uma grande semelhança com o que foi estudado no exemplo 6.5. Como lá, aqui precisamos resolver a equação de Laplace dentro e fora da esfera, pois não existem cargas livres fora dela, sendo que, dentro dela, teremos, no máximo, cargas de polarização. Como a esfera não perturba o campo elétrico nas regiões distantes, nesses locais o campo é o campo inicial $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\,\hat{\mathbf{k}}$, que tem um potencial elétrico associado dado pela equação 6.63, ou seja, em coordenadas retangulares,

$$\mathbb{V}_{\mathcal{E}} = -\mathcal{E}z + \mathbb{V}_0$$

A simetria esférica do problema sugere que usemos os resultados da equação de Laplace em coordenadas esféricas, com o eixo z orientado como mostra a figura 10.16.

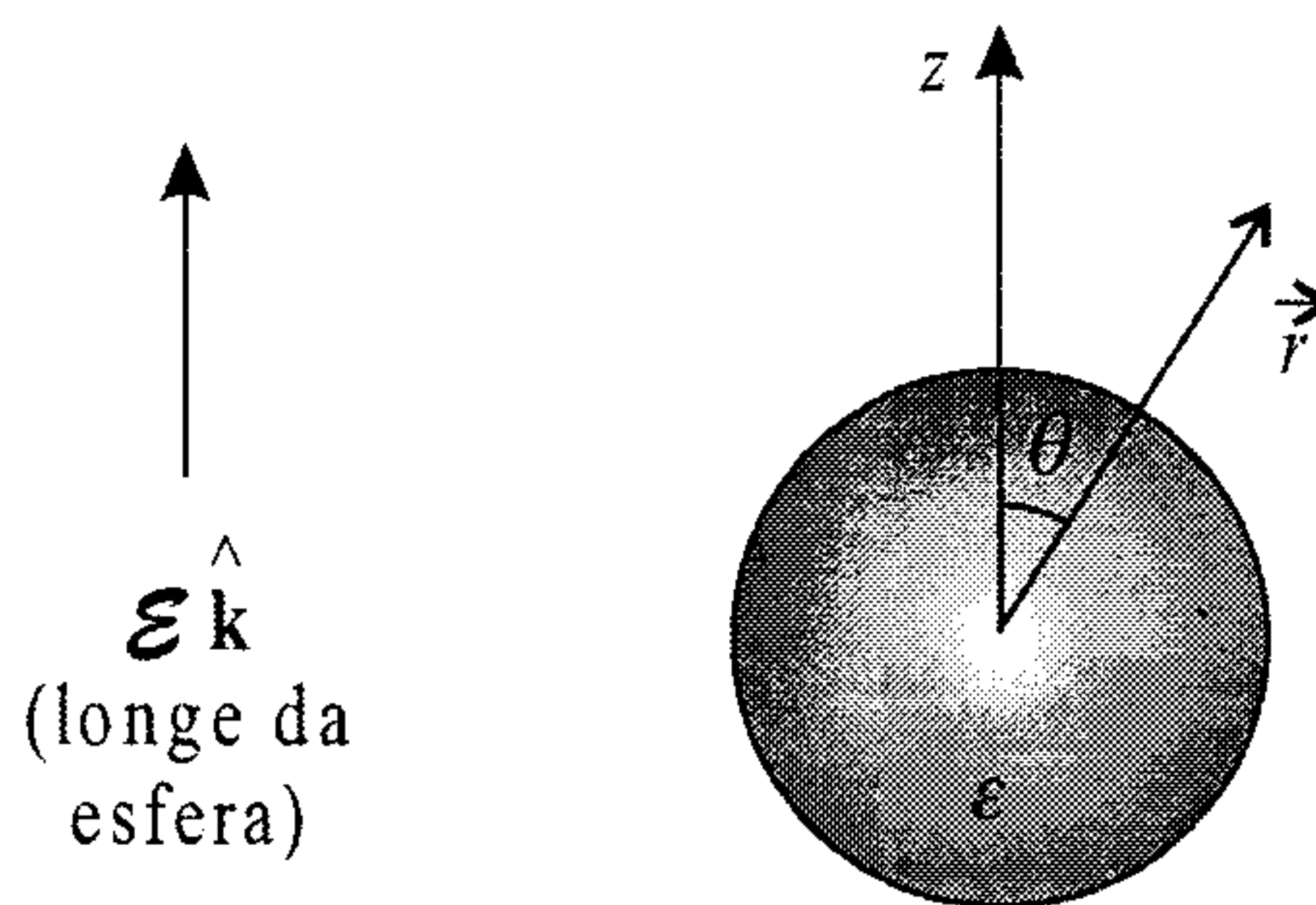



Figura 10.16: Uma esfera dielétrica de raio R e permissividade ϵ, situada num campo elétrico externo inicialmente uniforme.

Nestas coordenadas, o potencial longe da esfera fica

$$\mathbb{V}_{\mathcal{E}} = -\mathcal{E}r\cos\theta + \mathbb{V}_0$$

Além disso, por causa da simetria da situação em torno do eixo z, devemos usar a solução geral 6.60 para $m = 0$, que é

$$\mathbb{V}(r,\theta,\phi) = (a_0 + b_0\phi)\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(C_\ell r^\ell + D_\ell r^{-(\ell+1)}\right)P_\ell(\cos\theta)$$

lembrando que temos dois potenciais, um fora da esfera ($\mathbb{V}_f$) e outro dentro dela ($\mathbb{V}_d$), e também que o ângulo ϕ é ilimitado, o que faz com que $b_0 = 0$, de forma que o potencial seja unívoco. As constantes devem ser determinadas pelas condições de contorno e pela análise física do problema.

O potencial elétrico fora da esfera pode ser escrito como

$$\mathbb{V}_f(r,\theta) = C_0 + \frac{D_0}{r} + C_1 r\cos\theta + \frac{D_1}{r^2}\cos\theta + C_2 r^2 \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \frac{D_2}{r^3}\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots$$

sendo que usamos a tabela 6.2 para explicitar alguns dos polinômios de Legendre. O termo que envolve D_0 corresponde ao potencial de uma carga pontual, e ele não deve existir, já que a esfera está descarregada. Assim, $D_0 = 0$. A mesma análise vale para os coeficientes D_n, com $n \geq 2$, que representam os potenciais associados aos momentos de multipolo de ordem maior que os de dipolo. Todos eles devem se anular. O momento de dipolo deve existir, porque ele está associado à polarização elétrica que aparece na esfera quando ela é submetida ao campo externo. Quando r é muito grande, o potencial torna-se aquele associado ao campo externo homogêneo, ou seja,

$$\mathbb{V}_{\mathcal{E}} = \lim_{r\to\infty} \mathbb{V}_f(r,\theta)$$

ou

$$-\mathcal{E} r\cos\theta + \mathbb{V}_0 = C_0 + C_1 r\cos\theta + C_2 r^2\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots$$

Desta expressão, obtemos

$$C_0 = \mathbb{V}_0$$
$$C_1 = -\mathcal{E}$$
$$C_n = 0, \qquad n \geq 2$$

e assim, o potencial fora da esfera fica

$$\mathbb{V}_f(r,\theta) = \mathbb{V}_0 - \mathcal{E} r\cos\theta + \frac{D_1}{r^2}\cos\theta$$

que é, até o momento, o mesmo resultado que seria obtido se a esfera fosse condutora. A constante D_1 será obtida posteriormente, por meio das condições de contorno na interface. O potencial dentro da esfera também é uma expansão em polinômios de Legendre, dada por

$$\mathbb{V}_d(r,\theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r\cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta + A_2 r^2\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \frac{B_2}{r^3}\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots$$

Dentro da esfera não existem cargas, nem dipolos, tampouco momentos de multipolo de ordem maior. Isso significa que todos os termos que envolvem uma potência negativa de r devem se anular, para que não haja divergências em $r = 0$. Temos, portanto, $B_n = 0$, $\forall n$, e assim,

$$\mathbb{V}_d(r,\theta) = A_0 + A_1 r\cos\theta + A_2 r^2 \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots$$

Os potenciais elétricos em $r = R$ devem possuir o mesmo valor, para que o potencial seja uma função contínua. Então, devemos ter

$$\mathbb{V}_f(r = R,\theta) = \mathbb{V}_d(r = R,\theta)$$

ou

$$\mathbb{V}_0 - \mathcal{E}R\cos\theta + \frac{D_1}{R^2}\cos\theta = A_0 + A_1 R\cos\theta + A_2 R^2 \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots$$

o que implica que

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathbb{V}_0 \\ -\mathcal{E}R + \frac{D_1}{R^2} &= A_1 R \\ A_n &= 0, \qquad n \geq 2 \end{aligned}$$

Note que a constante $\mathbb{V}_0$ fica indeterminada, e como o potencial elétrico obedece ao princípio de superposição, podemos considerar que $\mathbb{V}_0 = 0$, sem perda de generalidade. A equação obtida na interface pode ser reescrita como

$$D_1 - A_1 R^3 = \mathcal{E}R^3 \tag{10.30}$$

e o potencial elétrico dentro da esfera fica

$$\mathbb{V}_d(r,\theta) = A_1 r\cos\theta$$

Para obter mais uma equação, vamos considerar as condições de contorno para os campos e deslocamentos elétricos. O campo elétrico é obtido do gradiente negativo, em coordenadas esféricas, do potencial elétrico, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V}$$

O campo elétrico fora da esfera, mediante o uso da expressão B.16 para o operador ∇, fica

$$\vec{\mathcal{E}}_f = -\left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right]\left[-\mathcal{E} r\cos\theta + \frac{D_1}{r^2}\cos\theta\right]$$

$$\vec{\mathcal{E}}_f = \left[\mathcal{E}\cos\theta + \frac{2D_1}{r^3}\cos\theta\right]\hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{D_1}{r^3}\operatorname{sen}\theta - \mathcal{E}\operatorname{sen}\theta\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_f = \left[\mathcal{E} + \frac{2D_1}{r^3}\right]\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{D_1}{r^3} - \mathcal{E}\right]\operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{10.31}$$

enquanto o campo elétrico dentro da esfera é

$$\vec{\mathcal{E}}_d = -\left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right] A_1 r\cos\theta$$

$$\vec{\mathcal{E}}_d = -A_1\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + A_1\operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{10.32}$$

A componente tangencial à superfície dos campos elétricos deve seguir a condição de contorno 10.21, que é

$$\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell}_2$$

Em esféricas, o elemento de arco sobre a superfície esférica, com r fixo, é

$$d\vec{\ell} = Rd\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + R\operatorname{sen}\theta d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

e assim obtemos, reunindo as equações 10.31, 10.32 e 10.21,

$$\left\{\left[\mathcal{E} + \frac{2D_1}{R^3}\right]\cos\theta\hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{D_1}{R^3} - \mathcal{E}\right]\operatorname{sen}\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}\cdot(Rd\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + R\operatorname{sen}\theta d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}) =$$
$$\left[-A_1\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + A_1\operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]\cdot(Rd\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + R\operatorname{sen}\theta d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}})$$

ou

$$\left[\frac{D_1}{R^3} - \mathcal{E}\right]R\operatorname{sen}\theta d\theta = A_1 R\operatorname{sen}\theta d\theta$$

$$\frac{D_1}{R^3} - \mathcal{E} = A_1$$

$$\frac{D_1}{R^3} - A_1 = \mathcal{E}$$
$$D_1 - A_1 R^3 = \mathcal{E} R^3$$

que, na verdade, é a equação 10.30, encontrada mediante a igualdade dos potenciais elétricos na suprfície. A condição de continuidade do potencial elétrico sobre a superfície e a condição de contorno do campo elétrico tangente à superfície são normalmente equivalentes entre si, e a continuidade do campo elétrico é a condição mais abrangente. Os deslocamentos elétricos são encontrados através de

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}$$

lembrando que fora da esfera temos vácuo, de permissividade ϵ_0, e que dentro dela a permissividade é ϵ. Os deslocamentos elétricos ficam, portanto,

$$\vec{\mathcal{D}}_f = \epsilon_0 \left[\mathcal{E} + \frac{2D_1}{r^3} \right] \cos\theta\, \hat{\mathbf{r}} + \epsilon_0 \left[\frac{D_1}{r^3} - \mathcal{E} \right] \operatorname{sen}\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{10.33}$$

e

$$\vec{\mathcal{D}}_d = -\epsilon A_1 \cos\theta\, \hat{\mathbf{r}} + \epsilon A_1 \operatorname{sen}\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{10.34}$$

As componentes normais à superfície do deslocamento elétrico estão sujeitas à condição de contorno 10.19,

$$\vec{\mathcal{D}}_2 \cdot \hat{n}_2 = \vec{\mathcal{D}}_1 \cdot \hat{n}_2$$

já que não há nenhuma densidade de carga real na superfície da esfera. O versor normal à superfície é dado por $\hat{\mathbf{r}}$, e portanto, reunindo as expressões 10.33, 10.34 e 10.19, obtemos, na interface em $r = R$,

$$\left\{ \epsilon_0 \left[\mathcal{E} + \frac{2D_1}{R^3} \right] \cos\theta\, \hat{\mathbf{r}} + \epsilon_0 \left[\frac{D_1}{R^3} - \mathcal{E} \right] \operatorname{sen}\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \cdot \hat{\mathbf{r}} =$$
$$\left[-\epsilon A_1 \cos\theta\, \hat{\mathbf{r}} + \epsilon A_1 \operatorname{sen}\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

ou

$$\epsilon_0 \left[\mathcal{E} + \frac{2D_1}{R^3} \right] \cos\theta = -\epsilon A_1 \cos\theta$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} + \frac{2D_1}{R^3} &= -\frac{\epsilon}{\epsilon_0}A_1 \\ \mathcal{E}R^3 + 2D_1 &= -\frac{\epsilon}{\epsilon_0}A_1R^3 \\ D_1 + \frac{\epsilon}{2\epsilon_0}A_1R^3 &= -\frac{\mathcal{E}R^3}{2} \end{aligned} \tag{10.35}$$

que é a segunda equação de que necessitamos. Reunindo as equações 10.30 e 10.35, temos o sistema de equações

$$\begin{cases} D_1 - A_1R^3 = \mathcal{E}R^3 \\ D_1 + \dfrac{\epsilon}{2\epsilon_0}A_1R^3 = -\dfrac{\mathcal{E}R^3}{2} \end{cases}$$

Subtraindo estas equações, achamos

$$\begin{aligned} -A_1R^3 - \frac{\epsilon}{2\epsilon_0}A_1R^3 &= \mathcal{E}R^3 + \frac{\mathcal{E}R^3}{2} \\ -A_1R^3\left[1 + \frac{\epsilon}{2\epsilon_0}\right] &= \frac{3\mathcal{E}R^3}{2} \\ \therefore \qquad A_1 &= -\frac{3\epsilon_0\mathcal{E}}{2\epsilon_0 + \epsilon} \end{aligned}$$

Com este valor para A_1, voltamos à primeira expressão do sistema de equações para obter D_1, ou seja,

$$D_1 + \frac{3\epsilon_0\mathcal{E}}{2\epsilon_0 + \epsilon}R^3 = \mathcal{E}R^3$$

ou

$$\begin{aligned} D_1 &= \left[1 - \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon}\right]\mathcal{E}R^3 \\ D_1 &= \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon}\mathcal{E}R^3 \end{aligned}$$

Com estas duas constantes, os potenciais elétricos ficam

$$\mathbb{V}_f(r,\theta) = -\mathcal{E}r\cos\theta + \frac{\frac{\epsilon-\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\mathcal{E}R^3}{r^2}\cos\theta$$

ou

$$\mathbb{V}_f(r,\theta) = -\mathcal{E} r\cos\theta + \frac{\epsilon-\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\frac{\mathcal{E}R^3}{r^2}\cos\theta$$

e

$$\mathbb{V}_d(r,\theta) = -\frac{3\epsilon_0\mathcal{E}}{2\epsilon_0+\epsilon} r\cos\theta$$

enquanto os campos elétricos tornam-se

$$\vec{\mathcal{E}}_f = \left[\mathcal{E} + \frac{2\frac{\epsilon-\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\mathcal{E}R^3}{r^3}\right]\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{\frac{\epsilon-\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\mathcal{E}R^3}{r^3} - \mathcal{E}\right]\operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_f = \mathcal{E}\left[1 + \frac{2(\epsilon-\epsilon_0)}{2\epsilon_0+\epsilon}\frac{R^3}{r^3}\right]\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \mathcal{E}\left[\frac{\epsilon-\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\frac{R^3}{r^3} - 1\right]\operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

e

$$\vec{\mathcal{E}}_d = \frac{3\epsilon_0\mathcal{E}}{2\epsilon_0+\epsilon}\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \frac{3\epsilon_0\mathcal{E}}{2\epsilon_0+\epsilon}\operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_d = \frac{3\epsilon_0\mathcal{E}}{2\epsilon_0+\epsilon}\left[\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]$$

Lembrando, das equações 1.38, que

$$\hat{\mathbf{k}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

obtemos, para o campo elétrico dentro da esfera dielétrica,

$$\vec{\mathcal{E}}_d = \frac{3\epsilon_0\mathcal{E}}{2\epsilon_0+\epsilon}\hat{\mathbf{k}}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}}_d = \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\vec{\mathcal{E}}$$

e assim, o campo elétrico interno é proporcional ao campo constante $\vec{\mathcal{E}}$. Como $\epsilon \geq \epsilon_0$, o campo interno nunca é maior do que o externo. Os deslocamentos elétricos são

$$\vec{\mathcal{D}}_f = \epsilon_0 \mathcal{E}\left[1 + \frac{2(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon_0 + \epsilon}\frac{R^3}{r^3}\right]\cos\theta \hat{\mathbf{r}} + \epsilon_0 \mathcal{E}\left[\frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon}\frac{R^3}{r^3} - 1\right]\operatorname{sen}\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

e

$$\vec{\mathcal{D}}_d = \frac{3\epsilon\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon}\vec{\mathcal{E}}$$

enquanto as polarizações elétricas são obtidas mediante

$$\vec{\mathcal{P}} = \chi\vec{\mathcal{E}}$$

Aqui, devemos atentar para o fato de que a susceptibilidade do vácuo é nula, já que

$$\chi = \epsilon - \epsilon_0$$

e no vácuo, $\epsilon = \epsilon_0$. Assim, a polarização fora da esfera é nula, isto é,

$$\vec{\mathcal{P}}_f = 0$$

ao passo que a polarização dentro da esfera é

$$\vec{\mathcal{P}}_d = \frac{3\chi\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon}\vec{\mathcal{E}}$$

A densidade volumétrica de carga de polarização é dada por

$$\rho_{\mathcal{P}} = -\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}$$

Como a polarização é um vetor constante, sua divergência é nula, e assim,

$$\rho_{\mathcal{P}} = 0$$

A densidade superficial de carga de polarização pode ser calculada através de

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n}$$

onde $\hat{n} = \hat{\mathbf{r}}$, no caso em estudo. A densidade superficial fica

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \frac{3\chi\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon}\vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \frac{3\chi\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon}\mathcal{E}\cos\theta$$

No entanto, a carga superficial de polarização é nula, como podemos verificar ao integrarmos a expressão acima na superfície da esfera, ou seja,

$$\begin{aligned}
Q_{\mathcal{P}} &= \int_S \sigma_{\mathcal{P}} dA \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{3\chi\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\mathcal{E}\cos\theta R^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi \\
&= \frac{3\chi\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\mathcal{E}R^2\left[\phi\right]_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\operatorname{sen}\theta d\theta \\
Q_{\mathcal{P}} &= \frac{6\pi\chi\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\mathcal{E}R^2\int_0^{\pi}\cos\theta\operatorname{sen}\theta d\theta
\end{aligned}$$

Esta integral pode ser resolvida pela substituição

$$\begin{aligned}
u &= \operatorname{sen}^2\theta \\
du &= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta \\
\frac{du}{2} &= \operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta
\end{aligned}$$

e assim, temos

$$\begin{aligned}
Q_{\mathcal{P}} &= \frac{6\pi\chi\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\mathcal{E}R^2\int_0^{\pi}\frac{du}{2} \\
&= \frac{3\pi\chi\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\mathcal{E}R^2\left[\operatorname{sen}^2\theta\right]_0^{\pi} \\
Q_{\mathcal{P}} &= 0
\end{aligned}$$

e a carga superficial de polarização é nula, bem como a carga total de polarização, como deve ser. A densidade superficial de carga de polarização produz um campo elétrico que se opõe ao campo externo, de modo que o campo no interior do dielétrico é menor do que o campo externo não perturbado $\vec{\mathcal{E}}$. A figura 10.17 apresenta as linhas de campo elétrico, e também as cargas de polarização, que aparecem sobre a superfície da esfera. Nesta figura fica claro o caráter dipolar da densidade superficial de cargas de polarização, o que explica a existência de um termo associado ao dipolo elétrico no potencial fora da esfera, que é

$$\mathbb{V}_f(r,\theta) = -\mathcal{E}r\cos\theta + \frac{\epsilon-\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\frac{\mathcal{E}R^3}{r^2}\cos\theta$$

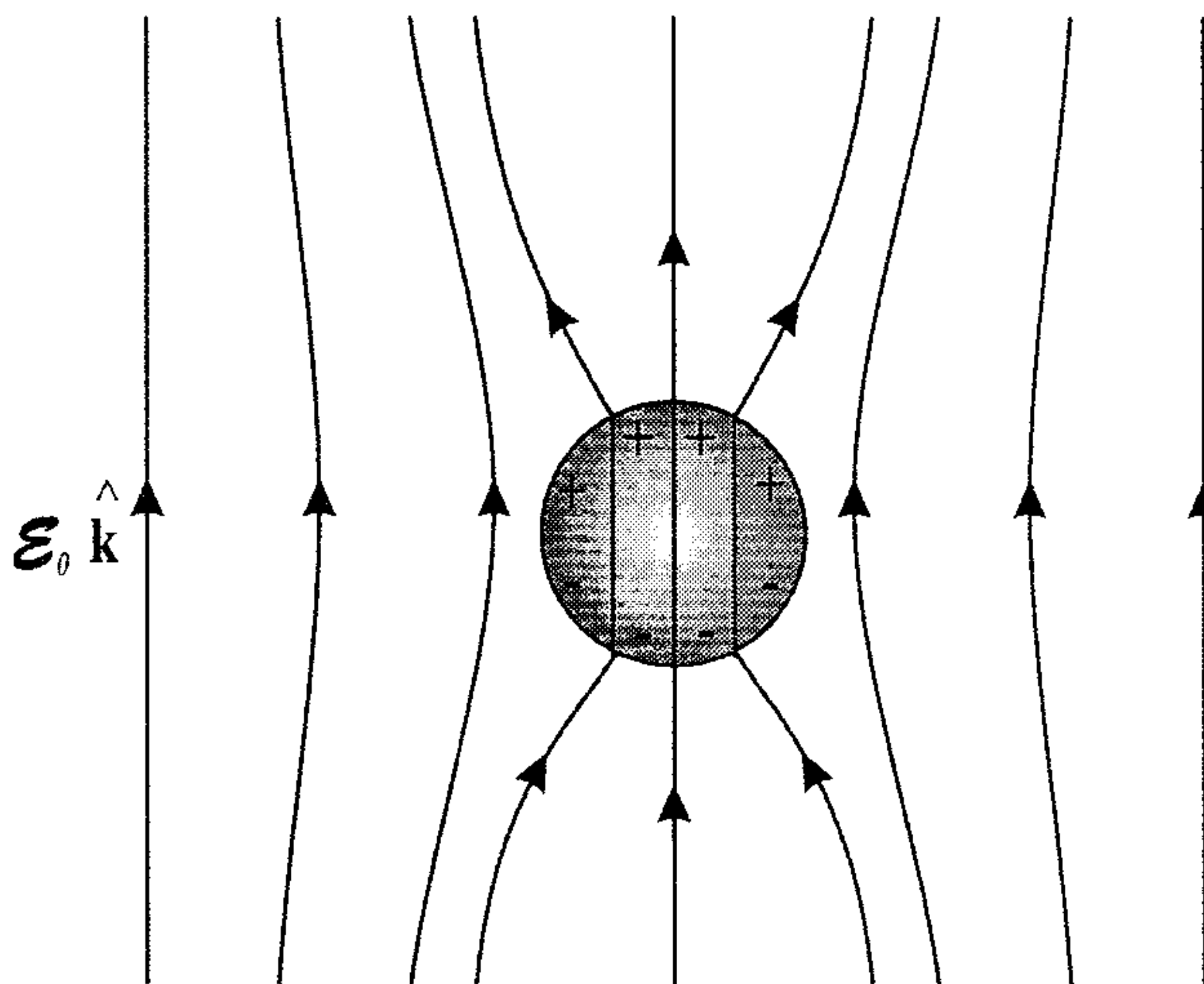



Figura 10.17: Linhas de campo elétrico e densidade de carga de polarização para a esfera no campo inicialmente uniforme.

O fator que envolve $\frac{1}{r^2}$ é característico do campo gerado por um dipolo, como já vimos anteriormente.

Exemplo 10.6. *Um cilindro dielétrico de raio R_a e permissividade ϵ_1 (meio 1) está envolto por uma coroa cilíndrica dielétrica de permissividade ϵ_2 e raios R_a e R_b (meio 2). Este sistema é colocado num campo elétrico externo $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0\,\hat{\mathbf{i}}$, que antes era uniforme. O meio externo aos cilindros, que é o meio 3, tem permissividade ϵ_0. Tanto o cilindro como a coroa cilíndrica estão descarregados e isolados, e eles podem ser considerados como infinitos. Ache as grandezas eletrostáticas relevantes para este problema, que é mostrado na figura 10.18.*

Este problema apresenta algumas semelhanças com o que foi estudado no exemplo anterior e no exemplo 6.14, em que há apenas um cilindro condutor. Um resultado importante obtido naquele problema é o potencial elétrico associado ao campo externo homogêneo $\vec{\mathcal{E}_0}$, longe dos cilindros, que é dado, em coordenadas cilíndricas, pela equação 6.115, isto é,

$$\mathbb{V}_{\mathcal{E}} = -\mathcal{E}_0 \rho \cos\theta + \mathbb{V}_0$$

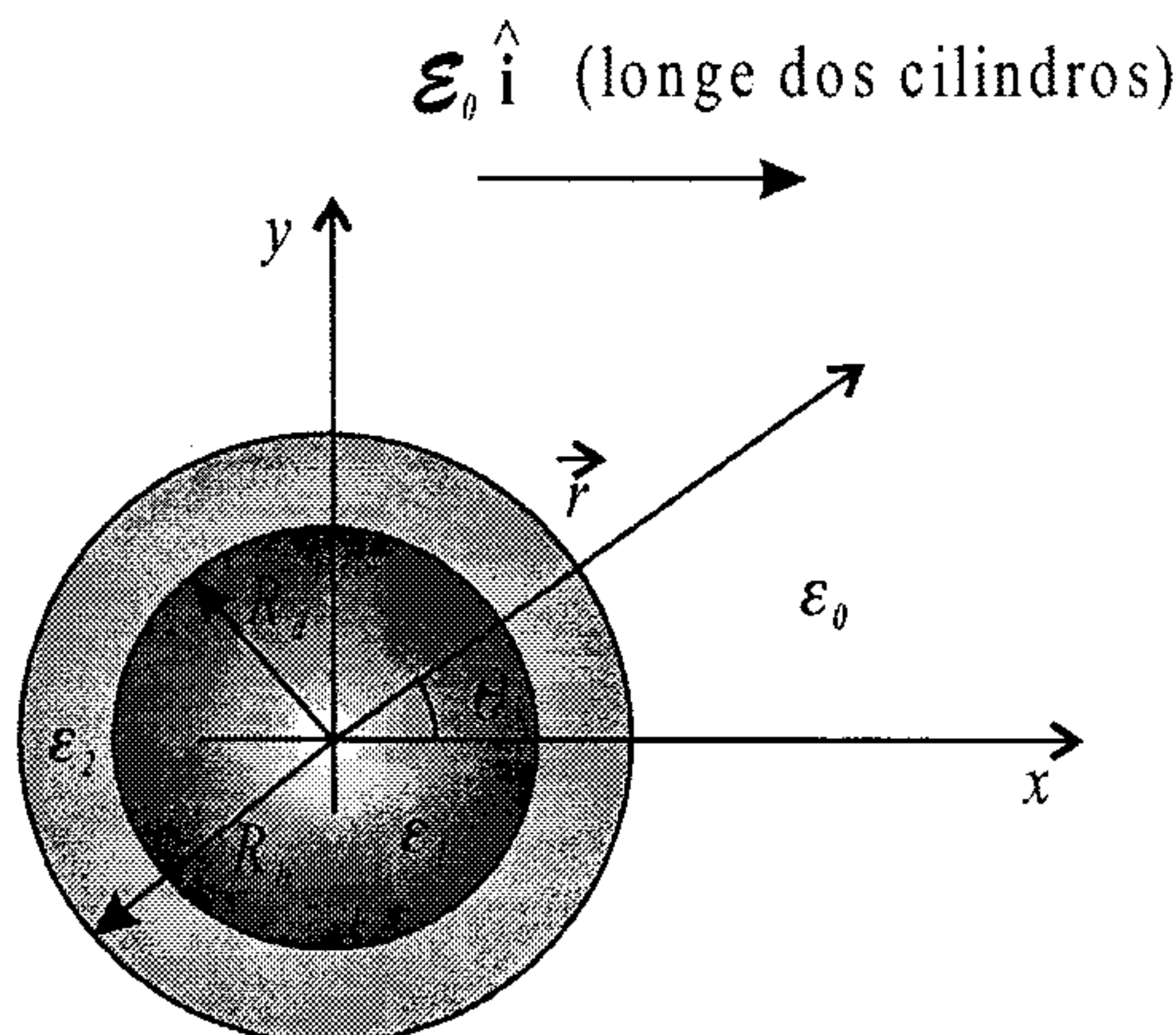



Figura 10.18: Um sistema formado por um cilindro envolto por uma casca cilíndrica, ambos dielétricos, colocados num meio com um campo elétrico inicialmente uniforme.

Para pontos bastante afastados do cilindro, o potencial no meio 3 deve reproduzir a condição acima. O problema que estamos estudando envolve a solução da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas 6.111 nos três meios, já que não há cargas reais e os cilindros são infinitos na direção z, o que faz com que $k = 0$. Além disso, não há nenhuma limitação para o ângulo θ, e portanto, ν é um número inteiro. Reunindo todas estas considerações, a solução geral torna-se

$$\mathbb{V}_{0,\nu}(\rho, \theta, z) = E_0 + F_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \sum_{\nu \neq 0} \left(E_\nu \rho^\nu + F_\nu \rho^{-\nu} \right) \left(C_\nu \cos \nu\theta + D_\nu \operatorname{sen} \nu\theta \right)$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{0,\nu}(\rho, \theta, z) = E_0 + F_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + E_1 \rho \cos \theta + \frac{F_1}{\rho} \cos \theta + G_1 \rho \operatorname{sen} \theta + \frac{H_1}{\rho} \operatorname{sen} \theta \\ + E_2 \rho^2 \cos 2\theta + \frac{F_2}{\rho^2} \cos 2\theta + G_2 \rho^2 \operatorname{sen} 2\theta + \frac{H_2}{\rho^2} \operatorname{sen} 2\theta + \cdots \end{aligned}$$

para os três meios. A determinação das constantes passa pelas considerações físicas do problema. Para o potencial elétrico no meio 3, temos

$$\mathbb{V}_3 = A_0 + B_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + A_1 \rho \cos\theta + \frac{B_1}{\rho} \cos\theta + a_1 \rho \operatorname{sen}\theta + \frac{b_1}{\rho} \operatorname{sen}\theta$$
$$+ A_2 \rho^2 \cos 2\theta + \frac{B_2}{\rho^2} \cos 2\theta + a_2 \rho^2 \operatorname{sen} 2\theta + \frac{b_2}{\rho^2} \operatorname{sen} 2\theta + \cdots$$

Este potencial, quando $\rho \to \infty$, deve ser o potencial elétrico associado ao campo elétrico homogêneo $\vec{\mathcal{E}}_0$. Assim, temos

$$\mathbb{V}_{\mathcal{E}} = \lim_{\rho \to \infty} \mathbb{V}_3$$

ou

$$- \mathcal{E}_0 \rho \cos\theta + \mathbb{V}_0 = A_0 + B_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + A_1 \rho \cos\theta$$
$$+ a_1 \rho \operatorname{sen}\theta + A_2 \rho^2 \cos 2\theta + a_2 \rho^2 \operatorname{sen} 2\theta + \cdots$$

de onde extraímos

$$A_0 = \mathbb{V}_0$$
$$B_0 = 0$$
$$A_1 = -\mathcal{E}_0$$
$$a_n = 0, \qquad n \geq 1$$
$$A_n = 0, \qquad n \geq 2$$

de modo que o potencial fica

$$\mathbb{V}_3 = \mathbb{V}_0 - \mathcal{E}_0 \rho \cos\theta + \frac{B_1}{\rho} \cos\theta + \frac{b_1}{\rho} \operatorname{sen}\theta + \frac{B_2}{\rho^2} \cos 2\theta + \frac{b_2}{\rho^2} \operatorname{sen} 2\theta + \cdots$$

Além disso, por causa da grande simetria exibida pelo sistema, o potencial elétrico nas três regiões, não só no meio 3, deve ser uma função par de θ, isto é, $\mathbb{V}(-\theta) = \mathbb{V}(\theta)$. Isso porque o campo elétrico externo era inicialmente homogêneo em todo o espaço, e também porque os dielétricos são isotrópicos. Assim, o potencial para um certo ângulo θ, como aparece na figura 10.18, deve ser o mesmo que aquele para o ângulo $-\theta$. Como conseqüência desta verificação física, os termos que envolvem os senos devem se anular, pois o seno é uma função ímpar. Portanto, $b_n = 0, \forall n$, e o potencial torna-se

$$\mathbb{V}_3 = \mathbb{V}_0 - \mathcal{E}_0 \rho \cos\theta + \frac{B_1}{\rho}\cos\theta + \frac{B_2}{\rho^2}\cos 2\theta + \cdots$$

O potencial no cilindro dielétrico (meio 1) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_1 = C_0 + D_0 \ln\frac{\rho}{\rho_0} + C_1\rho\cos\theta + \frac{D_1}{\rho}\cos\theta + c_1\rho\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{d_1}{\rho}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ + C_2\rho^2\cos 2\theta + \frac{D_2}{\rho^2}\cos 2\theta + c_2\rho^2\,\mathrm{sen}\,2\theta + \frac{d_2}{\rho^2}\,\mathrm{sen}\,2\theta + \cdots\end{aligned}$$

Como não há nenhuma carga dentro do cilindro, o potencial não pode divergir para nenhum valor de ρ, em particular para $\rho = 0$, o que significa que os coeficientes D_n são todos nulos, assim como os d_n. Os c_n se anulam porque eles aparecem nos fatores que envolvem as funções seno, e como já foi dito, o potencial deve ser uma função par, e essas funções não podem aparecer. O potencial no cilindro fica

$$\mathbb{V}_1 = C_0 + C_1\rho\cos\theta + C_2\rho^2\cos 2\theta + \cdots$$

Por fim, o potencial na coroa esférica é

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_2 = E_0 + F_0 \ln\frac{\rho}{\rho_0} + E_1\rho\cos\theta + \frac{F_1}{\rho}\cos\theta + e_1\rho\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{f_1}{\rho}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ + E_2\rho^2\cos 2\theta + \frac{F_2}{\rho^2}\cos 2\theta + e_2\rho^2\,\mathrm{sen}\,2\theta + \frac{f_2}{\rho^2}\,\mathrm{sen}\,2\theta + \cdots\end{aligned}$$

e em princípio, a única consideração que podemos fazer é a anulação dos termos que envolvem os senos, ou seja, $e_n = f_n = 0$, $\forall n$, pois ρ não pode ser nulo nem tender a infinito, e estes limites não podem ser usados para obter mais informações sobre as constantes. O potencial torna-se, então,

$$\mathbb{V}_2 = E_0 + F_0 \ln\frac{\rho}{\rho_0} + E_1\rho\cos\theta + \frac{F_1}{\rho}\cos\theta + E_2\rho^2\cos 2\theta + \frac{F_2}{\rho^2}\cos 2\theta + \cdots$$

Em todas as interfaces o potencial é contínuo. Em $\rho = R_a$, os potenciais do cilindro e da coroa devem ser iguais. Além disso, vamos escolher $\rho_0 = R_a$, o que, como já vimos antes, não influi no resultado final. Assim,

$$\mathbb{V}_1(\rho = R_a) = \mathbb{V}_2(\rho = R_a)$$

ou

$$C_0 + C_1 R_a \cos\theta + C_2 R_a^2 \cos 2\theta + \cdots = E_0 + F_0 \ln \frac{R_a}{R_a}$$
$$+ E_1 R_a \cos\theta + \frac{F_1}{R_a}\cos\theta + E_2 R_a^2 \cos 2\theta + \frac{F_2}{R_a^2}\cos 2\theta + \cdots$$

de onde obtemos

$$C_0 = E_0 \tag{10.36a}$$
$$C_1 R_a = E_1 R_a + \frac{F_1}{R_a} \tag{10.36b}$$
$$C_2 R_a^2 = E_2 R_a^2 + \frac{F_2}{R_a^2} \tag{10.36c}$$
$$C_n R_a^n = E_n R_a^n + \frac{F_n}{R_a^n} \tag{10.36d}$$

Em $\rho = R_b$, os potenciais da coroa e do meio externo devem ser iguais, isto é,

$$\mathbb{V}_2(\rho = R_b) = \mathbb{V}_3(\rho = R_b)$$

ou

$$E_0 + F_0 \ln \frac{R_b}{R_a} + E_1 R_b \cos\theta + \frac{F_1}{R_b}\cos\theta + E_2 R_b^2 \cos 2\theta$$
$$+ \frac{F_2}{R_b^2}\cos 2\theta + \cdots = \mathbb{V}_0 - \mathcal{E}_0 R_b \cos\theta + \frac{B_1}{R_b}\cos\theta + \frac{B_2}{R_b^2}\cos 2\theta + \cdots$$

que fornece as seguintes relações:

$$E_0 + F_0 \ln \frac{R_b}{R_a} = \mathbb{V}_0 \tag{10.37a}$$
$$E_1 R_b + \frac{F_1}{R_b} = -\mathcal{E}_0 R_b + \frac{B_1}{R_b} \tag{10.37b}$$
$$E_n R_b^n + \frac{F_n}{R_b^n} = \frac{B_n}{R_b^n} \tag{10.37c}$$

Agora, precisamos utilizar a condição de contorno para os deslocamentos elétricos nas interfaces, o que implica que devemos calcular o campo elétrico, mediante o gradiente negativo do potencial elétrico. O operador ∇ em cilíndricas, dado pela equação B.6, é

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}$$

e o campo elétrico do meio 3 é

$$\vec{\mathcal{E}}_3 = -\nabla \mathbb{V}_3$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_3 = - \left[\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[\mathbb{V}_0 - \mathcal{E}_0\rho\cos\theta + \frac{B_1}{\rho}\cos\theta + \frac{B_2}{\rho^2}\cos 2\theta + \cdots\right]$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}}_3 = \left[\mathcal{E}_0\cos\theta + \frac{B_1}{\rho^2}\cos\theta + \frac{2B_2}{\rho^3}\cos 2\theta + \cdots\right]\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left[-\mathcal{E}_0\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{B_1}{\rho^2}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{2B_2}{\rho^3}\,\mathrm{sen}\,2\theta + \cdots\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

O deslocamento elétrico fica

$$\vec{\mathcal{D}}_3 = \epsilon_0\left[\mathcal{E}_0\cos\theta + \frac{B_1}{\rho^2}\cos\theta + \frac{2B_2}{\rho^3}\cos 2\theta + \cdots\right]\hat{\boldsymbol{\rho}} + \epsilon_0\left[-\mathcal{E}_0\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{B_1}{\rho^2}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{2B_2}{\rho^3}\,\mathrm{sen}\,2\theta + \cdots\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

O campo elétrico no meio 1 torna-se

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = -\nabla \mathbb{V}_1$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = -\left[\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[C_0 + C_1\rho\cos\theta + C_2\rho^2\cos 2\theta + \cdots\right]$$

ou então,

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = -\left[C_1\cos\theta + 2C_2\rho\cos 2\theta + \cdots\right]\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left[C_1\,\mathrm{sen}\,\theta + 2C_2\rho^2\,\mathrm{sen}\,2\theta + \cdots\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

O campo elétrico dentro do cilindro deve ser semelhante ao campo elétrico dentro da esfera dielétrica discutida no exemplo anterior, que aparece na figura 10.17, já que, se considerarmos um corte nas figuras 10.16 e 10.18, feito no plano da página, as duas situações físicas são completamente equivalentes. Isso nos indica que o campo dentro do cilindro deve ter apenas uma componente paralela ao campo externo, o qual, por sua vez, está na direção x. Vamos reescrever o campo elétrico como

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = -C_1(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}) - 2C_2\rho(\cos 2\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \rho\operatorname{sen}2\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \cdots$$

Lembrando, pelas equações 1.32, que

$$\hat{\mathbf{i}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

temos

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = -C_1\,\hat{\mathbf{i}} - 2C_2\rho(\cos 2\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \rho\operatorname{sen}2\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \cdots$$

Observe que o único termo que está na direção x é o que envolve o coeficiente C_1. Os outros têm componentes em x e y, e isso não deve ocorrer. Portanto, os outros coeficientes C_n, com $n \geq 2$, devem se anular, ou seja, $C_n = 0$, $\forall n \geq 2$. Com esta consideração, o campo elétrico fica

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = -C_1\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - C_1\operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = -C_1\,\hat{\mathbf{i}}$$

enquanto o potencial no meio 1 torna-se

$$\mathbb{V}_1 = C_0 + C_1\rho\cos\theta$$

e o deslocamento elétrico resulta em

$$\vec{\mathcal{D}}_1 = -\epsilon_1 C_1\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \epsilon_1 C_1\operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\epsilon_1 C_1\,\hat{\mathbf{i}}$$

Além disso, as relações 10.36 devem ser reescritas como

$$C_0 = E_0 \tag{10.38a}$$

$$C_1 R_a = E_1 R_a + \frac{F_1}{R_a} \tag{10.38b}$$

$$E_2 = -\frac{F_2}{R_a^4} \tag{10.38c}$$

$$E_n = -\frac{F_n}{R_a^{2n}} \tag{10.38d}$$

Por fim, o campo elétrico no meio 2 é

$$\vec{\mathcal{E}}_2 = -\nabla \mathbb{V}_2$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_2 = -\left[\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]$$
$$\left[E_0 + F_0 \ln\frac{\rho}{R_a} + E_1\rho\cos\theta + \frac{F_1}{\rho}\cos\theta + E_2\rho^2\cos 2\theta + \frac{F_2}{\rho^2}\cos 2\theta + \cdots\right]$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}}_2 = -\left[\frac{F_0}{\rho} + E_1\cos\theta - \frac{F_1}{\rho^2}\cos\theta + 2E_2\rho\cos 2\theta - \frac{2F_2}{\rho^3}\cos 2\theta + \cdots\right]\hat{\boldsymbol{\rho}}$$
$$+ \left[E_1 \operatorname{sen}\theta + \frac{F_1}{\rho^2}\operatorname{sen}\theta + 2E_2\rho\operatorname{sen}2\theta + \frac{2F_2}{\rho^3}\operatorname{sen}2\theta + \cdots\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

e assim, o deslocamento elétrico fica

$$\vec{\mathcal{D}}_2 = -\epsilon_2\left[\frac{F_0}{\rho} + E_1\cos\theta - \frac{F_1}{\rho^2}\cos\theta + 2E_2\rho\cos 2\theta - \frac{2F_2}{\rho^3}\cos 2\theta + \cdots\right]\hat{\boldsymbol{\rho}}$$
$$+ \epsilon_2\left[E_1 \operatorname{sen}\theta + \frac{F_1}{\rho^2}\operatorname{sen}\theta + 2E_2\rho\operatorname{sen}2\theta + \frac{2F_2}{\rho^3}\operatorname{sen}2\theta + \cdots\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Agora, precisamos utilizar a condição de contorno 10.19, já que não há densidades de cargas reais nas interfaces. Começando com a junção entre o cilindro e a coroa cilíndrica, em $\rho = R_a$, obtemos, lembrando que $\hat{n} = \hat{\boldsymbol{\rho}}$,

$$\vec{\mathcal{D}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} = \vec{\mathcal{D}}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

ou

$$\left\{-\epsilon_1 C_1 \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \epsilon_1 C_1 \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}} =$$
$$\left\{-\epsilon_2\left[\frac{F_0}{R_a} + E_1\cos\theta - \frac{F_1}{R_a^2}\cos\theta + 2E_2R_a\cos 2\theta - \frac{2F_2}{R_a^3}\cos 2\theta + \cdots\right]\hat{\boldsymbol{\rho}}\right.$$
$$\left. + \epsilon_2\left[E_1\operatorname{sen}\theta + \frac{F_1}{R_a^2}\operatorname{sen}\theta + 2E_2R_a\operatorname{sen}2\theta + \frac{2F_2}{R_a^3}\operatorname{sen}2\theta + \cdots\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

ou então,

$$\epsilon_1 C_1 \cos\theta = \epsilon_2 \left[\frac{F_0}{R_a} + E_1 \cos\theta - \frac{F_1}{R_a^2} \cos\theta + 2E_2 R_a \cos 2\theta - \frac{2F_2}{R_a^3} \cos 2\theta + \cdots \right]$$

de onde extraímos as relações

$$F_0 = 0 \tag{10.39a}$$

$$\epsilon_1 C_1 = \epsilon_2 \left(E_1 - \frac{F_1}{R_a^2} \right) \tag{10.39b}$$

$$E_2 = \frac{F_2}{R_a^4} \tag{10.39c}$$

$$E_n = \frac{F_n}{R_a^{2n}} \tag{10.39d}$$

As expressões 10.38 e 10.39 podem ser combinadas para dar

$$C_0 = E_0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left(E_1 - \frac{F_1}{R_a^2} \right) &= E_1 + \frac{F_1}{R_a^2} \\
\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_1 - E_1 &= \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{F_1}{R_a^2} + \frac{F_1}{R_a^2} \\
\left[\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - 1 \right] E_1 &= \frac{F_1}{R_a^2} \left[\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} + 1 \right] \\
\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1} E_1 &= \frac{F_1}{R_a^2} \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{\epsilon_1} \\
E_1 &= \frac{F_1}{R_a^2} \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \qquad (10.40)
\end{aligned}$$

Pela equação 10.38b, temos

$$C_1 R_a = E_1 R_a + \frac{F_1}{R_a}$$

e assim, achamos

$$C_1 = \frac{F_1}{R_a^2} \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} + \frac{F_1}{R_a^2}$$

$$C_1 = \frac{F_1}{R_a^2}\left[\frac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1}+1\right]$$
$$= \frac{F_1}{R_a^2}\frac{\epsilon_2+\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1}$$
$$C_1 = \frac{F_1}{R_a^2}\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2-\epsilon_1} \tag{10.41}$$

Temos também, pelas equações 10.38d e 10.39d, as expressões

$$E_n = -\frac{F_n}{R_a^{2n}}$$

e

$$E_n = \frac{F_n}{R_a^{2n}}$$

que devem ser satisfeitas ao mesmo tempo, o que implica que $E_n = F_n = 0$, para $n \geq 2$. Os potenciais do cilindro e da coroa ficam

$$\mathbb{V}_1 = E_0 + \frac{F_1}{R_a^2}\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2-\epsilon_1}\rho\cos\theta$$

e

$$\mathbb{V}_2 = E_0 + \frac{F_1}{R_a^2}\frac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1}\rho\cos\theta + \frac{F_1}{\rho}\cos\theta$$

enquanto os campos elétricos são

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = -\frac{F_1}{R_a^2}\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2-\epsilon_1}\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \frac{F_1}{R_a^2}\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2-\epsilon_1}\operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

e

$$\vec{\mathcal{E}}_2 = -\left[\frac{F_1}{R_a^2}\frac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1}\cos\theta - \frac{F_1}{\rho^2}\cos\theta\right]\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left[\frac{F_1}{R_a^2}\frac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1}\operatorname{sen}\theta + \frac{F_1}{\rho^2}\operatorname{sen}\theta\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Além disso, as relações 10.37 se simplificam, resultando em

$$E_0 = \mathbb{V}_0$$

$$
\begin{aligned}
E_1 R_b + \frac{F_1}{R_b} &= -\mathcal{E}_0 R_b + \frac{B_1}{R_b} \\
\frac{F_1}{R_a^2}\frac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1} R_b + \frac{F_1}{R_b} &= -\mathcal{E}_0 R_b + \frac{B_1}{R_b} \\
\frac{F_1}{R_a^2}\frac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1} + \frac{F_1}{R_b^2} + \mathcal{E}_0 &= \frac{B_1}{R_b^2}
\end{aligned}
\tag{10.42}
$$

e

$$
B_n = 0, \qquad n \geq 2
$$

Com estas condições, o potencial no meio externo fica

$$
\mathbb{V}_3 = \mathbb{V}_0 - \mathcal{E}_0 \rho \cos\theta + \frac{B_1}{\rho}\cos\theta
$$

enquanto o campo elétrico é

$$
\vec{\mathcal{E}}_3 = \left[\mathcal{E}_0 \cos\theta + \frac{B_1}{\rho^2}\cos\theta\right]\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left[-\mathcal{E}_0 \operatorname{sen}\theta + \frac{B_1}{\rho^2}\operatorname{sen}\theta\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}
$$

e o deslocamento elétrico resulta em

$$
\vec{\mathcal{D}}_3 = \epsilon_0\left[\mathcal{E}_0 \cos\theta + \frac{B_1}{\rho^2}\cos\theta\right]\hat{\boldsymbol{\rho}} + \epsilon_0\left[-\mathcal{E}_0 \operatorname{sen}\theta + \frac{B_1}{\rho^2}\operatorname{sen}\theta\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}
$$

Em $\rho = R_b$, os deslocamentos elétricos da coroa e do meio externo devem seguir a condição de contorno

$$
\vec{\mathcal{D}}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} = \vec{\mathcal{D}}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
&\left\{-\epsilon_2\left[\frac{F_1}{R_a^2}\frac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1}\cos\theta - \frac{F_1}{R_b^2}\cos\theta\right]\hat{\boldsymbol{\rho}}\right. \\
&\quad \left. + \epsilon_2\left[\frac{F_1}{R_a^2}\frac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1}\operatorname{sen}\theta + \frac{F_1}{R_b^2}\operatorname{sen}\theta\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} = \left\{\epsilon_0\left[\mathcal{E}_0\cos\theta + \frac{B_1}{R_b^2}\cos\theta\right]\hat{\boldsymbol{\rho}}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \epsilon_0\left[-\mathcal{E}_0\operatorname{sen}\theta + \frac{B_1}{R_b^2}\operatorname{sen}\theta\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}
\end{aligned}
$$

ou então,

$$-\epsilon_2\left[\frac{F_1}{R_a^2}\frac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1}\cos\theta-\frac{F_1}{R_b^2}\cos\theta\right]=\epsilon_0\left[\mathcal{E}_0\cos\theta+\frac{B_1}{R_b^2}\cos\theta\right]$$

$$-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}\left[\frac{F_1}{R_a^2}\frac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1}-\frac{F_1}{R_b^2}\right]-\mathcal{E}_0=\frac{B_1}{R_b^2}$$

Reunindo esta equação com a expressão 10.42, temos o sistema de equações

$$\begin{cases}\dfrac{F_1}{R_a^2}\dfrac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1}+\dfrac{F_1}{R_b^2}+\mathcal{E}_0=\dfrac{B_1}{R_b^2}\\ -\dfrac{\epsilon_2}{\epsilon_0}\left[\dfrac{F_1}{R_a^2}\dfrac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1}-\dfrac{F_1}{R_b^2}\right]-\mathcal{E}_0=\dfrac{B_1}{R_b^2}\end{cases}$$

Igualando estas equações, encontramos

$$\frac{F_1}{R_a^2}\frac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1}+\frac{F_1}{R_b^2}+\mathcal{E}_0=-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}\left[\frac{F_1}{R_a^2}\frac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1}-\frac{F_1}{R_b^2}\right]-\mathcal{E}_0$$

$$\frac{F_1}{R_a^2}\frac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1}\left[1+\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}\right]+\frac{F_1}{R_b^2}\left[1-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}\right]=-2\mathcal{E}_0$$

$$\frac{F_1}{\epsilon_0}\left[\frac{(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)}{R_a^2(\epsilon_2-\epsilon_1)}+\frac{\epsilon_0-\epsilon_2}{R_b^2}\right]=-2\mathcal{E}_0$$

ou

$$\frac{F_1}{\epsilon_0}\left[\frac{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)}{R_a^2R_b^2(\epsilon_2-\epsilon_1)}\right]=-2\mathcal{E}_0$$

ou ainda,

$$F_1=\frac{2\mathcal{E}_0\epsilon_0R_a^2R_b^2(\epsilon_1-\epsilon_2)}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)}$$

Voltando agora a qualquer uma das expressões do sistema de equações, achamos

$$\frac{\frac{2\mathcal{E}_0\epsilon_0R_a^2R_b^2(\epsilon_1-\epsilon_2)}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)}}{R_a^2}\frac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1}$$

$$+\frac{\frac{2\mathcal{E}_0\epsilon_0R_a^2R_b^2(\epsilon_1-\epsilon_2)}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)}}{R_b^2}+\mathcal{E}_0=\frac{B_1}{R_b^2}$$

ou

$$-\frac{2\mathcal{E}_0\epsilon_0 R_b^2(\epsilon_2+\epsilon_1)}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)} + \frac{2\mathcal{E}_0\epsilon_0 R_a^2(\epsilon_1-\epsilon_2)}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)} + \mathcal{E}_0 = \frac{B_1}{R_b^2}$$

ou ainda,

$$\frac{2\mathcal{E}_0\epsilon_0\left[R_a^2(\epsilon_1-\epsilon_2)-R_b^2(\epsilon_2+\epsilon_1)\right]}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)} + \mathcal{E}_0 = \frac{B_1}{R_b^2}$$

e então,

$$B_1 = \frac{2\mathcal{E}_0\epsilon_0 R_b^2\left[R_a^2(\epsilon_1-\epsilon_2)-R_b^2(\epsilon_2+\epsilon_1)\right]}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)} + \mathcal{E}_0 R_b^2$$

O coeficiente E_1 é calculado através da equação 10.40, ou seja,

$$E_1 = \frac{\frac{2\mathcal{E}_0\epsilon_0 R_a^2 R_b^2(\epsilon_1-\epsilon_2)}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)}}{R_a^2}\frac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1}$$

$$E_1 = -\frac{2\mathcal{E}_0\epsilon_0 R_b^2(\epsilon_2+\epsilon_1)}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)}$$

e o coeficiente C_1 é obtido mediante a expressão 10.41, isto é,

$$C_1 = \frac{\frac{2\mathcal{E}_0\epsilon_0 R_a^2 R_b^2(\epsilon_1-\epsilon_2)}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)}}{R_a^2}\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2-\epsilon_1}$$

$$C_1 = -\frac{4\mathcal{E}_0\epsilon_0\epsilon_2 R_b^2}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)}$$

De posse de todos esses coeficientes, os potenciais elétricos podem ser escritos como

$$\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_0 + \frac{\frac{2\mathcal{E}_0\epsilon_0 R_a^2 R_b^2(\epsilon_1-\epsilon_2)}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)}}{R_a^2}\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2-\epsilon_1}\rho\cos\theta$$

$$\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_0 - \frac{4\mathcal{E}_0\epsilon_0\epsilon_2 R_b^2}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)}\rho\cos\theta$$

$$\mathbb{V}_2 = \mathbb{V}_0 + \frac{\frac{2\mathcal{E}_0\epsilon_0 R_a^2 R_b^2(\epsilon_1-\epsilon_2)}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)}}{R_a^2}\frac{\epsilon_2+\epsilon_1}{\epsilon_2-\epsilon_1}\rho\cos\theta + \frac{\frac{2\mathcal{E}_0\epsilon_0 R_a^2 R_b^2(\epsilon_1-\epsilon_2)}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)}}{\rho}\cos\theta$$

ou

$$\mathbb{V}_2 = \mathbb{V}_0 - \frac{2\mathcal{E}_0\epsilon_0(\epsilon_2+\epsilon_1)R_b^2}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)}\rho\cos\theta + \frac{2\mathcal{E}_0\epsilon_0 R_a^2 R_b^2(\epsilon_1-\epsilon_2)}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)}\frac{\cos\theta}{\rho}$$

e

$$\mathbb{V}_3 = \mathbb{V}_0 - \mathcal{E}_0\rho\cos\theta + \frac{\frac{2\mathcal{E}_0\epsilon_0 R_b^2\left[R_a^2(\epsilon_1-\epsilon_2)-R_b^2(\epsilon_2+\epsilon_1)\right]}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)} + \mathcal{E}_0 R_b^2}{\rho}\cos\theta$$

ou

$$\mathbb{V}_3 = \mathbb{V}_0 - \mathcal{E}_0\rho\cos\theta + \left[\frac{2\epsilon_0\left[R_a^2(\epsilon_1-\epsilon_2)-R_b^2(\epsilon_2+\epsilon_1)\right]}{R_b^2(\epsilon_0+\epsilon_2)(\epsilon_2+\epsilon_1)+R_a^2(\epsilon_0-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_1)}+1\right]\frac{\mathcal{E}_0 R_b^2}{\rho}\cos\theta$$

e os campos elétricos podem ser obtidos mediante o gradiente negativo destes potenciais, o que é deixado como exercício (veja o exercício 10.5), assim como os deslocamentos, as polarizações e as densidades de carga de polarização. Este exemplo encerra a discussão sobre as condições de contorno nos dielétricos. Vamos voltar ao estudo microscópico destes materiais, agora sob o ponto de vista quantitativo.

10.4 Visão Microscópica Quantitativa dos Dielétricos

Na seção 10.1 estudamos qualitativamente os processos que ocorrem nos dielétricos quando eles são submetidos a campos elétricos externos. De uma

forma geral, dois fenômenos acontecem: os dipolos intrínsecos que existem no meio dielétrico tendem a se orientar na direção do campo externo, e aparecem dipolos induzidos que também se orientam na direção do campo externo. Nos dois casos, a orientação dos dipolos produz, por sua vez, um campo elétrico macroscópico $\vec{\mathcal{E}}_d$, que se soma ao campo externo, gerando um campo resultante. Esse campo resultante age novamente sobre os dipolos até que a situação de equilíbrio seja atingida, quando então um campo macroscópico $\vec{\mathcal{E}}_{\text{int}}$ se estabelece dentro do dielétrico, sendo que $\vec{\mathcal{E}}_{\text{int}} < \vec{\mathcal{E}}$. Entretanto, esses campos são macroscópicos, e para estudar um único dipolo do material dielétrico, precisamos do campo molecular microscópico $\vec{\mathcal{E}}_m$ que age sobre ele. Para obtê-lo, vamos observar a figura 10.19.

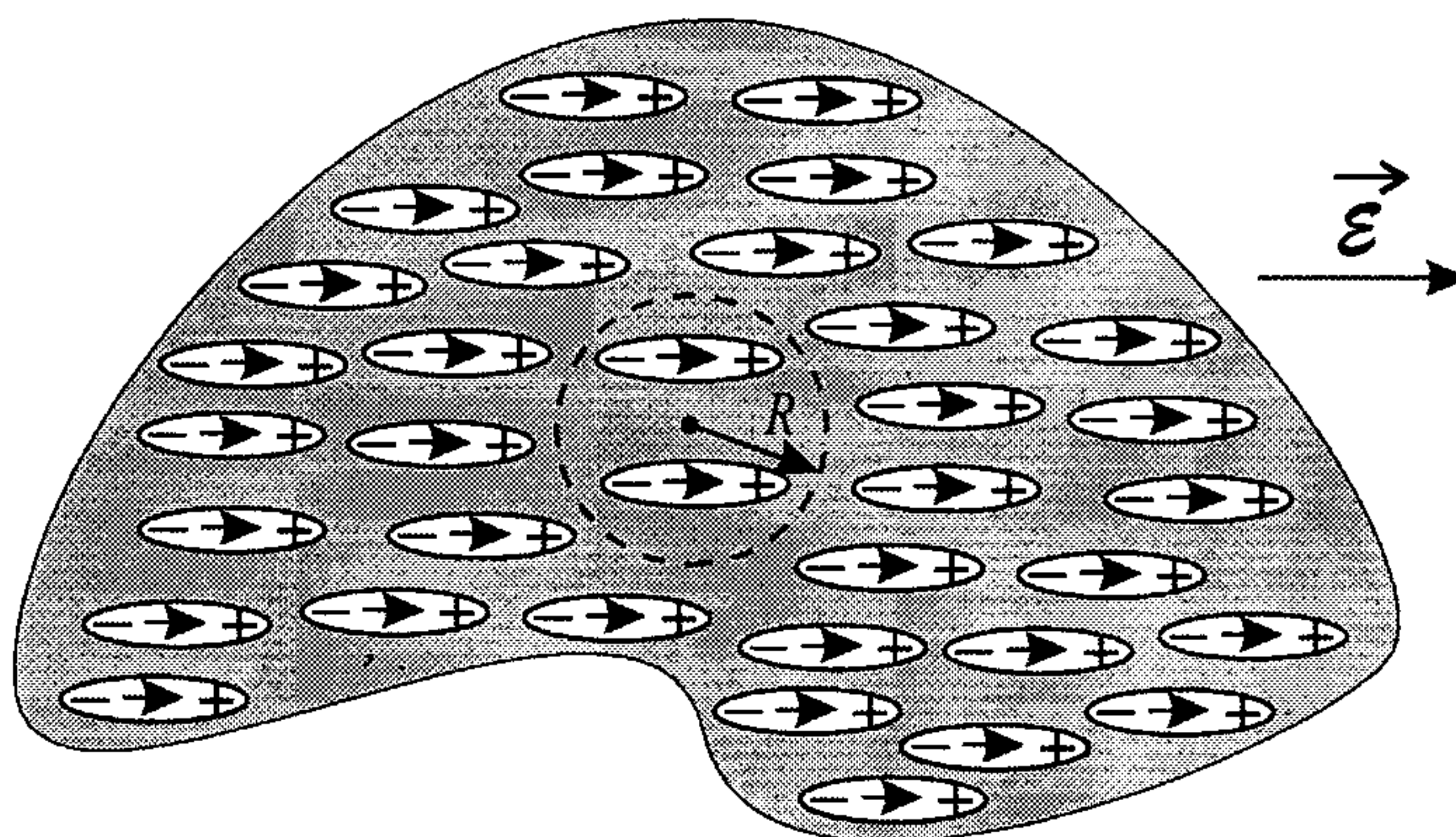



Figura 10.19: Um pedaço de material dielétrico, com uma esfera de raio R circundando um dos dipolos do material.

Nesta figura, vemos uma parte de um material dielétrico que está submetido a um campo externo $\vec{\mathcal{E}}$. Dentro desse material, definimos uma esfera imaginária de raio R mesoscópica, ou seja, infinitesimal do ponto de vista macroscópico, mas que, microscopicamente, engloba várias moléculas. Essa esfera envolve um dipolo específico, representado na figura por um ponto no seu centro. No seu interior existem também alguns outros dipolos, e ela está circundada pelo resto do material dielétrico e pelos dipolos que existem nesse material. O campo que age sobre o dipolo no centro da esfera, que é o campo molecular $\vec{\mathcal{E}}_m$, é a soma de três campos elétricos: o campo elétrico externo $\vec{\mathcal{E}}$, o campo gerado pelos dipolos fora da esfera de raio R e o campo dos dipolos dentro da esfera. Note que os dipolos situados fora da esfera podem ser substituídos por uma densidade efetiva de cargas de polarização sobre a superfície

externa da esfera, como mostra a figura 10.20.

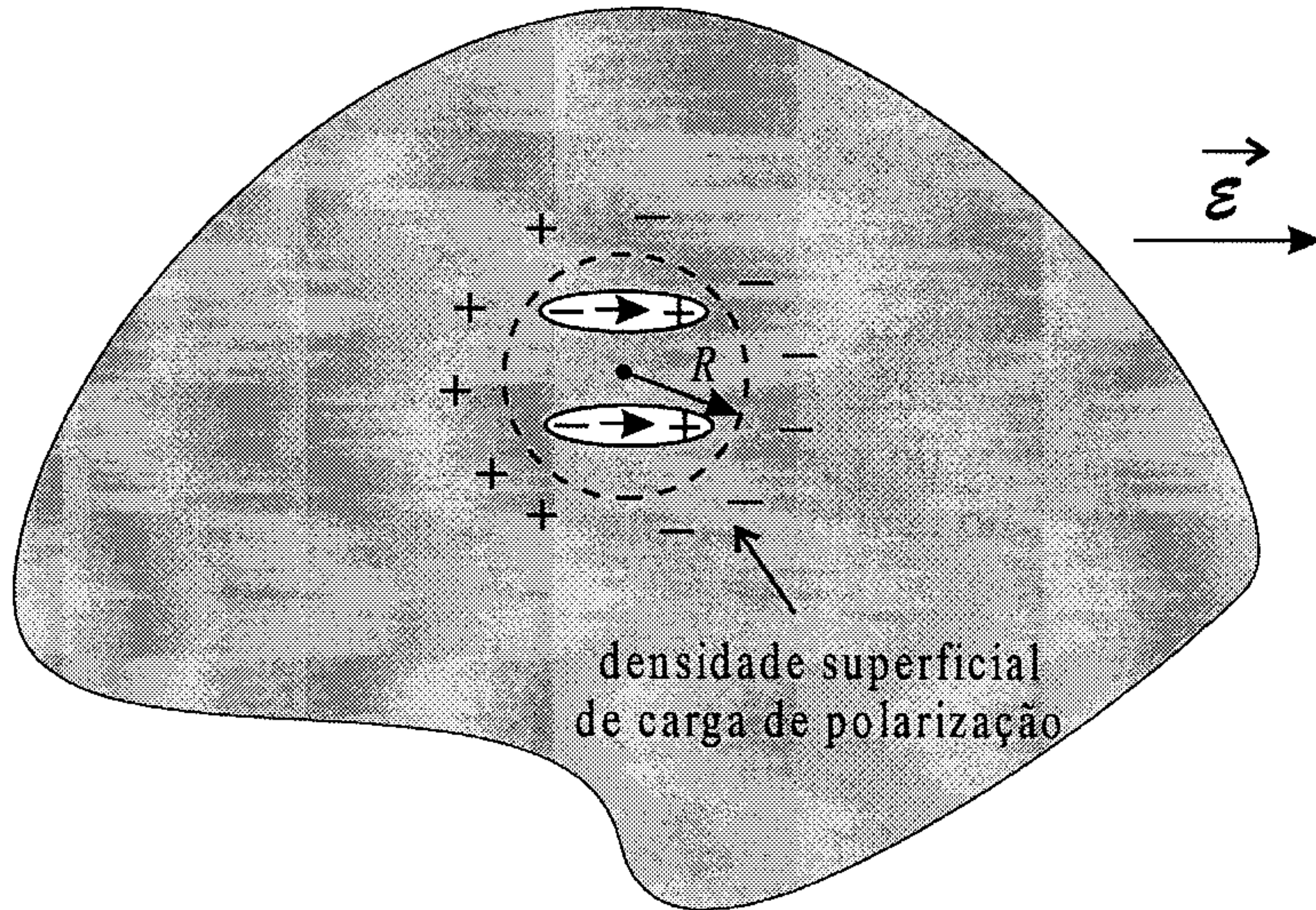



Figura 10.20: Densidade de carga de polarização sobre a superfície externa da esfera dentro do dielétrico.

Na figura fica claro que a densidade superficial de carga de polarização apresenta uma configuração dipolar e gera um campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}_{\mathcal{P}}$ no sentido do campo externo. Já os dipolos dentro da esfera próximos ao dipolo no centro dela produzem um campo $\vec{\mathcal{E}}_{\text{prox}}$ no sentido oposto. O campo molecular fica

$$\vec{\mathcal{E}}_m = \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{E}}_{\mathcal{P}} + \vec{\mathcal{E}}_{\text{prox}}$$

O campo gerado pela densidade superficial de cargas pode ser obtido mediante a expressão usual 4.5 para o cálculo de campos elétricos, isto é,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\mathcal{P}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \sigma_{\mathcal{P}} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, dA$$

Como queremos o campo no centro da esfera, que coincide com a origem, $\vec{r} = 0$. Além disso, $|\vec{r}\,'| = |-\vec{r}\,'| = R$, que é o raio da esfera. Temos, portanto,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\mathcal{P}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \sigma_{\mathcal{P}} \frac{R\,\hat{\mathbf{r}}'}{|-\vec{r}\,'|^3} \, dA$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\mathcal{P}} = -\frac{R}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \sigma_{\mathcal{P}} \frac{\hat{\mathbf{r}}'}{R^3} \, dA$$

O elemento de área em coordenadas esféricas, para r' fixo ($r' = R$), é $dA = R^2 \operatorname{sen}\theta' d\theta' d\phi'$, onde θ' é medido a partir do eixo z, cuja orientação coincide com a do campo elétrico externo $\vec{\mathcal{E}}$. A densidade superficial de carga de polarização é dada por

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n}$$

onde $\hat{n}$ é a normal à superfície na interface entre os meios, orientada para fora do meio que tem a polarização $\vec{\mathcal{P}}$. No nosso caso, a polarização está orientada no mesmo sentido que o do campo externo, ao passo que a normal aponta para dentro da esfera, no sentido do versor $-\hat{\mathbf{r}}$. Assim, encontramos

$$\sigma_{\mathcal{P}} = -\mathcal{P}\cos\theta$$

e

$$\vec{\mathcal{E}}_{\mathcal{P}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(-\mathcal{P}\cos\theta')\,\hat{\mathbf{r}}'\,R^2 \operatorname{sen}\theta' d\theta' d\phi'$$
$$\vec{\mathcal{E}}_{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\hat{\mathbf{r}}'\cos\theta' \operatorname{sen}\theta' d\theta' d\phi'$$

O versor $\hat{\mathbf{r}}'$, de acordo com as expressões 1.37, vale

$$\hat{\mathbf{r}}' = \operatorname{sen}\theta'\cos\phi'\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\phi'\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta'\,\hat{\mathbf{k}}$$

e o campo fica

$$\vec{\mathcal{E}}_{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta'\operatorname{sen}\theta'(\operatorname{sen}\theta'\cos\phi'\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\phi'\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta'\,\hat{\mathbf{k}})d\theta' d\phi'$$

ou

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_{\mathcal{P}} = {} & \frac{\mathcal{P}\,\hat{\mathbf{i}}}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta'\operatorname{sen}^2\theta'\cos\phi' d\theta' d\phi' \\ & + \frac{\mathcal{P}\,\hat{\mathbf{j}}}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta'\operatorname{sen}^2\theta'\operatorname{sen}\phi' d\theta' d\phi' \\ & + \frac{\mathcal{P}\,\hat{\mathbf{k}}}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta'\operatorname{sen}\theta' d\theta' d\phi'\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}\,\hat{\mathbf{i}}}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\left[\operatorname{sen}\phi'\right]_0^{2\pi}\cos\theta'\operatorname{sen}^2\theta' d\theta'$$
$$- \frac{\mathcal{P}\,\hat{\mathbf{j}}}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\left[\cos\phi'\right]_0^{2\pi}\cos\theta'\operatorname{sen}^2\theta' d\theta'$$
$$+ \frac{\mathcal{P}\,\hat{\mathbf{k}}}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\left[\phi'\right]_0^{2\pi}\cos^2\theta'\operatorname{sen}\theta' d\theta'$$

As duas primeiras integrais se anulam por causa do termo entre colchetes, e a última é resolvida pela substituição

$$u = \cos^3\theta'$$
$$du = -3\cos^2\theta'\operatorname{sen}\theta' d\theta'$$
$$-\frac{du}{3} = \cos^2\theta'\operatorname{sen}\theta' d\theta'$$

e desse modo,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}\,\hat{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0}\int_0^{\pi} -\frac{du}{3}$$
$$= -\frac{\mathcal{P}\,\hat{\mathbf{k}}}{6\epsilon_0}\left[\cos^3\theta'\right]_0^{\pi}$$
$$\vec{\mathcal{E}}_{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}\,\hat{\mathbf{k}}}{3\epsilon_0}$$

ou, como $\vec{\mathcal{P}} = \mathcal{P}\,\hat{\mathbf{k}}$,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\mathcal{P}} = \frac{\vec{\mathcal{P}}}{3\epsilon_0}$$

O campo molecular fica

$$\vec{\mathcal{E}}_m = \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{E}}_{\mathcal{P}} + \vec{\mathcal{E}}_{\text{prox}}$$
$$\vec{\mathcal{E}}_m = \vec{\mathcal{E}} + \frac{\vec{\mathcal{P}}}{3\epsilon_0} + \vec{\mathcal{E}}_{\text{prox}}$$

Agora precisamos do campo $\vec{\mathcal{E}}_{\text{prox}}$, que é gerado pelos dipolos dentro da esfera de raio R. Se os dipolos estiverem orientados aleatoriamente, como em materiais amorfos, líquidos e gases, $\vec{\mathcal{E}}_{\text{prox}} = 0$. Se os dipolos estiverem bastante

orientados e situados nos pontos de rede em um retículo cristalino cúbico, o campo também vale $\vec{\mathcal{E}}_{\text{prox}} = 0$. O campo é não-nulo quando o material apresenta defeitos ou impurezas no seu retículo cristalino, ou quando esse retículo não é cúbico, de forma que os campos dos dipolos não se anulam completamente e aparece um campo $\vec{\mathcal{E}}_{\text{prox}}$ diferente de zero. Tais materiais são anisotrópicos, e eles têm permissividades e susceptibilidades que dependem da orientação espacial. Nós estamos restritos, como já foi dito, aos materiais isotrópicos, e neles, $\vec{\mathcal{E}}_{\text{prox}} = 0$, o que faz com que o campo molecular fique

$$\vec{\mathcal{E}}_m = \vec{\mathcal{E}} + \frac{\vec{\mathcal{P}}}{3\epsilon_0} \tag{10.43}$$

Assim como, macroscopicamente, $\vec{\mathcal{P}} = \chi\vec{\mathcal{E}}$, ou seja, a polarização é proporcional ao campo externo, microscopicamente, o vetor momento de dipolo de uma dada molécula ou dipolo é proporcional ao campo elétrico molecular, e assim, introduzindo a grandeza *polarizabilidade molecular* ς_m, podemos escrever

$$\vec{p} = \varsigma_m \vec{\mathcal{E}}_m \tag{10.44}$$

ou

$$\vec{p} = \varsigma_m \left(\vec{\mathcal{E}} + \frac{\vec{\mathcal{P}}}{3\epsilon_0} \right) \tag{10.45}$$

Considerando que existem N momentos de dipolo por unidade de volume e que a polarização é dada pela equação 10.1,

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i$$

ou

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{V} n\vec{p} = N\vec{p}$$

podemos multiplicar a equação 10.45 por N, para obter

$$N\vec{p} = N\varsigma_m \left(\vec{\mathcal{E}} + \frac{\vec{\mathcal{P}}}{3\epsilon_0} \right)$$

ou

$$\vec{\mathcal{P}} = N\varsigma_m\left(\vec{\mathcal{E}} + \frac{\vec{\mathcal{P}}}{3\epsilon_0}\right)$$

que pode ser resolvida para $\vec{\mathcal{P}}$, isto é,

$$\vec{\mathcal{P}} = N\varsigma_m\vec{\mathcal{E}} + N\varsigma_m\frac{\vec{\mathcal{P}}}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{\mathcal{P}}\left(1 - \frac{N\varsigma_m}{3\epsilon_0}\right) = N\varsigma_m\vec{\mathcal{E}}$$

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{3N\epsilon_0\varsigma_m}{3\epsilon_0 - N\varsigma_m}\vec{\mathcal{E}}$$

Lembrando que $\vec{\mathcal{P}} = \chi\vec{\mathcal{E}}$ e que $\chi = \epsilon - \epsilon_0$, temos

$$(\epsilon - \epsilon_0)\vec{\mathcal{E}} = \frac{3N\epsilon_0\varsigma_m}{3\epsilon_0 - N\varsigma_m}\vec{\mathcal{E}}$$

$$3\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0) = 3N\epsilon_0\varsigma_m + N\varsigma_m(\epsilon - \epsilon_0)$$

$$\varsigma_m = \frac{3\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)}{N\left[3\epsilon_0 + (\epsilon - \epsilon_0)\right]}$$

$$\varsigma_m = \frac{3\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)}{N(\epsilon + 2\epsilon_0)}$$

ou, recordando que a constante dielétrica é dada por

$$\mathcal{K} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

temos

$$\varsigma_m = \frac{3\epsilon_0}{N}\frac{\epsilon_0(\mathcal{K} - 1)}{\epsilon_0(\mathcal{K} + 2)}$$

ou

$$\varsigma_m = \frac{3\epsilon_0}{N}\frac{\mathcal{K} - 1}{\mathcal{K} + 2} \tag{10.46}$$

que, conhecida como *equação de Clausius-Mossoti*, relaciona a grandeza microscópica ς_m com grandezas que podem ser determinadas macroscopicamente. Esta equação oferece melhores resultados para materiais diluídos, como

gases. Em sólidos e líquidos, ela é aproximada, em particular quando a constante dielétrica $\mathcal{K}$ é grande.

A partir das grandezas moleculares definidas acima, isto é, do campo molecular $\vec{\mathcal{E}}_m$, da polarizabilidade ς_m e dos momentos de dipolo moleculares, podemos estudar quantitativamente o que ocorre com as moléculas de um dielétrico quando o campo molecular age sobre elas. Vamos iniciar com os dipolos intrínsecos.

10.4.1 Polarização de Dipolos Intrínsecos

Quando um dielétrico possui dipolos moleculares intrínsecos, ao serem submetidos a um campo elétrico externo, esses dipolos procuram se orientar na direção e sentido do campo, como foi discutido qualitativamente na seção 10.1. Lá foi dito que a orientação não é perfeita, porque a agitação térmica perturba os dipolos, de modo que, quanto maior é a temperatura, menor é o alinhamento e menor é a polarização $\vec{\mathcal{P}}$. Podemos estimar essa polarização, utilizando conceitos de Mecânica Estatística e Termodinâmica, como segue.

Como comentamos anteriormente, a orientação dos dipolos, considerando que eles estejam num banho térmico, em contato com um reservatório de temperatura, o que é normalmente o caso, é regida pelo potencial de Helmholtz, que deve ser minimizado, o que corresponde a uma certa configuração dos dipolos mais ou menos orientados com relação ao campo elétrico. A Mecânica Estatística permite que estimemos o valor médio de uma certa grandeza, se conhecermos a distribuição estatística que está associada a ela. No caso dos dipolos, podemos fazer uma aproximação clássica, considerando que eles seguem a distribuição de Maxwell-Boltzmann, de modo que a probabilidade de encontrar um dipolo com energia E é proporcional à exponencial $e^{-\beta E}$, onde

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

Aqui, $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K é a constante de Boltzmann, e T é a temperatura absoluta. A equação 5.34 dá, para a energia potencial de um dipolo num campo externo, que aqui corresponde ao campo molecular $\vec{\mathcal{E}}_m$, o valor

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{\mathcal{E}} = -p\mathcal{E}_m \cos\theta$$

onde θ é medido a partir da direção e sentido definidos pelo campo externo. A componente do dipolo na direção do campo externo é $p\cos\theta$, e assim, a probabilidade $P(E)$ de encontrar um dipolo com uma certa energia E é

$$P(E) = Ae^{-\beta E} = Ae^{\beta pE\cos\theta}$$

sendo A uma constante de proporcionalidade. O valor médio de uma grandeza x pode ser escrito como

$$\langle x\rangle = \frac{\int x(\xi)P(\xi)d\xi}{\int P(\xi)d\xi}$$

onde $P(\xi)$ é a distribuição de probabilidades a que a grandeza x está sujeita. Reunindo todas as expressões acima, o valor médio de $p\cos\theta$ fica, usando coordenadas esféricas para fazer as integrais,

$$\langle p\cos\theta\rangle = \frac{\int p\cos\theta e^{\beta p\mathcal{E}_m\cos\theta}\operatorname{sen}\theta d\theta d\phi}{\int e^{\beta p\mathcal{E}_m\cos\theta}\operatorname{sen}\theta d\theta d\phi}$$

ou, como a integral em ϕ é imediata, resultando em 2π,

$$\langle p\cos\theta\rangle = \frac{\int_0^\pi p\cos\theta e^{\beta p\mathcal{E}_m\cos\theta}\operatorname{sen}\theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\beta p\mathcal{E}_m\cos\theta}\operatorname{sen}\theta d\theta}$$

Vamos definir

$$\begin{aligned}
\gamma &= \beta p\mathcal{E}_m \\
x &= \gamma\cos\theta \\
dx &= -\gamma\operatorname{sen}\theta d\theta \\
\theta_1 &= 0 \Rightarrow x_1 = \gamma \\
\theta_2 &= \pi \Rightarrow x_2 = -\gamma
\end{aligned} \tag{10.47}$$

e assim obtemos, para o denominador,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^{\beta p\mathcal{E}_m\cos\theta}\operatorname{sen}\theta d\theta &= -\int_\gamma^{-\gamma} e^x\frac{dx}{\gamma} \\
&= -\frac{1}{\gamma}\left[e^x\right]_\gamma^{-\gamma} \\
\int_0^\pi e^{\beta p\mathcal{E}_m\cos\theta}\operatorname{sen}\theta d\theta &= \frac{1}{\gamma}\left[e^\gamma - e^{-\gamma}\right]
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} e^{\beta p \mathcal{E}_m \cos\theta} \operatorname{sen}\theta d\theta = \frac{2}{\gamma} \operatorname{senh}\gamma$$

O numerador torna-se

$$\int_0^{\pi} p\cos\theta e^{\beta p \mathcal{E}_m \cos\theta} \operatorname{sen}\theta d\theta = -\int_{\gamma}^{-\gamma} \frac{p\mathcal{E}_m \beta\cos\theta}{\mathcal{E}_m\beta} e^{x} \frac{dx}{\gamma}$$
$$\int_0^{\pi} p\cos\theta e^{\beta p \mathcal{E}_m \cos\theta} \operatorname{sen}\theta d\theta = \frac{1}{\beta\mathcal{E}_m\gamma} \int_{-\gamma}^{\gamma} x e^{x} dx$$

Para realizar esta integral, chamamos

$$u = x \Rightarrow du = dx$$
$$dv = e^{x} dx \Rightarrow v = e^{x}$$

e assim,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} p\cos\theta e^{\beta p \mathcal{E}_m \cos\theta} \operatorname{sen}\theta d\theta &= \frac{1}{\beta\mathcal{E}_m\gamma}\left[\left(xe^{x}\right)_{-\gamma}^{\gamma} - \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{x} dx\right] \\ &= \frac{1}{\beta\mathcal{E}_m\gamma}\left[\gamma e^{\gamma} + \gamma e^{-\gamma} - \left[e^{x}\right]_{-\gamma}^{\gamma}\right] \\ &= \frac{1}{\beta\mathcal{E}_m\gamma}\left[2\gamma\cosh\gamma - \left[e^{\gamma} - e^{-\gamma}\right]\right]\end{aligned}$$
$$\int_0^{\pi} p\cos\theta e^{\beta p \mathcal{E}_m \cos\theta} \operatorname{sen}\theta d\theta = \frac{2}{\beta\mathcal{E}_m\gamma}\left[\gamma\cosh\gamma - \operatorname{senh}\gamma\right]$$

Reunindo os dois termos, encontramos

$$\langle p\cos\theta\rangle = \frac{\frac{2}{\beta\mathcal{E}_m\gamma}\left[\gamma\cosh e^{\gamma} - \operatorname{senh}\gamma\right]}{\frac{2}{\gamma}\operatorname{senh}\gamma}$$
$$\langle p\cos\theta\rangle = \frac{1}{\beta\mathcal{E}_m}\frac{\gamma\cosh\gamma - \operatorname{senh}\gamma}{\operatorname{senh}\gamma}$$
$$\langle p\cos\theta\rangle = \frac{p}{\beta\mathcal{E}_m p}\left(\gamma\operatorname{cotgh}\gamma - 1\right)$$
$$\langle p\cos\theta\rangle = \frac{p}{\gamma}\left(\gamma\operatorname{cotgh}\gamma - 1\right)$$

ou

$$\langle p\cos\theta\rangle = p\left(\operatorname{cotgh}\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) \tag{10.48}$$

que é conhecida como fórmula de Langevin. Lembrando, da equação 10.47, que γ vale

$$\gamma = \beta p \mathcal{E}_m = \frac{p\mathcal{E}_m}{k_B T}$$

vemos que, para temperaturas da ordem da temperatura ambiente ou maiores, desde que o campo não seja muito intenso, $\gamma \ll 1$, pois os momentos de dipolo possuem valores muito pequenos. Só para recordar, o momento de dipolo da água, que é um dos maiores valores de momento de dipolo para todas as substâncias, vale $p = 6,14 \times 10^{-30}$ C.m. Assim, para estes pequenos valores de γ, podemos expandir a função cotangente hiperbólica em série de Taylor em torno de $\gamma = 0$, ou seja, pela equação 2.1,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n}\bigg|_{x_0} (x - x_0)^n =$$

$$f(x_0) + (x - x_0) \frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x_0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\bigg|_{x_0} + \cdots$$

sendo que

$$f(x) = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Usando a série de Taylor 2.2 para as exponenciais, e considerando termos até a terceira ordem em x, obtemos

$$\operatorname{cotgh} x \approx \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)}$$

$$\operatorname{cotgh} x \approx \frac{2 + x^2}{2x + \frac{x^3}{3}}$$

$$\operatorname{cotgh} x \approx \frac{2 + x^2}{2x\left(1 + \frac{x^2}{6}\right)}$$

$$\operatorname{cotgh} x \approx \frac{1}{2x}\left(2 + x^2\right)\left(1 + \frac{x^2}{6}\right)^{-1}$$

Usamos agora a série de Taylor 2.6 para a função binomial, para expandir o segundo parênteses, ou seja,

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotgh} x &\approx \frac{1}{2x}(2+x^2)\left(1-\frac{x^2}{6}\right) \\
&\approx \frac{1}{2x}\left(2+x^2-\frac{2x^2}{6}-\frac{x^4}{3}\right) \\
&\approx \frac{1}{2x}\left(2+\frac{4x^2}{6}\right) \\
&\approx \frac{1+\frac{x^2}{3}}{x} \\
\operatorname{cotgh} x &\approx \frac{1}{x}+\frac{x}{3}
\end{aligned}$$

e utilizando esta expressão na equação 10.48, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle p\cos\theta\rangle &\approx p\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{\gamma}{3}-\frac{1}{\gamma}\right) \\
\langle p\cos\theta\rangle &\approx \frac{\gamma p}{3}
\end{aligned}$$

Substituindo o valor de γ dado pela equação 10.47, achamos

$$\begin{aligned}
\langle p\cos\theta\rangle &\approx \frac{(\beta p\mathcal{E}_m)p}{3} \\
\langle p\cos\theta\rangle &\approx \frac{\beta p^2\mathcal{E}_m}{3}
\end{aligned}$$

ou, expressamente em função da temperatura,

$$\langle p\cos\theta\rangle \approx \frac{p^2\mathcal{E}_m}{3k_BT}$$

Considerando que $\langle p\cos\theta\rangle$ é o dipolo efetivo na direção do campo molecular $\vec{\mathcal{E}}_m$, podemos escrever

$$\vec{p} = \frac{p^2}{3k_BT}\vec{\mathcal{E}}_m$$

que pode ser comparada com a expressão 10.44, para dar

$$\varsigma_m = \frac{p^2}{3k_BT} \qquad (10.49)$$

que é uma espécie de polarizabilidade "intrínseca" ou "orientacional", já que ela está associada à orientação dos dipolos intrínsecos do material. Vejamos agora o que ocorre com os dipolos induzidos.

10.4.2 Polarização de Dipolos Induzidos

Na seção 10.1, vimos que os dipolos induzidos são formados quando o campo elétrico molecular age sobre os constituintes do dielétrico, separando os centros "geométricos" de cargas positivas e negativas, como pode ser visto nas figuras 10.3 e 10.4. Vamos considerar agora um modelo simples, para estudar a polarização desses dipolos.

No estudo dos dipolos induzidos, consideramos inicialmente que o dielétrico é formado por átomos neutros esféricos, que têm um núcleo positivo no centro, com uma carga Ze, onde Z é o número atômico e $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C é a carga do próton (e também do elétron, só que com sinal negativo), e por uma carga eletrônica $-Ze$, distribuída de forma mais ou menos homogênea dentro do volume esférico de raio R_0. Este modelo não é perfeito, mas se assemelha bastante com a situação real. Ele pode ser visto na figura 10.21.

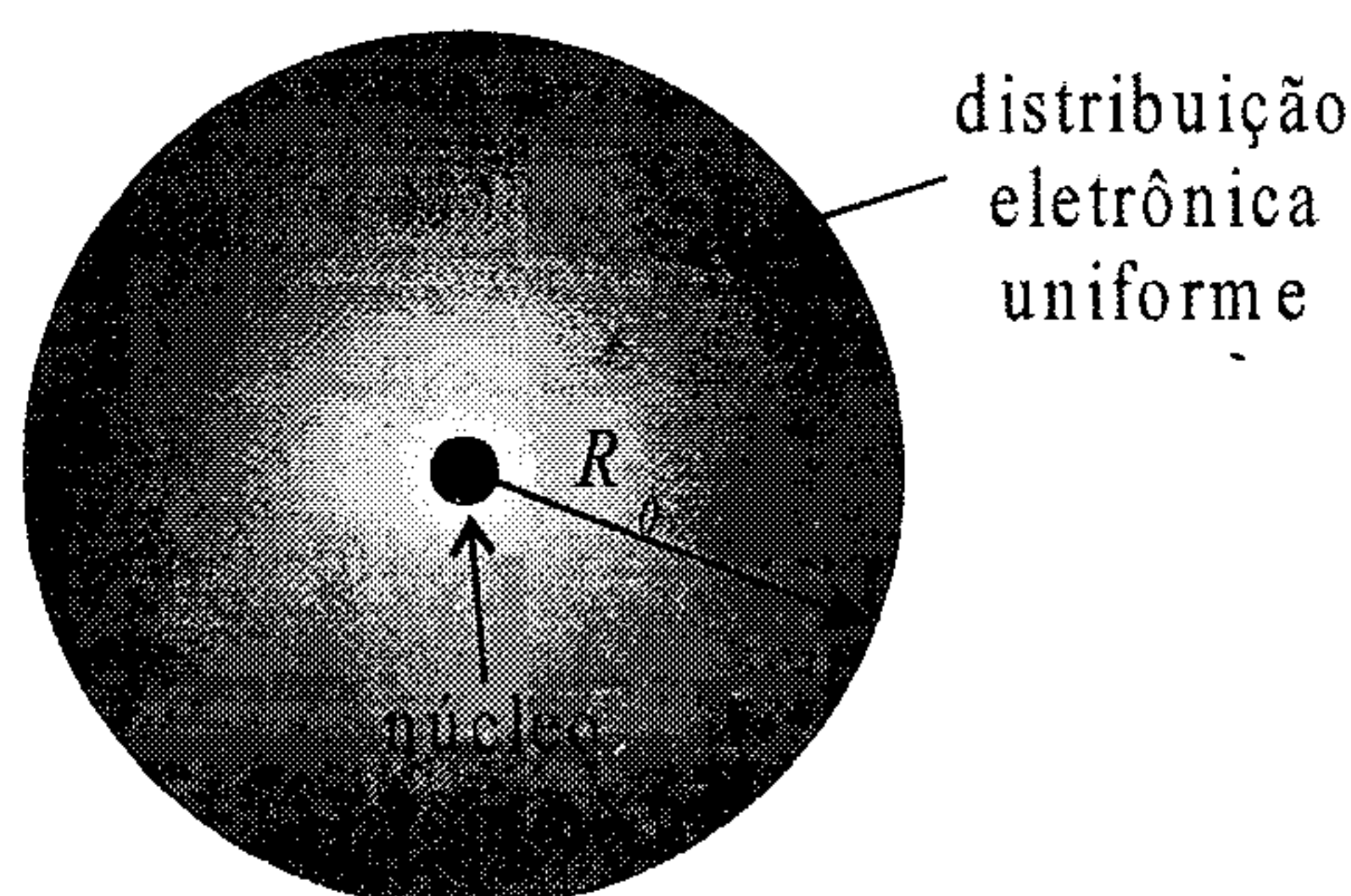



Figura 10.21: Modelo para um dielétrico monoatômico, sem campo elétrico externo.

Quando o campo elétrico externo $\vec{\mathcal{E}}$ é ligado, aparece o campo molecular $\vec{\mathcal{E}}_m$, que age sobre o átomo, produzindo uma separação entre os centros de carga positiva e negativa, como aparece na figura 10.22. O núcleo positivo do átomo é deslocado de uma distância X em relação ao centro da nuvem de cargas negativas, na direção e sentido do campo aplicado, até que as forças elétricas $\vec{F}_e$ entre as cargas negativas e o núcleo do átomo equilibrem a força elétrica $\vec{F}_m$ gerada pelo campo molecular $\vec{\mathcal{E}}_m$, ou seja, quando ocorre

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = 0$$

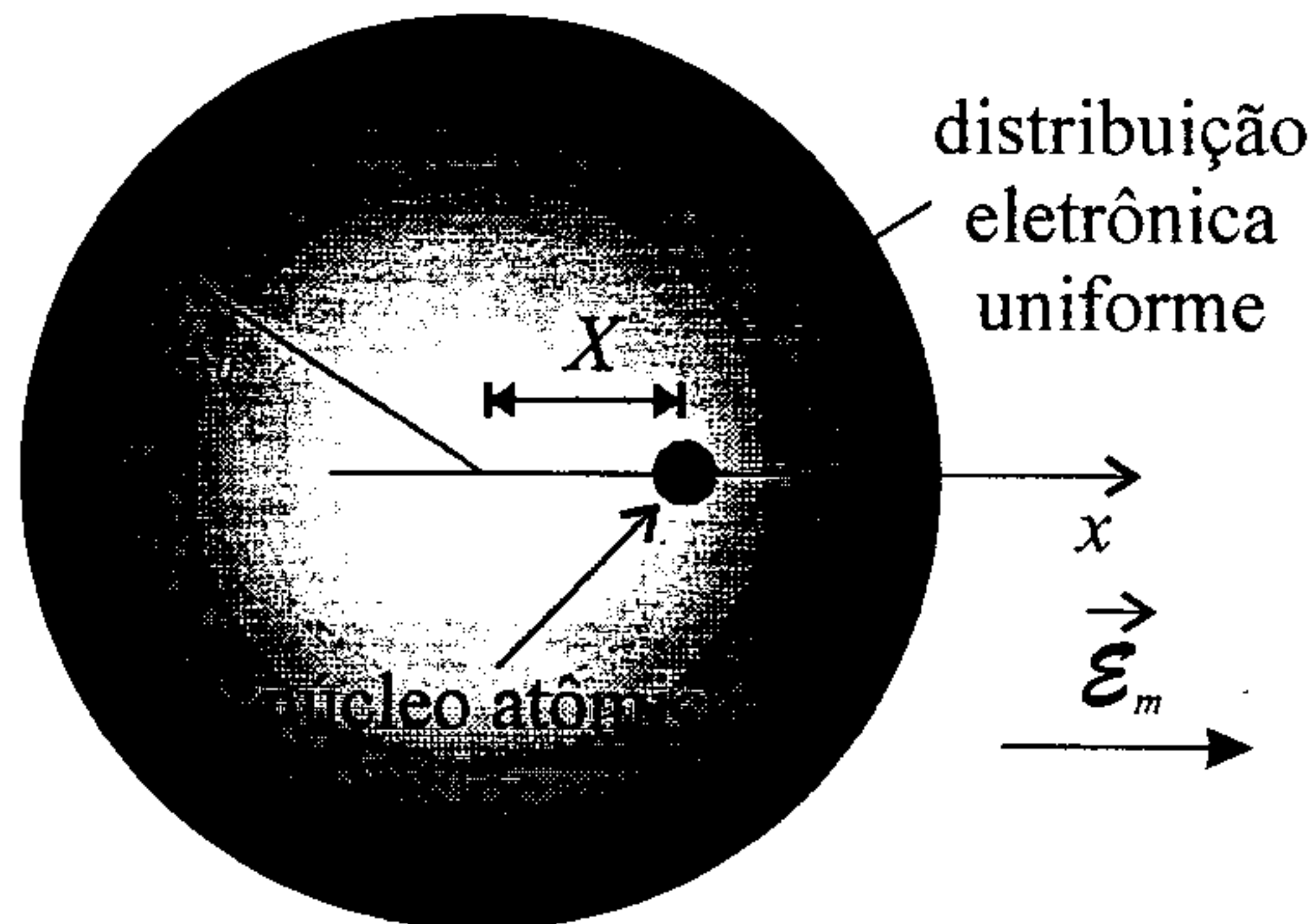



Figura 10.22: Modelo para um dielétrico monoatômico, com um campo elétrico externo.

A força elétrica gerada pelo campo molecular sobre o núcleo do átomo é

$$\vec{F}_m = Ze\vec{\mathcal{E}}_m$$

e devemos lembrar que a carga do núcleo é Ze. Para obter a força produzida pelas cargas negativas, precisamos achar o campo elétrico gerado por essas cargas na posição ocupada pelo núcleo. Assim, consideramos uma superfície gaussiana esférica S de raio X, cujo centro coincide com o centro das cargas negativas, como na figura 10.23.

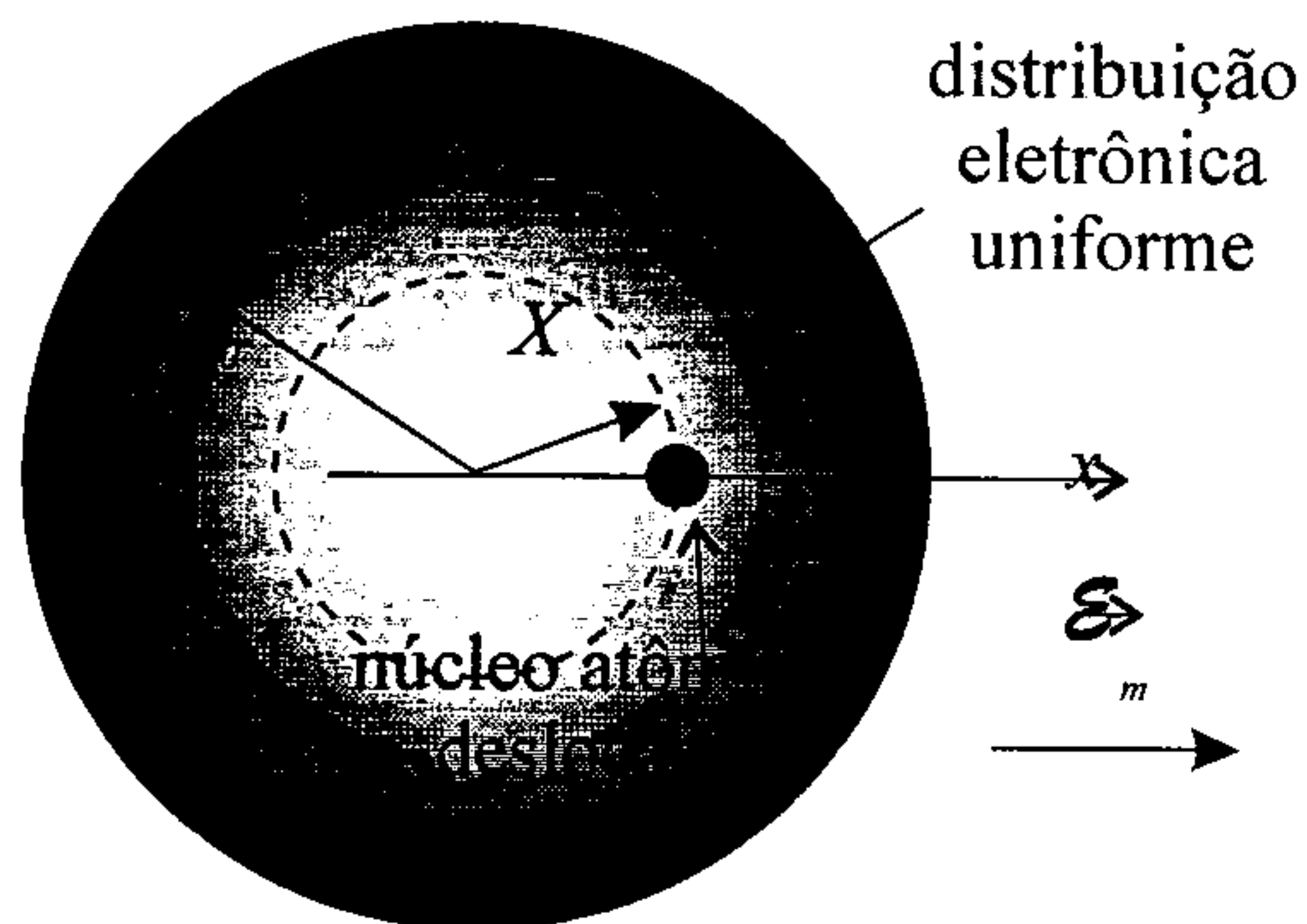



Figura 10.23: Superfície gaussiana para um dielétrico monoatômico, com um campo elétrico externo.

A lei de Gauss 4.13 estabelece que

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}\,')\, dV$$

A densidade volumétrica é constante, por hipótese, e assim, num volume $V = \frac{4\pi R_0^3}{3}$, temos uma carga negativa $Q = -Ze$, de modo que a densidade é

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{Q}{V} \\ &= \frac{-Ze}{\frac{4\pi R_0^3}{3}} \\ \rho &= -\frac{3Ze}{4\pi R_0^3}\end{aligned}$$

e portanto, lembrando que o versor normal à superfície é $\hat{\mathbf{r}}$ e que o campo gerado pela carga negativa deve ser um campo radial, isto é, $\vec{\mathcal{E}}_e = -\mathcal{E}_e \hat{\mathbf{r}}$, temos

$$\begin{aligned}\oint_S -\mathcal{E}_e \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}\, dA &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V -\frac{3Ze}{4\pi R_0^3}\, dV \\ -\mathcal{E}_e \oint_S dA &= -\frac{3Ze}{4\pi\epsilon_0 R_0^3} \int_V dV \\ \mathcal{E}_e 4\pi X^2 &= \frac{3Ze}{4\pi\epsilon_0 R_0^3} \frac{4\pi X^3}{3} \\ \mathcal{E}_e &= \frac{ZeX}{4\pi\epsilon_0 R_0^3}\end{aligned}$$

ou, vetorialmente

$$\vec{\mathcal{E}}_e = -\frac{ZeX}{4\pi\epsilon_0 R_0^3}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Este campo produz sobre a carga nuclear uma força

$$\vec{F}_e = Ze\vec{\mathcal{E}}_e = -\frac{Z^2e^2X}{4\pi\epsilon_0 R_0^3}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Reunindo esta expressão com a da força gerada pelo campo molecular, temos, sobre o núcleo em equilíbrio, as forças

$$-\frac{Z^2e^2X}{4\pi\epsilon_0 R_0^3}\,\hat{\mathbf{r}} + Ze\vec{\mathcal{E}}_m = 0$$
$$-\frac{Z^2e^2X}{4\pi\epsilon_0 R_0^3}\,\hat{\mathbf{r}} + Ze\mathcal{E}_m\,\hat{\mathbf{r}} = 0$$
$$-\frac{Z^2e^2X}{4\pi\epsilon_0 R_0^3} = -Ze\mathcal{E}_m$$

ou

$$ZeX = 4\pi\epsilon_0 R_0^3\mathcal{E}_m$$

O dipolo atômico formado neste caso é dado pelo produto entre a carga nuclear Ze e a distância X entre o centro das cargas negativas e o núcleo, ou seja,

$$p = ZeX$$

e desse modo, vetorialmente obtemos

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R_0^3\vec{\mathcal{E}}_m$$

que, comparada com a expressão 10.44, fornece

$$\varsigma_m = 4\pi\epsilon_0 R_0^3 \tag{10.50}$$

que é uma polarizabilidade "induzida" ou de "deformação", visto que ela está associada à formação de dipolos induzidos através da deformação das moléculas do dielétrico. Esta equação pode ser combinada com a equação de Clausius-Mossoti 10.46, o que resulta em

$$4\pi\epsilon_0 R_0^3 = \frac{3\epsilon_0}{N}\frac{\mathcal{K}-1}{\mathcal{K}+2}$$
$$R_0^3 = \frac{3}{4\pi N}\frac{\mathcal{K}-1}{\mathcal{K}+2}$$
$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi N}\frac{\mathcal{K}-1}{\mathcal{K}+2}}$$

que expressa o raio atômico em termos de grandezas que podem ser medidas experimentalmente. Para os materiais monoatômicos, esta equação fornece valores bastante razoáveis para o raio atômico, que é da ordem de 1 Å (lembrando que 1 Å $= 10^{-10}$ m).

Em geral, um dielétrico possui tanto dipolos intrínsecos quanto induzidos, e a polarizabilidade é dada em parte pela polarizabilidade intrínseca e em parte pela induzida, isto é,

$$\varsigma_m = \varsigma_{m_0} + \frac{p^2}{3K_B T} \tag{10.51}$$

onde ς_{m_0} é a polarizabilidade induzida. Esta expressão é conhecida como equação de Langevin-Debye. Observe que ela é do tipo

$$y = a + \frac{b}{x}$$

e desta forma, é simples estudar a influência dos dois termos separadamente, pois o termo induzido é constante, ao passo que o termo intrínseco varia com o inverso da temperatura. Os dielétricos que apresentam uma polarizabilidade como a dada pela equação 10.51 são lineares. A seguir, vamos estudar um dielétrico não-linear.

10.4.3 Polarização em Materiais Ferroelétricos

Até agora, estudamos dielétricos lineares. Neste caso, quando um campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}$ é aplicado sobre o dielétrico, aparece um campo elétrico molecular $\vec{\mathcal{E}}_m$ sobre cada um dos seus constituintes, o que dá origem a uma polarização macroscópica $\vec{\mathcal{P}}$, que é proporcional ao campo $\vec{\mathcal{E}}$. Além disso, o dipolo molecular também é proporcional ao campo molecular $\vec{\mathcal{E}}_m$, o que significa que, ao desligarmos o campo externo, todas as outras grandezas se anulam. Isso nem sempre é verdade e, se o material dielétrico for não-linear, como é o caso dos materiais ferroelétricos, uma polarização macroscópica não-nula pode ser verificada, mesmo para um campo externo nulo. Formalmente, ao fazermos o campo externo igual a zero na expressão 10.43, obtemos, para o campo molecular,

$$\vec{\mathcal{E}}_m = \frac{\vec{\mathcal{P}}_0}{3\epsilon_0}$$

onde $\vec{\mathcal{P}}_0$ é a polarização quando o campo externo é nulo. Pela equação 10.44, obtemos

$$\vec{p} = \varsigma_m \vec{\mathcal{E}}_m$$

e considerando que existem N dipolos por unidade de volume do dielétrico, temos, pela expressão 10.1,

$$\vec{\mathcal{P}} = N\vec{p}$$

e assim, podemos escrever

$$\vec{\mathcal{P}} = N\varsigma_m\vec{\mathcal{E}}_m$$

ou então, substituindo o valor do campo molecular,

$$\vec{\mathcal{P}}_0 = N\varsigma_m\frac{\vec{\mathcal{P}}_0}{3\epsilon_0}$$

Esta equação é satisfeita se

$$\vec{\mathcal{P}}_0 = 0$$

que é a condição usual de um dielétrico linear, ou se

$$\frac{N\varsigma_m}{3\epsilon_0} = 1$$

ou ainda se

$$\varsigma_m = \frac{3\epsilon_0}{N}$$

que é a condição para se ter um material ferroelétrico, como, por exemplo, o titanato de bário ($BaTiO_3$), que é ferroelétrico a temperaturas menores que 393 K.

Um material ferroelétrico, quando submetido a um campo externo $\vec{\mathcal{E}}$, se polariza da mesma forma que um material dielétrico usual. Começando com $\vec{\mathcal{E}} = 0$, até atingir o valor $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_{\text{max}}$, a polarização aumenta desde zero até o valor $\vec{\mathcal{P}}_{\text{max}}$. No entanto, quando o campo é reduzido novamente a zero, a polarização do ferroelétrico não vai a zero, e na verdade, ele se apresenta com os dipolos quase que totalmente orientados, como na figura 10.24. Nesta situação, a polarização continua praticamente com seu valor $\vec{\mathcal{P}}_{\text{max}}$, mas tendo $\vec{\mathcal{E}} = 0$. Para que a polarização do ferroelétrico seja reduzida a zero novamente, é preciso que um campo elétrico externo atue sobre o material, no sentido contrário ao da polarização, de forma a "torcer" os dipolos

para o outro lado, fazendo com que eles deixem de estar orientados numa única direção. Quando a polarização se anula, o campo externo não é nulo, e ele na verdade vale $-\vec{\mathcal{E}}_0$. Se continuarmos a aumentar o campo em módulo até que ele atinja o valor $-\vec{\mathcal{E}}_{\text{max}}$, os dipolos ficam novamente orientados, só que agora no outro sentido, gerando uma polarização $-\vec{\mathcal{P}}_{\text{max}}$. Continuando com o ciclo, o campo passa de $-\vec{\mathcal{E}}_{\text{max}}$ para $-\vec{\mathcal{E}}_0$, e deste para $\vec{\mathcal{E}} = 0$. Quando o campo chega a zero novamente, a polarização continua com seu valor $-\vec{\mathcal{P}}_{\text{max}}$. Se o campo elétrico atinge o valor $\vec{\mathcal{E}}_0$, a polarização se anula, e se ele chega novamente até $\vec{\mathcal{E}}_{\text{max}}$, a polarização assume novamente o valor máximo $\vec{\mathcal{P}}_{\text{max}}$. Esse ciclo é chamado *histerese*. Um gráfico de todo o processo aparece na figura 10.25.

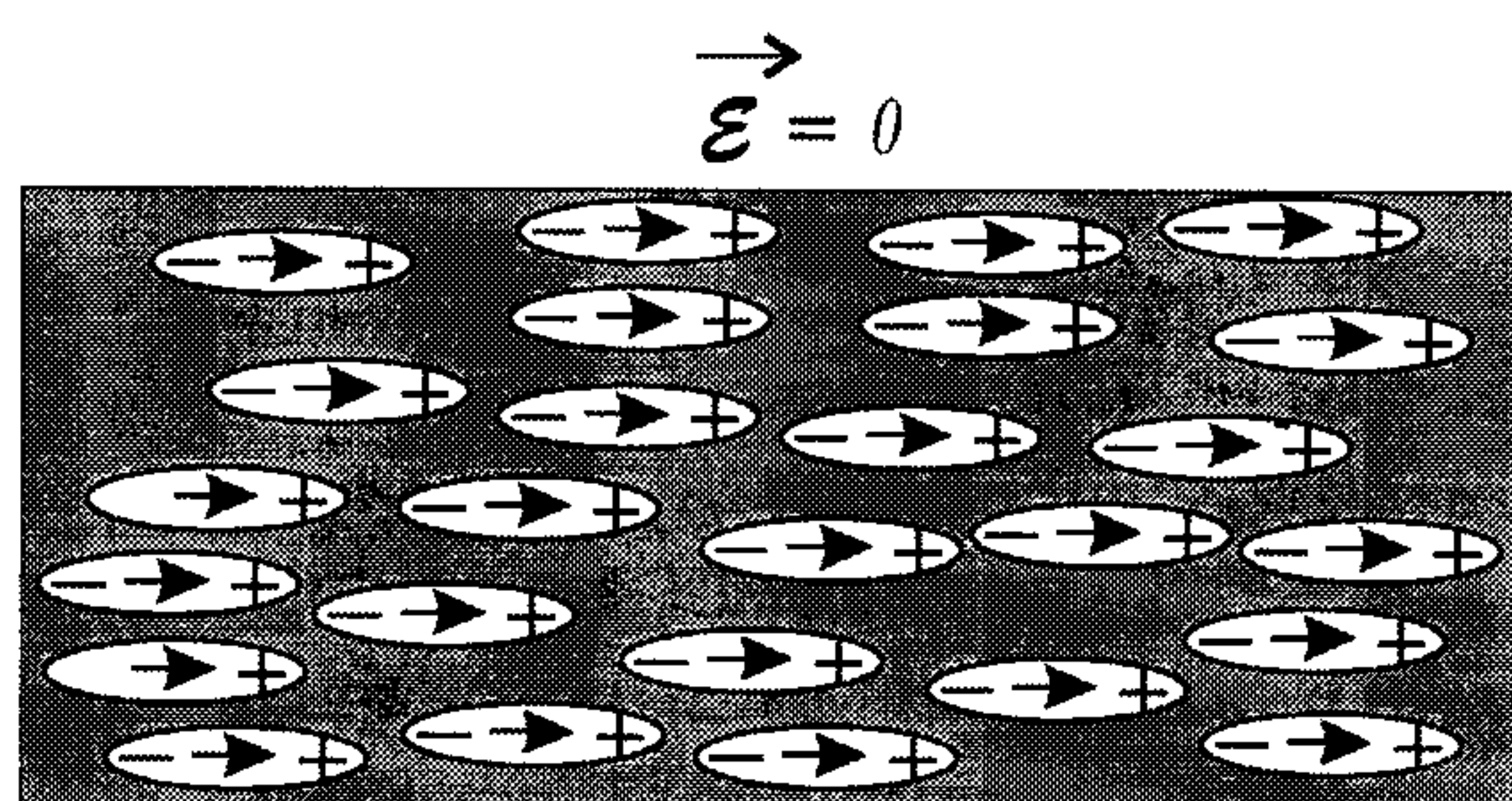



Figura 10.24: Dipolos de um material ferroelétrico após serem submetidos a um campo externo que agiu por um certo tempo e depois foi desligado.

Como se vê na figura, os materiais ferroelétricos apresentam uma polarização não-nula mesmo sendo o campo externo nulo. Entretanto, essa polarização só é estável a temperaturas menores do que uma certa temperatura, característica de cada material, chamada *temperatura Curie* ou *ponto Curie*. Acima dessa temperatura, que vale $T_C = 393$ K para o titanato de bário, o material comporta-se como um dielétrico usual.

Tendo estudado quantitativamente os dielétricos, vejamos agora como fica a energia eletrostática em meios dielétricos.

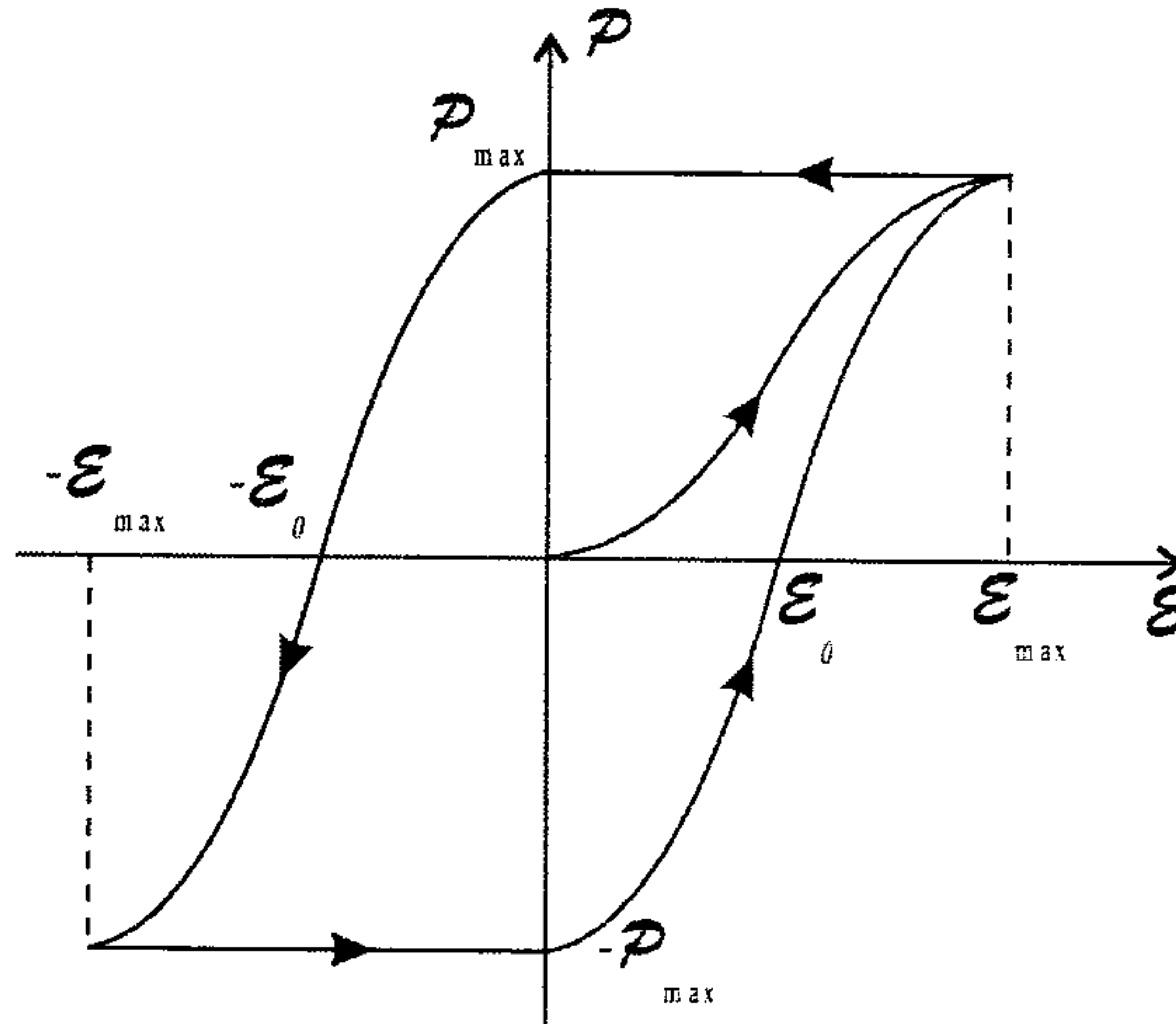



Figura 10.25: Gráfico da histerese de um material ferroelétrico.

10.5 Energia em Meios Dielétricos

A expressão 5.16 nos fornece a energia potencial elétrica total de uma distribuição de cargas ρ, ou seja,

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r}\,')\mathbb{V}(\vec{r}\,')\, dV$$

onde $\mathbb{V}$ é o potencial gerado por ρ. Esta expressão continua válida para os meios dielétricos, desde que eles sejam lineares. A partir dela, podemos utilizar a primeira lei de Maxwell 10.8, que é

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho$$

para escrever

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2}\int_V \mathbb{V}\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}\, dV$$

A relação 1.58e nos diz que

$$\nabla \cdot (\Phi\vec{A}) = (\nabla\Phi) \cdot \vec{A} + \Phi(\nabla \cdot \vec{A})$$

Vamos aplicá-la para $\Phi = \mathbb{V}$ e $\vec{A} = \vec{\mathcal{D}}$, ou seja,

$$\nabla \cdot (\mathbb{V}\vec{\mathcal{D}}) = (\nabla\mathbb{V}) \cdot \vec{\mathcal{D}} + \mathbb{V}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}})$$

Esta expressão pode ser reescrita como

$$\mathbb{V}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}) = \nabla \cdot (\mathbb{V}\vec{\mathcal{D}}) - (\nabla\mathbb{V}) \cdot \vec{\mathcal{D}}$$

ou, considerando o fato de que $\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V}$,

$$\mathbb{V}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}) = \nabla \cdot (\mathbb{V}\vec{\mathcal{D}}) + \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}$$

Assim, a energia total fica

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2}\int_V \left[\nabla \cdot (\mathbb{V}\vec{\mathcal{D}}) + \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}\right] dV$$

ou

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2}\int_V \nabla \cdot (\mathbb{V}\vec{\mathcal{D}})\, dV + \frac{1}{2}\int_V \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}\, dV$$

Usando o teorema do divergente 1.54, a primeira integral pode ser reescrita como

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbb{V}\vec{\mathcal{D}})\, dV = \oint_S (\mathbb{V}\vec{\mathcal{D}}) \cdot \hat{n}\, dA$$

Esta integral se anula, porque a superfície S é, formalmente, infinita, já que o volume V corresponde a todo o espaço e, além disso, como já vimos com relação à expansão em multipolos, qualquer distribuição de cargas pode ser escrita como uma "soma" de multipolos. Considere que em ρ existe um monopolo, ou seja, uma carga livre, cujo potencial é proporcional a r^{-1}, enquanto o campo e o deslocamento elétrico são proporcionais a r^{-2}. Portanto, o produto do potencial pelo campo resulta em r^{-3}. A superfície S, considerando que ela seja uma esfera, cresce com r^2, e assim, combinando todos os fatores dentro da integral, temos uma função que se comporta, em função de r, com r^{-1}. Quando $r \to \infty$, esta função se anula, como era esperado. Esta argumentação vale para qualquer multipolo, não apenas para uma carga pontual, já que os potenciais, campos e deslocamentos gerados por todos os outros multipolos vão a zero mais rapidamente que os da carga pontual. Por exemplo, o potencial de um dipolo é proporcional a r^{-2}, enquanto seu campo é proporcional

a r^{-3}. Combinando esses dois resultados com a área da esfera, que é proporcional a r^2, temos uma função que depende de r^{-3} e que se anula muito mais rapidamente do que no caso da carga pontual. Portanto, na energia total eletrostática temos, apenas,

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2}\int_V \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}\, dV \tag{10.52}$$

Podemos definir uma densidade volumétrica de energia eletrostática como sendo

$$\mathrm{u} = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} \tag{10.53}$$

e, a partir desta grandeza, a energia eletrostática fica

$$\mathbb{U} = \int_V \mathrm{u}\, dV$$

As expressões 10.52 e 10.53 são equações gerais para dielétricos lineares, e nesse caso, podemos escrever $\vec{\mathcal{D}} = \epsilon\vec{\mathcal{E}}$. Com isso, a densidade de energia eletrostática pode ser escrita como

$$\mathrm{u} = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}} \cdot \epsilon\vec{\mathcal{E}}$$

ou

$$\mathrm{u} = \frac{\epsilon}{2}\mathcal{E}^2$$

onde fica claro que, nas regiões onde o campo é mais intenso, a energia armazenada por ele é maior. Além disso, um material dielétrico armazena mais energia do que o vácuo, pois $\epsilon \geq \epsilon_0$.

Exemplo 10.7. *Considere uma esfera dielétrica de raio R e permissividade ϵ, com uma densidade volumétrica de cargas homogênea igual a ρ_0. Calcule a sua energia eletrostática.*

A energia eletrostática pode ser calculada de duas maneiras. A primeira envolve a equação 10.52 para a energia em função dos campos elétricos e, portanto, precisamos primeiro calcular esses campos, o que pode ser feito por intermédio da lei de Gauss 10.11 para dielétricos, isto é,

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{Q}{\epsilon}$$

O campo elétrico deve ter uma simetria radial, ou seja, $\vec{\mathcal{E}} = \pm\mathcal{E}\,\hat{\mathbf{r}}$, e o sinal depende de a carga ser positiva ou negativa. O versor normal corresponde ao versor $\hat{\mathbf{r}}$, e vamos considerar uma superfície gaussiana esférica de raio r dentro da esfera, de modo que

$$\oint_{S_G} \pm\mathcal{E}\,\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}\, dA = \frac{1}{\epsilon}\int_V \rho\, dV$$

$$\pm\mathcal{E}\int_{S_G} dA = \frac{\rho_0}{\epsilon}\int_V dV$$

$$\pm\mathcal{E} 4\pi r^2 = \frac{\rho_0}{\epsilon}\frac{4\pi r^3}{3}$$

ou

$$\mathcal{E} = \pm\frac{\rho_0 r}{3\epsilon}$$

ou, vetorialmente,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon}\,\hat{\mathbf{r}} \tag{10.54}$$

O deslocamento elétrico fica

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon\vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho_0 r}{3}\,\hat{\mathbf{r}}$$

e a parcela da energia no volume da esfera torna-se

$$\mathbb{U}_e = \frac{1}{2}\int_V \frac{\rho_0 r}{3\epsilon}\,\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\rho_0 r}{3}\,\hat{\mathbf{r}}\, dV$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\rho_0^2}{9\epsilon}\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\, r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi$$

$$= \frac{\rho_0^2}{18\epsilon}\left[\phi\right]_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^\pi r^4 \operatorname{sen}\theta dr d\theta$$

$$= -\frac{\rho_0^2}{18\epsilon}(2\pi)\left[\cos\theta\right]_0^\pi\int_0^R r^4 dr$$

$$\mathbb{U}_e = -\frac{\pi\rho_0^2}{9\epsilon}(-2)\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R$$

$$\mathbb{U}_e = \frac{2\pi\rho_0^2}{9\epsilon}\frac{R^5}{5}$$
$$\mathbb{U}_e = \frac{2\pi R^5\rho_0^2}{45\epsilon}$$

Fora da esfera, o campo também pode ser encontrado mediante a lei de Gauss, considerando uma superfície gaussiana de raio r e lembrando que só existem cargas na esfera. Assim,

$$\begin{aligned}
\oint_{S_G} \pm\mathcal{E}\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}\,dA &= \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\,dV \\
\pm\mathcal{E}\int_{S_G} dA &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\int_V dV \\
\pm\mathcal{E}4\pi r^2 &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{4\pi R^3}{3} \\
\mathcal{E} &= \pm\frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0 r^2}
\end{aligned}$$

ou, vetorialmente,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad (10.55)$$

O deslocamento elétrico é

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0\vec{\mathcal{E}} = \frac{R^3\rho_0}{3r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

e desse modo a densidade de energia fora da esfera fica

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_f &= \frac{1}{2}\int_V \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\frac{R^3\rho_0}{3r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\,dV \\
&= \frac{1}{2}\frac{R^6\rho_0^2}{9\epsilon_0}\int_R^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^4}\,r^2\operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{2}\frac{R^6\rho_0^2}{9\epsilon_0}\left[\phi\right]_0^{2\pi}\int_R^\infty\int_0^\pi\frac{1}{r^2}\operatorname{sen}\theta dr d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\frac{R^6\rho_0^2}{9\epsilon_0}(2\pi)\left[\cos\theta\right]_0^\pi\int_R^\infty\frac{dr}{r^2} \\
\mathbb{U}_f &= \frac{R^6\pi\rho_0^2}{9\epsilon_0}(-2)\left[\frac{1}{r}\right]_R^\infty
\end{aligned}$$

$$\mathbb{U}_f = \frac{2R^6\pi\rho_0^2}{9\epsilon_0}\frac{1}{R}$$
$$\mathbb{U}_f = \frac{2R^5\pi\rho_0^2}{9\epsilon_0}$$

Assim, a energia total torna-se

$$\begin{aligned}\mathbb{U} &= \mathbb{U}_d + \mathbb{U}_f \\ &= \frac{2\pi R^5\rho_0^2}{45\epsilon} + \frac{2R^5\pi\rho_0^2}{9\epsilon_0} \\ \mathbb{U} &= \frac{2\pi R^5\rho_0^2}{9}\left[\frac{1}{5\epsilon} + \frac{1}{\epsilon_0}\right]\end{aligned}$$

ou

$$\mathbb{U} = \frac{2\pi R^5\rho_0^2(\epsilon_0 + 5\epsilon)}{45\epsilon_0\epsilon} \tag{10.56}$$

Quando $\epsilon = \epsilon_0$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbb{U} &= \frac{2\pi R^5\rho_0^2}{9}\frac{\epsilon_0 + 5\epsilon_0}{5\epsilon_0\epsilon_0} \\ &= \frac{2\pi R^5\rho_0^2}{9}\frac{6\epsilon_0}{5\epsilon_0^2} \\ \mathbb{U} &= \frac{4\pi R^5\rho_0^2}{15\epsilon_0}\end{aligned}$$

O segundo modo de calcular a energia eletrostática da esfera consiste em utilizar diretamente a expressão 5.16, que é,

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r}\,')\mathbb{V}(\vec{r}\,')\,dV$$

Como só existem cargas dentro da esfera, a integral se reduz a uma integral no seu volume. Precisamos do potencial elétrico no interior dela, e este pode ser encontrado através do campo elétrico 10.54, que é

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon}\,\hat{\mathbf{r}}$$

e da relação 5.20,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(\vec{r}_{\text{ref}}) - \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

que é a segunda lei de Maxwell da Eletrostática. Entretanto, precisamos de uma referência, que deve ser o potencial na superfície da esfera, pois, neste ponto, ele precisa coincidir com o potencial elétrico fora da esfera. O potencial fora da esfera, por sua vez, usa como referência o valor no infinito, de forma que $\mathbb{V}(r \to \infty) \to 0$. Para calcular o potencial fora da esfera, utilizamos o campo elétrico 10.55 na segunda lei de Maxwell, isto é,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(\infty) - \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0 r^2}\, \hat{\mathbf{r}} \cdot (dr\, \hat{\mathbf{r}} + r d\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \operatorname{sen}\theta d\phi\, \hat{\boldsymbol{\phi}})$$

ou

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}) &= -\frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2} dr \\
&= \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0} \left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} \\
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0 r}
\end{aligned}$$

Em $r = R$, o potencial fora da esfera vale

$$\mathbb{V}(R) = \frac{R^2\rho_0}{3\epsilon_0}$$

O potencial dentro da esfera pode agora ser encontrado, mediante o uso do raio da esfera como referência, ou seja,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \mathbb{V}(R) - \int_{R}^{\vec{r}} \frac{\rho_0 r}{3\epsilon}\, \hat{\mathbf{r}} \cdot (dr\, \hat{\mathbf{r}} + r d\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \operatorname{sen}\theta d\phi\, \hat{\boldsymbol{\phi}})$$

ou

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{R^2\rho_0}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0}{3\epsilon} \int_{R}^{\vec{r}} r dr \\
&= \frac{R^2\rho_0}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0}{3\epsilon} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{R}^{\vec{r}} \\
&= \frac{R^2\rho_0}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon} + \frac{\rho_0 R^2}{6\epsilon} \\
\mathbb{V}(\vec{r}) &= \frac{R^2\rho_0}{3} \frac{2\epsilon + \epsilon_0}{2\epsilon_0\epsilon} - \frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon}
\end{aligned}$$

que, em $r = R$, vale

$$\mathbb{V}(R) = \frac{R^2\rho_0}{3}\frac{2\epsilon + \epsilon_0}{2\epsilon_0\epsilon} - \frac{\rho_0 R^2}{6\epsilon}$$

ou

$$\mathbb{V}(R) = \frac{R^2\rho_0}{3\epsilon_0}$$

e isso concorda com o valor obtido mediante o uso do potencial elétrico para fora da esfera. Para calcular a energia, usamos a equação 5.16, lembrando que a densidade de carga é ρ_0, isto é,

$$\begin{aligned}
\mathbb{U} &= \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r}\,')\mathbb{V}(\vec{r}\,')\,dV \\
&= \frac{1}{2}\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho_0\left[\frac{R^2\rho_0}{3}\frac{2\epsilon+\epsilon_0}{2\epsilon_0\epsilon} - \frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon}\right] r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{2}\frac{R^2\rho_0^2(2\epsilon+\epsilon_0)}{6\epsilon_0\epsilon}\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} dV - \frac{1}{2}\frac{\rho_0^2}{6\epsilon}\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^4 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi \\
&= \frac{R^2\rho_0^2(2\epsilon+\epsilon_0)}{12\epsilon_0\epsilon}\frac{4\pi R^3}{3} - \frac{\rho_0^2}{12\epsilon}\left[\phi\right]_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^\pi r^4 \operatorname{sen}\theta dr d\theta \\
&= \frac{\pi R^5\rho_0^2(2\epsilon+\epsilon_0)}{9\epsilon_0\epsilon} + \frac{\rho_0^2}{12\epsilon}(2\pi)\left[\cos\theta\right]_0^\pi\int_0^R r^4 dr \\
&= \frac{R^5\pi\rho_0^2(2\epsilon+\epsilon_0)}{9\epsilon_0\epsilon} + \frac{\pi\rho_0^2}{6\epsilon}(-2)\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R \\
&= \frac{R^5\pi\rho_0^2(2\epsilon+\epsilon_0)}{9\epsilon_0\epsilon} - \frac{\pi R^5\rho_0^2}{15\epsilon} \\
&= \frac{R^5\pi\rho_0^2(10\epsilon+2\epsilon_0)}{45\epsilon_0\epsilon} \\
\mathbb{U} &= \frac{2\pi R^5\rho_0^2(5\epsilon+\epsilon_0)}{45\epsilon_0\epsilon}
\end{aligned}$$

que concorda com a equação 10.56 obtida anteriormente. No próximo capítulo estudaremos os capacitores, além de outros exemplos envolvendo a energia eletrostática.

10.6 Exercícios

10.1 Demonstre a relação 10.2,

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] = -\nabla'\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]$$

que relaciona o operador ∇ nas coordenadas sem linha com o operador nas coordenadas com linha.

10.2 Suponha que uma coroa esférica dielétrica descarregada, de raios R_a e R_b ($R_a < R_b$) e permissividade ϵ_c, esteja no vácuo. Na região $r < R_a$ o meio tem permissividade ϵ_0. Calcule os potenciais, campos e deslocamentos elétricos, as densidades de carga de polarização e a carga total de polarização.

10.3 Duas esferas condutoras concêntricas, descarregadas e isoladas, de raios R_1 e R_2, têm, entre elas, um material dielétrico de permissividade ϵ. O material, entretanto, não preenche todo o volume entre as duas esferas. Ele se estende nos intervalos $R_1 \leq r \leq R_2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, ou seja,. preenche exatamente a metade da coroa esférica. Usando as soluções da equação de Laplace em coordenadas esféricas, ache os potenciais, campos e deslocamentos elétricos, a polarização e as densidades de carga de polarização nos quatro meios, considerando que, dentro da esfera menor, fora da esfera maior, e na metade da coroa não preenchida pelo dielétrico, a permissividade é ϵ_0.

10.4 Considere uma casca esférica condutora de raio R, com uma densidade superficial de carga σ homogênea sobre a sua superfície. Dentro da casca e fora dela existe um meio de permissividade ϵ_0. Encontre a energia eletrostática do sistema.

10.5 No exemplo 10.6, estudamos um problema envolvendo um cilindro dielétrico envolto por uma coroa dielétrica, ambos colocados num campo elétrico externo homogêneo. Ache, para aquele exemplo, os campos e deslocamentos elétricos, as polarizações elétricas, as densidades de carga de polarização e a carga total de polarização induzida em cada um dos meios.

Capítulo 11

Capacitores

Nos exemplos 4.14 e 5.9, estudamos o seguinte arranjo formado por dois planos condutores infinitos:

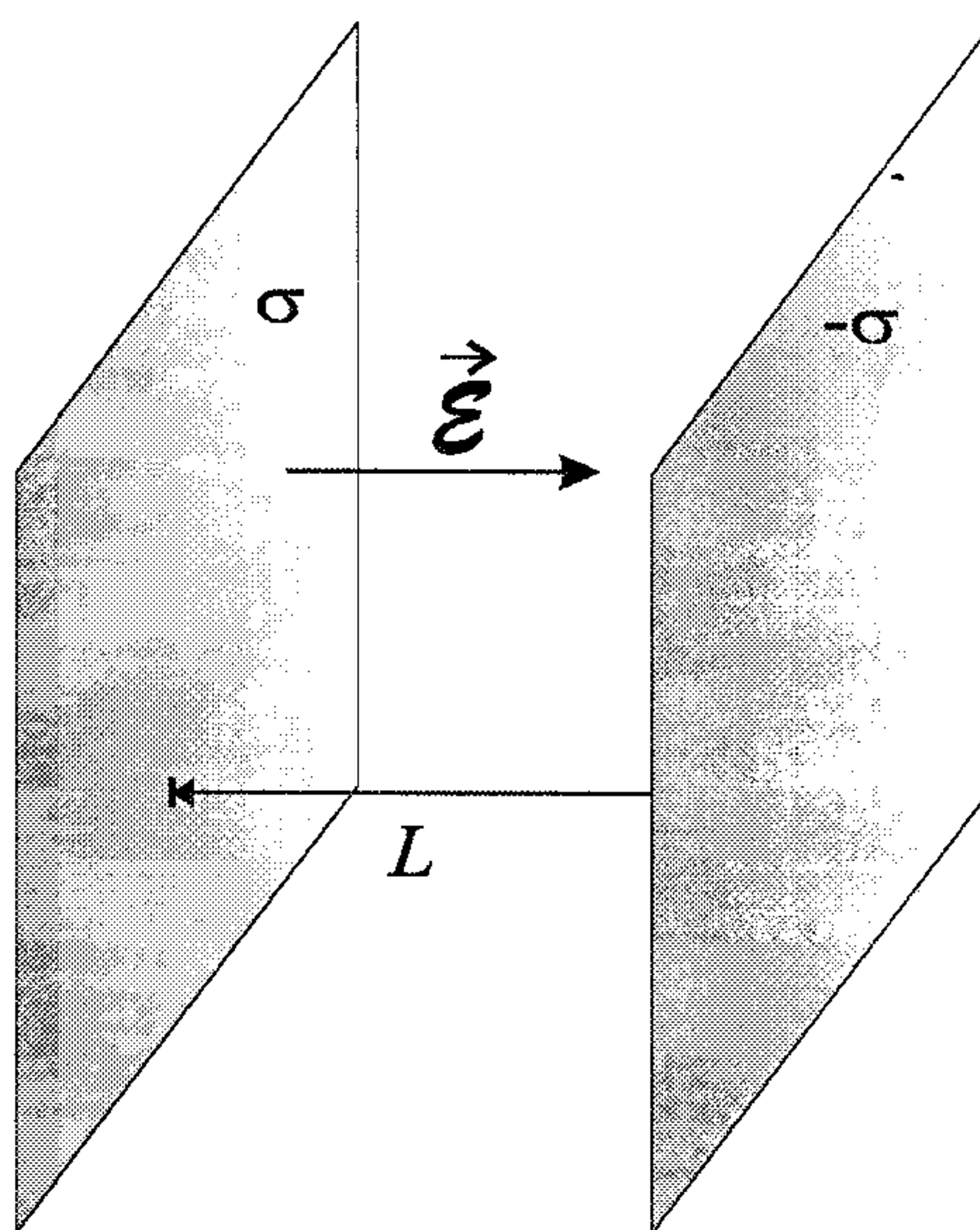



Figura 11.1: Dois planos infinitos paralelos, com densidades de carga σ e $-\sigma$, formando um capacitor plano paralelo.

Esta configuração especial de condutores é caracterizada pelo fato de que a carga contida num deles tem o mesmo valor, mas sinal contrário, que a carga contida no outro, o que faz com que a carga total do sistema seja

nula. Além disso, esses condutores armazenam cargas de forma independente de outros condutores que possam estar nas proximidades. Um arranjo como este, chamado de *capacitor*, é um importante elemento de circuito. O capacitor ilustrado na figura 11.1 é conhecido como capacitor plano paralelo, mas a forma geométrica dos condutores que formam o capacitor pode ser qualquer, e além disso, um condutor não precisa ser idêntico ao outro. O importante é que nos dois condutores as cargas sejam Q e $-Q$.

11.1 Estudo dos Capacitores

Para o capacitor plano paralelo, temos alguns resultados já calculados. O campo elétrico dentro do capacitor vale, pela equação 4.24,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{n}$$

onde σ é a densidade de carga positiva. A diferença entre os potenciais elétricos dos dois planos é, de acordo com a equação 5.31,

$$\mathbb{V}_{\text{plano } \sigma} - \mathbb{V}_{\text{plano } -\sigma} = \Delta\mathbb{V} = \frac{QL}{\epsilon_0 A}$$

sendo que A é a área de qualquer um dos planos, já que eles são iguais, L é a distância entre eles e Q é a carga total num deles. Note que estas expressões valem, rigorosamente, apenas para planos infinitos de carga. Quando os planos são finitos, nas extremidades o campo elétrico não é mais dado pela expressão 4.24, e as linhas de campo assemelham-se às que são apresentadas na figura 11.2.

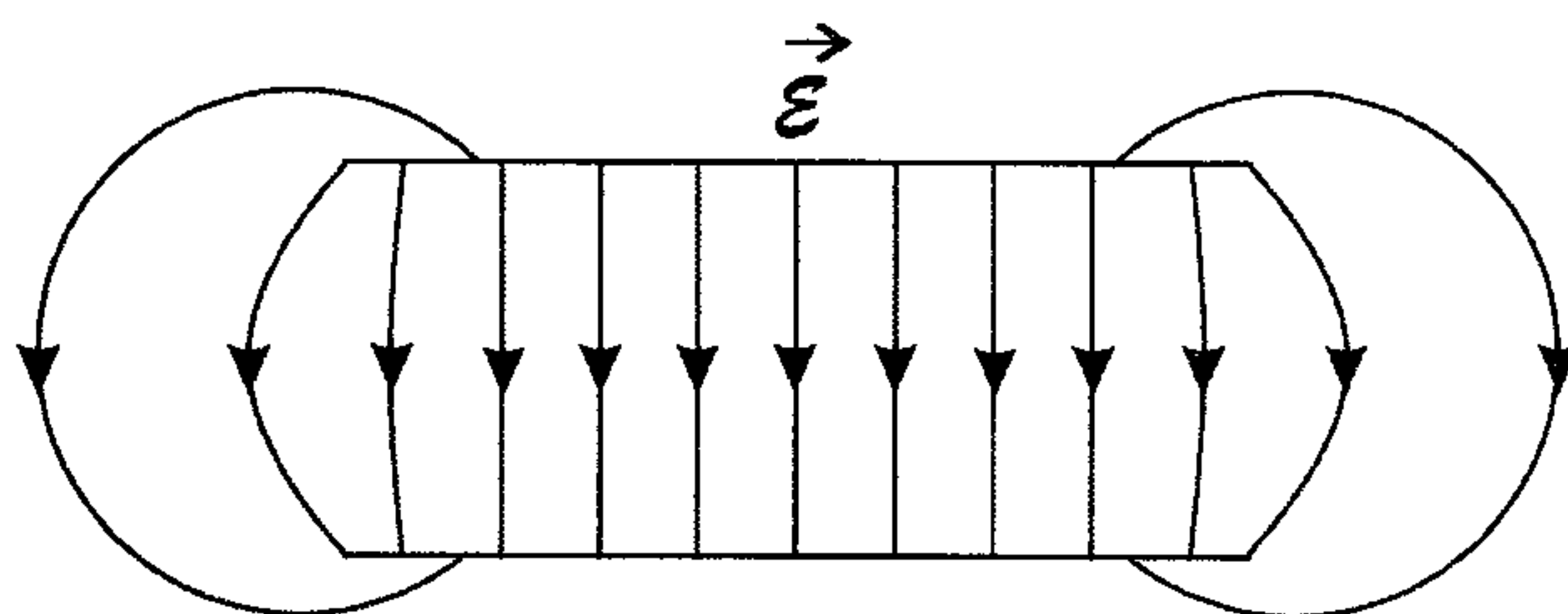



Figura 11.2: Linhas de campo elétrico de um capacitor plano paralelo finito.

Apesar de o campo elétrico nas bordas do capacitor plano paralelo finito não ser homogêneo, como acontece com a região central, podemos aproximá-lo por um campo constante e homogêneo, se desprezarmos os efeitos de borda. Tal aproximação melhora à medida que a distância L entre os planos do capacitor se torna pequena em comparação com a largura ou o comprimento dos planos. Esta é a situação geral na prática, e assim, para todos os efeitos, o campo elétrico e a diferença de potencial para qualquer capacitor plano paralelo são dados pelas expressões vistas acima.

Para qualquer capacitor, e não apenas para o plano paralelo, a intensidade do campo elétrico é diretamente proporcional à carga nos condutores, já que, pela equação 4.5,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV$$

Assim, se dobrarmos a densidade de cargas $\rho(\vec{r}\,')$, dobrará também a intensidade do campo elétrico. Além disso, pela relação 5.19, que é

$$d\mathbb{V} = -\vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{\ell}$$

quando dobra a intensidade do campo elétrico, a diferença de potencial aumenta pelo mesmo fator, pois ela é diretamente proporcional ao campo elétrico. Portanto, a diferença de potencial é diretamente proporcional à carga no condutor. Esta relação pode ser escrita matematicamente na forma

$$\Delta\mathbb{V} \propto Q$$

que pode ser transformada numa igualdade, se introduzirmos uma constante α, ou seja,

$$\Delta\mathbb{V} = \alpha Q$$

Esta equação pode ser invertida para dar

$$Q = \mathcal{C}\Delta\mathbb{V}$$

ou

$$\mathcal{C} = \frac{Q}{\Delta\mathbb{V}} \tag{11.1}$$

que define uma grandeza chamada *capacitância*, representada pela letra C, característica do sistema formado pelos condutores. Note que a equação 11.1 é uma definição operacional e que, na verdade, a capacitância é uma propriedade associada à geometria do arranjo formado pelos condutores e ao meio que existe entre eles. A capacitância só pode ser alterada mediante a mudança da geometria dos condutores ou do meio entre eles (introduzindo-se um dielétrico no capacitor, por exemplo). Assim, os capacitores são classificados por sua capacitância C, e quando submetidos a uma certa diferença de potencial específica, adquirem uma carga Q dada pela equação acima. Desta equação, podemos obter a unidade da capacitância, que, no SI, é dada por C/V. Essa unidade recebe um nome especial, farad, e ela é simbolizada por F. Portanto,

$$1\,\mathrm{F} = \frac{1\,\mathrm{C}}{1\,\mathrm{V}}$$

Os capacitores usuais têm, normalmente, suas capacitâncias dadas em termos de submúltiplos do farad. Os mais utilizados são o microfarad (μF), que vale

$$1\ \mu\mathrm{F} = 1 \times 10^{-6}\ \mathrm{F}$$

o nanofarad (nF), que vale

$$1\ \mathrm{nF} = 1 \times 10^{-9}\ \mathrm{F}$$

e o picofarad (pF), que vale

$$1\ \mathrm{pF} = 1 \times 10^{-12}\ \mathrm{F}$$

A principal função do capacitor é justamente armazenar cargas, que podem ser usadas posteriormente para alguma finalidade. Ele é o primeiro *elemento de circuito elétrico* que vamos estudar. Nos circuitos elétricos, é comum aparecerem capacitores associados com outros elementos, como veremos posteriormente. Para representar um capacitor num diagrama de circuito elétrico, usamos o símbolo ⊣⊢, que lembra um capacitor plano paralelo, mas que pode ser utilizado para qualquer capacitor, de qualquer forma geométrica. Antes de estudar alguns circuitos simples envolvendo capacitores, vamos calcular as capacitâncias para alguns arranjos simples.

Exemplo 11.1. *Qual é a capacitância de um capacitor plano paralelo, de área A e distância L entre os planos, situado no vácuo?*

Este problema pode ser facilmente resolvido se lembrarmos que a diferença de potencial entre as placas do capacitor é dada pela equação 5.31, ou seja,

$$\Delta\mathbb{V} = \frac{QL}{\epsilon_0 A}$$

Com a definição 11.1 para a capacitância, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \frac{Q}{\Delta\mathbb{V}} \\ &= \frac{Q}{\frac{QL}{\epsilon_0 A}} \\ \mathcal{C} &= \frac{\epsilon_0 A}{L} \end{aligned} \tag{11.2}$$

que envolve apenas fatores geométricos e o meio, representado pela permissividade ϵ_0. Note que a capacitância é diretamente proporcional à área A e inversamente proporcional à distância L entre os planos. Isso pode ser entendido da seguinte forma: quanto maior a àrea A, mais cargas o capacitor pode acumular, o que aumenta a capacitância. Do mesmo modo, quanto menor a distância entre os planos, menor é a diferença de potencial entre eles, o que também aumenta a capacitância. O terceiro modo de aumentar a capacitância consiste em preencher o espaço entre os dois planos com um dielétrico de permissividade elétrica ϵ, pois isso diminui o campo elétrico dentro do dielétrico, o que, por sua vez, também diminui a diferença de potencial e provoca um aumento na capacitância, que neste caso fica

$$\mathcal{C} = \frac{\epsilon A}{L}$$

Colocar um dielétrico entre os condutores num capacitor também auxilia na própria construção do capacitor, porque os condutores podem ser fixados no dielétrico de modo a formar um conjunto compacto e fácil de manusear. Além disso, pela tabela 6.1, o módulo de rigidez dielétrica dos materiais dielétricos é maior do que o do ar, ou seja, os dielétricos resistem melhor do que o ar a campos elétricos mais intensos, que podem provocar descargas de um condutor a outro e danificar o capacitor. Assim, a menos que se faça vácuo dentro do capacitor, ele será mais estável se for preenchido por um dielétrico.

A energia eletrostática armazenada no capacitor plano paralelo no vácuo é dada por 10.52, isto é,

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2}\int_V \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}\, dV$$

O campo elétrico dentro do capacitor é fornecido pela equação 4.24, que é

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{n}$$

sendo σ a densidade superficial de cargas, ou seja, $\sigma = \frac{Q}{A}$. O deslocamento elétrico é

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} = \sigma\,\hat{n}$$

O campo elétrico fora do capacitor é nulo, e assim, a integral da energia eletrostática se estende apenas dentro do volume do capacitor. Portanto, a densidade de energia eletrostática, expressa pela equação 10.53, fica

$$\begin{aligned} \mathrm{u} &= \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{n} \cdot \sigma\,\hat{n} \\ \mathrm{u} &= \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

A energia total é

$$\begin{aligned} \mathbb{U} &= \int_V \mathrm{u}\, dV \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0}\int_V dV \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0} AL \\ \mathbb{U} &= \frac{1}{2}\frac{Q^2 L}{A\epsilon_0} \end{aligned} \tag{11.3}$$

A capacitância $\mathcal{C}$ do capacitor plano paralelo é fornecida pela expressão 11.2, ou seja,

$$\mathcal{C} = \frac{\epsilon_0 A}{L}$$

e assim, temos

$$\mathbb{U} = \frac{Q^2}{2C}$$

Exemplo 11.2. *Considere duas esferas condutoras concêntricas de raios R_a e R_b ($R_a < R_b$), com cargas Q e $-Q$, respectivamente. Calcule a capacitância desse capacitor esférico. O meio entre as esferas tem permissividade ϵ.*

O capacitor esférico é ilustrado na figura 11.3.

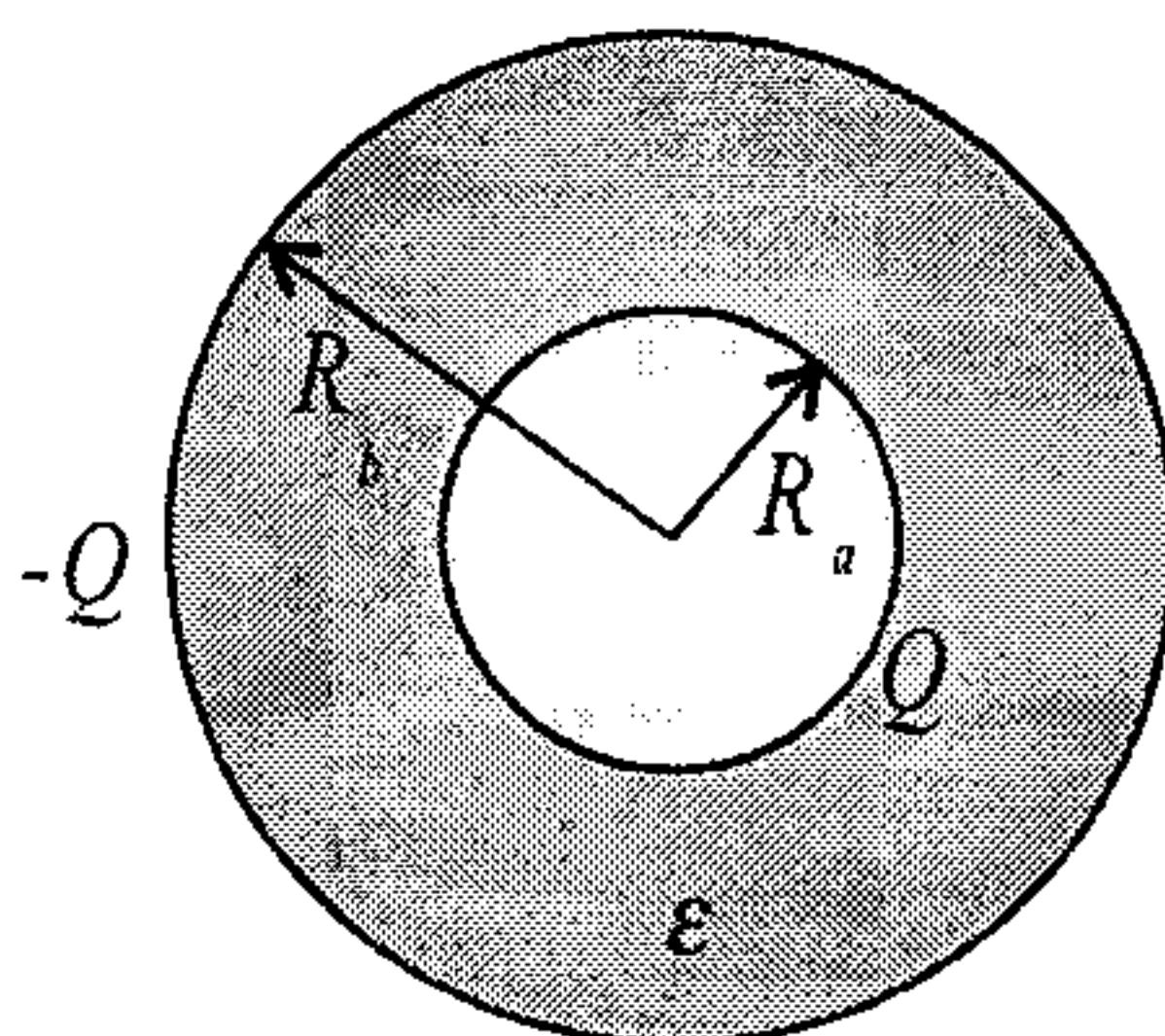



Figura 11.3: Um capacitor esférico.

Para encontrar a diferença de potencial entre as esferas, precisamos primeiro achar o campo elétrico na região entre elas, o que pode ser feito mediante a lei de Gauss 10.11, ou seja,

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{Q}{\epsilon}$$

O campo elétrico dentro da esfera menor é nulo, já que a carga nessa região é nula. Da mesma forma, o campo fora da esfera maior também é nulo, pois a carga líquida dentro de uma superfície gaussiana de raio r, com $r > R_b$, é $Q + (-Q) = 0$, e assim,

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = 0$$

o que implica que $\vec{\mathcal{E}} = 0$ fora da esfera maior. Resta apenas a região entre as esferas. Nesse local, vamos considerar uma superfície gaussiana de raio r, como a que aparece na figura 11.4. Por simetria, o campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}$ nessa superfície tem módulo constante, e ele está orientado na direção radial para

fora, o que significa que $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\,\hat{\mathbf{r}}$, já que a carga dentro da gaussiana é positiva. Assim, temos

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{Q}{\epsilon}$$

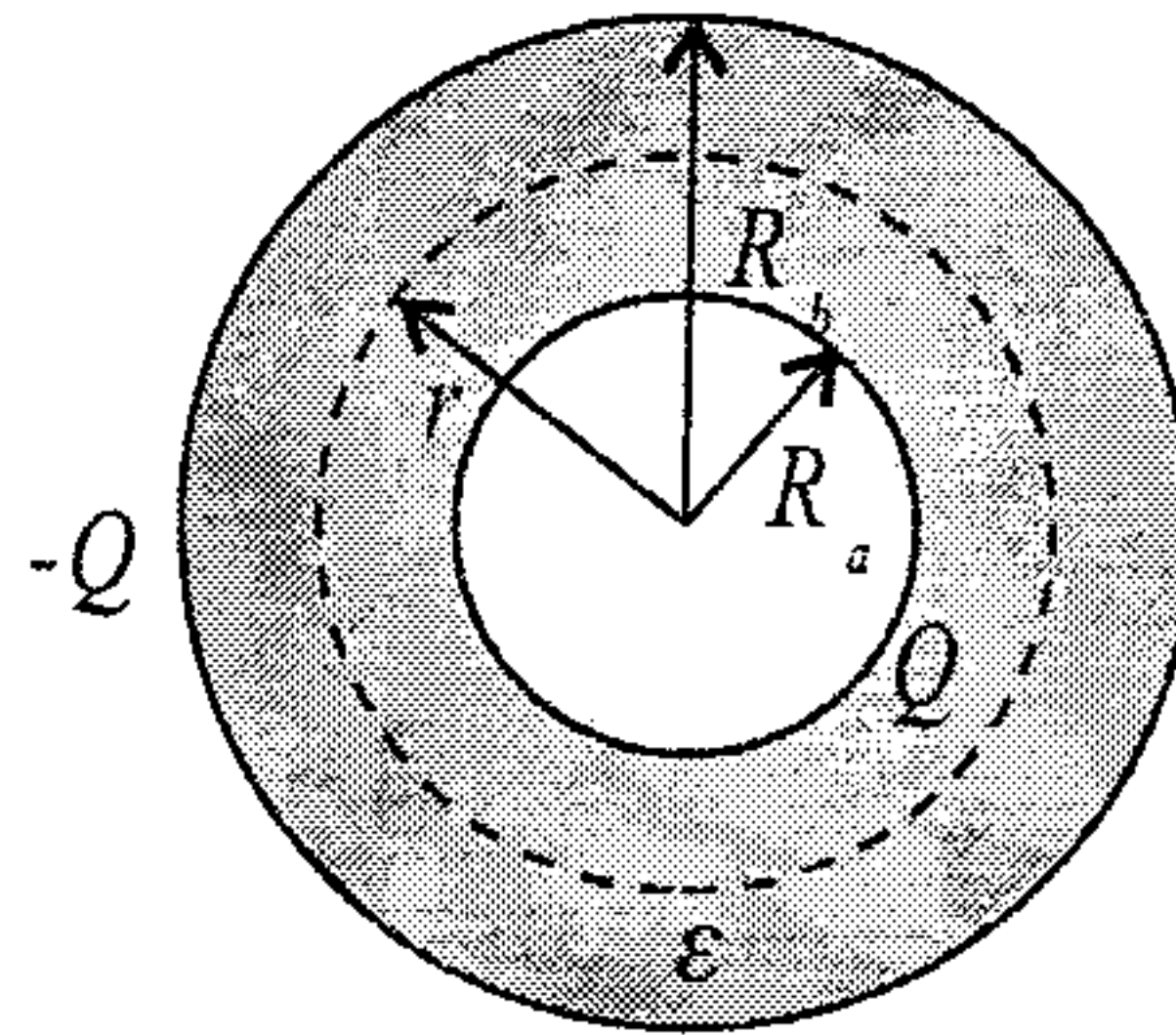



Figura 11.4: Superfície gaussiana para o capacitor esférico.

ou

$$\begin{aligned} \oint_{S_G} \mathcal{E}\,\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}\, dA &= \frac{Q}{\epsilon} \\ \mathcal{E} \oint_{S_G} dA &= \frac{Q}{\epsilon} \\ \mathcal{E} 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\epsilon} \\ \mathcal{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \end{aligned}$$

ou, vetorialmente,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \tag{11.4}$$

A diferença de potencial entre os condutores pode ser encontrada mediante a equação 5.19, isto é,

$$d\mathbb{V} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

que deve ser integrada desde uma esfera até a outra, ou seja,

$$\int_{R_a}^{R_b} d\mathbb{V} = -\int_{R_a}^{R_b} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

ou

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(R_b) - \mathbb{V}(R_a) &= -\int_{R_a}^{R_b} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \cdot (dr\,\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\mathrm{sen}\,\theta d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}) \\
&= -\frac{Q}{4\pi\epsilon}\int_{R_a}^{R_b} \frac{dr}{r^2} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left[\frac{1}{r}\right]_{R_a}^{R_b} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left[\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_a}\right] \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{R_a - R_b}{R_a R_b} \\
\mathbb{V}(R_b) - \mathbb{V}(R_a) &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{R_b - R_a}{R_a R_b}
\end{aligned}
$$

Note que o sinal negativo significa que o potencial em R_b é menor do que o potencial em R_a. Assim, podemos escrever

$$
\mathbb{V}(R_a) - \mathbb{V}(R_b) = \Delta\mathbb{V} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{R_b - R_a}{R_a R_b}
$$

A capacitância é obtida de 11.1, e ela fica

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \frac{Q}{\Delta V} \\
&= \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{R_b - R_a}{R_a R_b}} \\
\mathcal{C} &= 4\pi\epsilon\frac{R_a R_b}{R_b - R_a}
\end{aligned}
\tag{11.5}
$$

Observe que, novamente, aparecem apenas fatores geométricos, além da permissividade do meio. Esta expressão pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \frac{4\pi\epsilon R_a R_b}{R_b\left(1 - \frac{R_a}{R_b}\right)} \\
\mathcal{C} &= \frac{4\pi\epsilon R_a}{1 - \frac{R_a}{R_b}}
\end{aligned}
$$

Quando a esfera externa se torna muito grande, $R_b \to \infty$, e assim, obtemos a capacitância de um capacitor esférico que tem uma das esferas com tamanho infinito, ou seja,

$$\mathcal{C} = 4\pi\epsilon R_a$$

que, por vezes, é dita ser a capacitância de uma esfera de raio R_a. A energia armazenada no capacitor pode ser obtida mediante a expressão 10.52. Para tanto, precisamos do deslocamento elétrico, que fica, a partir da equação 11.4,

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

O campo elétrico é diferente de zero apenas dentro do capacitor, e a integral de volume da energia eletrostática estende-se apenas nesta região, isto é,

$$\begin{aligned}
\mathbb{U} &= \frac{1}{2}\int_V \vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}\,dV \\
&= \frac{1}{2}\int_V \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\frac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\,dV \\
&= \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon}\int_{R_a}^{R_b}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^4}\,r^2\operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi \\
&= \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon}(2\pi)\int_{R_a}^{R_b}\int_0^{\pi}\frac{1}{r^2}\operatorname{sen}\theta dr d\theta \\
&= -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon}\left[\cos\right]_0^{\pi}\int_{R_a}^{R_b}\frac{dr}{r^2} \\
&= \frac{Q^2}{16\pi\epsilon}(-2)\left[\frac{1}{r}\right]_{R_a}^{R_b} \\
&= -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon}\left[\frac{1}{R_b}-\frac{1}{R_a}\right] \\
&= -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon}\frac{R_a-R_b}{R_aR_b} \\
\mathbb{U} &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon}\frac{R_b-R_a}{R_aR_b}
\end{aligned}$$

A equação 11.5 nos fornece a capacitância do capacitor esférico como sendo

$$\mathcal{C} = 4\pi\epsilon\frac{R_aR_b}{R_b-R_a}$$

e assim, obtemos para a energia armazenada,

$$\mathbb{U} = \frac{Q^2}{2\mathcal{C}}$$

Exemplo 11.3. *Considere um cabo coaxial formado por um longo fio condutor cilíndrico, de raio R_1, situado dentro de um outro fio condutor cilíndrico, concêntrico com o primeiro, de raio R_2. Os condutores têm cargas Q e $-Q$, respectivamente, como mostra a figura 11.5. Calcule a capacitância do cabo coaxial, considerando que o meio entre eles tem permissividade ϵ.*

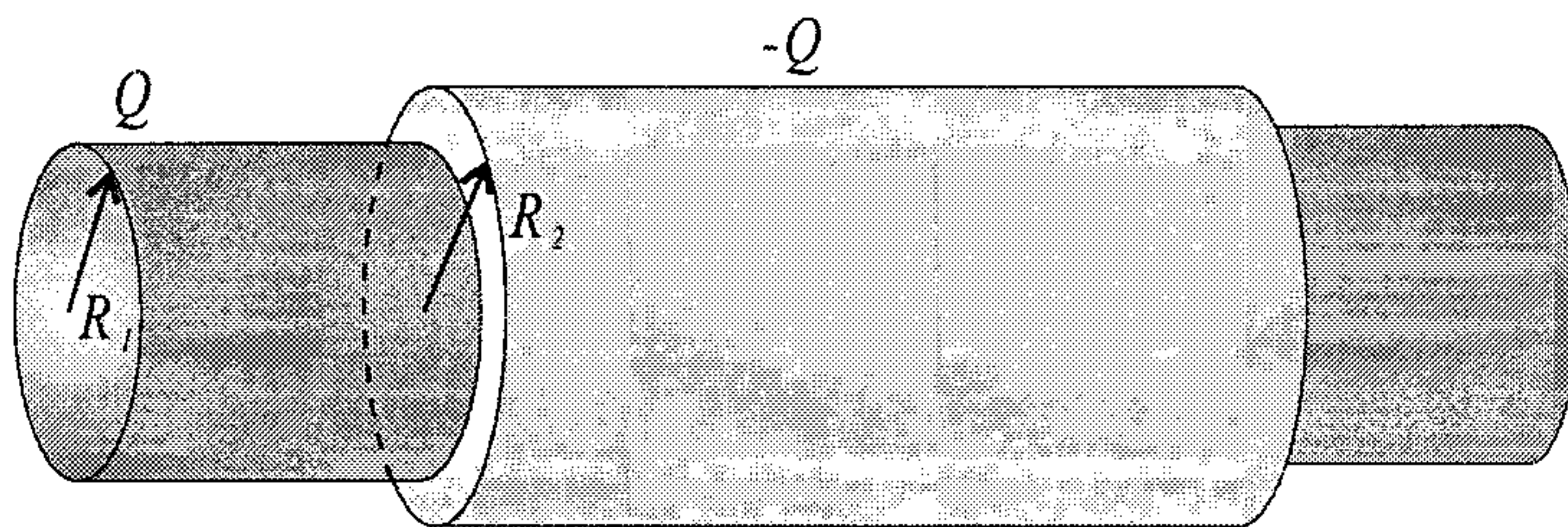



Figura 11.5: Um cabo coaxial.

Antes de obter a capacitância, precisamos encontrar o campo elétrico gerado por este arranjo de condutores. A lei de Gauss 10.11,

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{Q}{\epsilon}$$

nos diz que, dentro do fio de raio R_1 e fora do fio de raio R_2, o campo é nulo, pois as cargas líquidas nessas regiões são nulas. Resta, portanto, achar o campo elétrico na região entre os fios, que, por simetria, deve estar orientado de forma radial, perpendicular ao eixo dos fios, na direção de $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, ou seja, $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$. Assim, considerando uma superfície gaussiana cilíndrica, de raio ρ e altura L entre os fios, temos

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{q}{\epsilon}$$

A carga q dentro da superfície gaussiana pode ser encontrada do seguinte modo: a carga Q do fio está distribuída sobre sua superfície, de uma forma homogênea. Portanto, podemos considerar uma densidade superficial de carga σ dada por

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi R_1 \ell}$$

onde ℓ é o comprimento do fio cilíndrico interno, que tem uma carga Q e raio R_1. Desse modo, lembrando que o versor normal à superfície gaussiana nas

bases é dado por $-\hat{\mathbf{k}}$, na base esquerda, e $\hat{\mathbf{k}}$, na base direita, enquanto, na superfície lateral, o versor é $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, a lei de Gauss fica

$$\oint_{S_G} \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{1}{\epsilon} \int_{S_G} \sigma\, dA$$

Note que a integral do lado direito é feita sobre a região que tem cargas, dentro da superfície gaussiana, ou seja, apenas sobre a área do fio interno. Assim, chamando de dA' o elemento de área sobre esse fio, temos

$$\int_{\text{base esq.}} \mathcal{E}\, \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot (-\hat{\mathbf{k}})\, dA + \int_{\text{base dir.}} \mathcal{E}\, \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\mathbf{k}}\, dA + \int_{\text{lateral}} \mathcal{E}\, \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}\, dA = \frac{\sigma}{\epsilon} \int_{S_G} dA'$$

ou

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \int_{\text{lateral}} dA &= \frac{\sigma}{\epsilon} 2\pi R_1 L \\ \mathcal{E} 2\pi\rho L &= \frac{1}{\epsilon} \frac{Q}{2\pi R_1 l} 2\pi R_1 L \\ \mathcal{E} &= \frac{Q}{2\pi\epsilon\rho l} \end{aligned}$$

ou, vetorialmente,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon\rho\ell}\, \hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{11.6}$$

Observe que, quando o fio é muito fino, podemos substituir o fator $\frac{Q}{\ell}$ por uma densidade linear de cargas λ, e assim, obtemos

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho}\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

que é o campo elétrico de um fio de cargas, dado pela expressão 4.9.

Voltando ao nosso problema, temos que encontrar a diferença de potencial entre os dois fios cilíndricos, através da expressão 5.19,

$$d\mathbb{V} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

que deve ser integrada desde um fio até o outro, isto é,

$$\int_{R_1}^{R_2} d\mathbb{V} = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

ou

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(R_2) - \mathbb{V}(R_1) &= -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon\rho\ell}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + dz\,\hat{\mathbf{k}} \\
&= -\frac{Q}{2\pi\epsilon\ell}\int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho} \\
&= -\frac{Q}{2\pi\epsilon\ell}\left[\ln R_2 - \ln R_1\right] \\
\mathbb{V}(R_2) - \mathbb{V}(R_1) &= -\frac{Q}{2\pi\epsilon\ell}\ln\frac{R_2}{R_1}
\end{aligned}$$

Como a diferença de potencial é negativa, o potencial do fio interno é maior do que o do fio externo. Temos, portanto,

$$\mathbb{V}(R_1) - \mathbb{V}(R_2) = \Delta\mathbb{V} = \frac{Q}{2\pi\epsilon\ell}\ln\frac{R_2}{R_1} \tag{11.7}$$

e a capacitância do cabo coaxial fica

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \frac{Q}{\Delta\mathbb{V}} \\
&= \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon\ell}\ln\frac{R_2}{R_1}} \\
\mathcal{C} &= \frac{2\pi\epsilon\ell}{\ln\frac{R_2}{R_1}}
\end{aligned} \tag{11.8}$$

Aqui é interessante definir uma capacitância por unidade de comprimento do fio como sendo

$$c = \frac{\mathcal{C}}{\ell}$$

ou seja,

$$c = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

que é função apenas da geometria e do meio entre os condutores, como deve ser. A energia armazenada no cabo coaxial pode ser obtida do campo elétrico 11.6, bastando que calculemos o deslocamento elétrico, que fica

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{2\pi\rho\ell}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

A energia fica

$$\begin{aligned}
\mathbb{U} &= \frac{1}{2}\int_V \vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}\,dV \\
&= \frac{1}{2}\int_V \frac{Q}{2\pi\epsilon\rho\ell}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\frac{Q}{2\pi\rho\ell}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\,dV \\
&= \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon\ell^2}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\ell}\frac{1}{\rho^2}\,\rho d\rho d\theta dz \\
&= \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon\ell^2}\ell\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\frac{d\rho}{\rho}d\theta \\
&= \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon\ell}(2\pi)\int_{R_1}^{R_2}\frac{d\rho}{\rho} \\
&= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon\ell}\left[\ln R_2 - \ln R_1\right] \\
\mathbb{U} &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon\ell}\ln\frac{R_2}{R_1}
\end{aligned}$$

A capacitância do cabo coaxial é dada pela expressão 11.8,

$$\mathcal{C} = \frac{2\pi\epsilon\ell}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

e desse modo, a energia fica

$$\mathbb{U} = \frac{Q^2}{2\mathcal{C}}$$

Podemos perceber, nos três exemplos acima, que a energia armazenada no capacitor está associada à carga no capacitor e à sua capacitância, através da relação

$$\mathbb{U} = \frac{Q^2}{2\mathcal{C}}$$

Esta expressão tem validade geral, e ela pode ser deduzida facilmente se lembrarmos que a energia potencial elétrica está relacionada ao potencial elétrico através da equação 5.11, que é,

$$\mathbb{V} = \frac{U}{q_p}$$

Podemos reescrever esta relação como

$$U = q_p \mathbb{V}$$

Iniciando com o capacitor totalmente descarregado, vemos que, ao transferirmos uma carga dQ para o capacitor, submetido a um potencial fixo $\mathbb{V}$, a energia potencial elétrica aumenta de um valor

$$dU = \mathbb{V} dQ$$

A capacitância é dada pela expressão 11.1,

$$C = \frac{Q}{\Delta \mathbb{V}}$$

Vamos considerar que um dos condutores do capacitor está no potencial nulo, ou seja, $\Delta \mathbb{V} = \mathbb{V}_1 - \mathbb{V}_2 = \mathbb{V}_1 = \mathbb{V}$. Assim, podemos escrever

$$\mathbb{V} = \frac{Q}{C}$$

e obtemos

$$dU = \frac{Q}{C} dQ$$

Integrando esta equação desde a situação em que o capacitor está descarregado até aquela na qual ele tem uma carga Q dentro dele, temos a energia total armazenada por ele, ou seja,

$$\int_0^Q dU = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ$$

$$\mathbb{U} = \frac{1}{C} \int_0^Q Q dQ$$

$$\mathbb{U} = \frac{1}{C} \left[\frac{Q^2}{2} \right]_0^Q$$

ou

$$\mathbb{U} = \frac{Q^2}{2C} \tag{11.9}$$

que é a expressão para a energia eletrostática armazenada no capacitor. Por meio da definição de capacitância, podemos escrever também

$$\mathbb{U} = \frac{Q^2}{2\frac{Q}{\mathbb{V}}}$$
$$\mathbb{U} = \frac{Q\mathbb{V}}{2} \tag{11.10}$$

ou ainda, considerando que

$$Q = \mathbb{V}C$$

obtemos

$$\mathbb{U} = \frac{Q^2}{2C}$$
$$= \frac{\mathbb{V}^2 C^2}{2C}$$
$$\mathbb{U} = \frac{C\mathbb{V}^2}{2} \tag{11.11}$$

Estas três expressões podem ser utilizadas para calcular a energia armazenada dentro do capacitor. A decisão a respeito de qual delas devemos usar para um problema específico depende das grandezas que são conhecidas ou não.

11.2 Associação de Capacitores

Em circuitos elétricos, é comum ocorrerem associações de capacitores, ou seja, dois ou mais capacitores são ligados entre si num circuito. Essa associação produz como resultado um capacitor equivalente, com uma certa capacitância equivalente. Trata-se de uma propriedade importante, porque os capacitores são fabricados com certos valores fixos de capacitância, e seria proibitivo, do ponto de vista econômico, produzir capacitores com todos os valores possíveis de capacitância. Assim, quando necessitamos de um valor de capacitância não-usual, podemos, por meio de uma associação de capacitores,

produzir um capacitor que tenha a capacitância desejada. Por causa disso, vamos estudar os modos de fazer essas associações e também alguns circuitos simples.

Existem apenas dois modos de conectar dois capacitores. Num deles, a placa positiva (ou negativa) de um é ligada, por meio de fios condutores, considerados normalmente como ideais, à placa negativa (ou positiva) do outro. Isso estabelece uma ligação em *série* entre os dois capacitores, como mostra a figura 11.6.

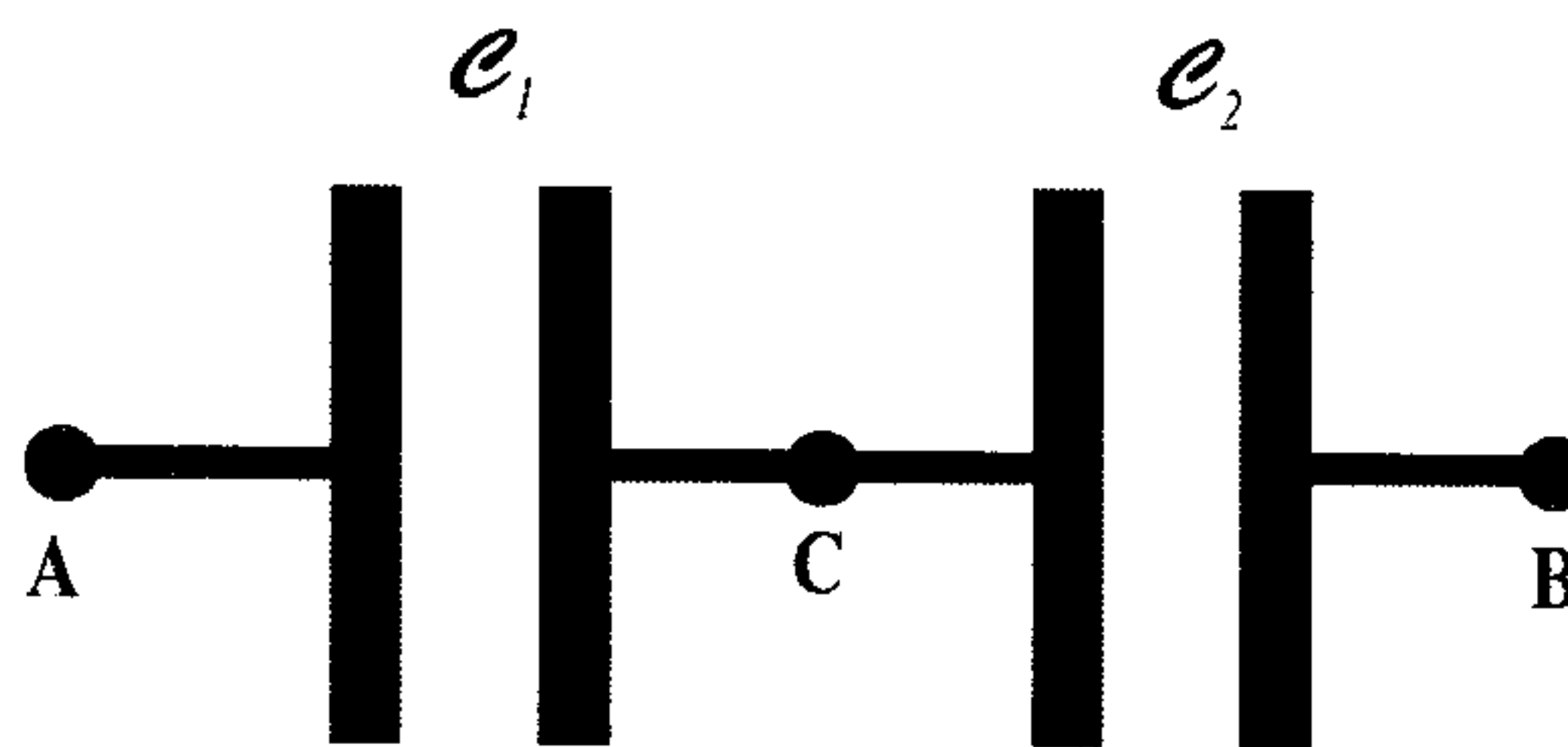



Figura 11.6: Associação em série de dois capacitores.

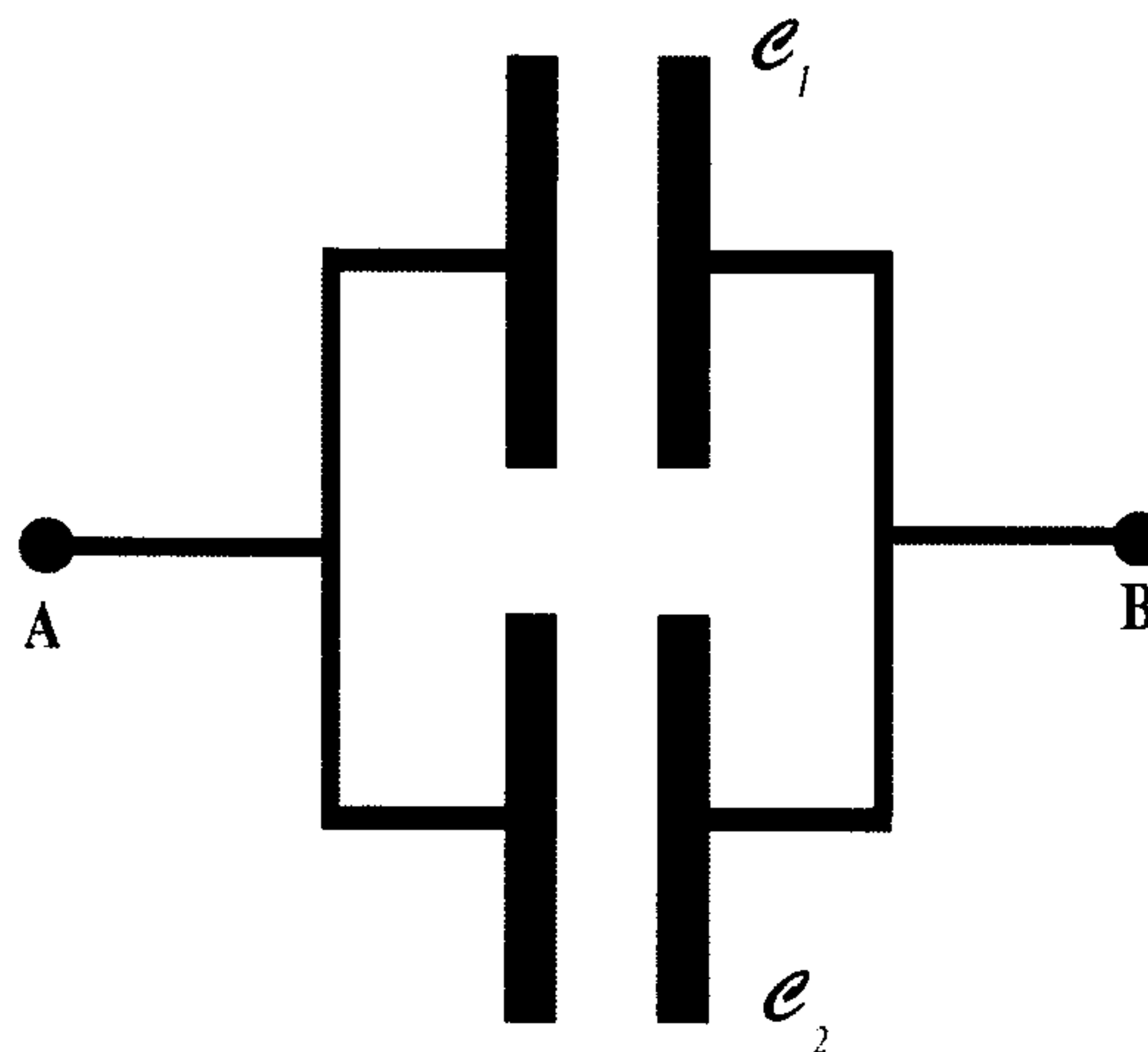



Figura 11.7: Associação em paralelo de dois capacitores.

O outro modo de associar dois capacitores consiste em ligar a placa positiva (ou negativa) de um à placa positiva (ou negativa) do outro, formando uma associação em *paralelo*, como mostra a figura 11.7. Note que estamos chamando de *placas* os condutores que formam o capacitor, independente-

mente da forma geométrica real. Por meio desses dois tipos de associação, podemos obter um capacitor equivalente, cuja capacitância está relacionada às capacitâncias dos capacitores que participam da associação, como veremos a seguir.

11.2.1 Associação de Capacitores em Série

Na associação em série apresentada na figura 11.6, temos dois capacitores, de capacitâncias C_1 e C_2, respectivamente. A diferença de potencial entre as placas desses dois capacitores é $\Delta\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_\mathbf{C} - \mathbb{V}_\mathbf{A}$, para o primeiro capacitor, e $\Delta\mathbb{V}_2 = \mathbb{V}_\mathbf{B} - \mathbb{V}_\mathbf{C}$, para o segundo. A diferença de potencial entre os pontos **B** e **A** é

$$\Delta\mathbb{V} = \mathbb{V}_\mathrm{B} - \mathbb{V}_\mathbf{A}$$

que pode ser reescrita como

$$\Delta\mathbb{V} = \mathbb{V}_\mathrm{B} - \mathbb{V}_\mathbf{C} + \mathbb{V}_\mathbf{C} - \mathbb{V}_\mathbf{A}$$

ou

$$\Delta\mathbb{V} = \Delta\mathbb{V}_2 + \Delta\mathbb{V}_1$$

Assim, para capacitores em série, a diferença de potencial entre os pontos **B** e **A** é dada pela soma das diferenças de potencial em cada capacitor e o capacitor equivalente, que vai substituir os dois capacitores, deve estar submetido a esta diferença de potencial.

A carga em cada uma das placas do capacitor deve ter o mesmo valor numérico, sem considerar o sinal. Isso ocorre por um motivo simples: os capacitores pertencem a um circuito fechado. Assim, quando uma carga negativa chega na placa esquerda de C_1, uma carga negativa deve sair da placa direita de C_2, para que haja conservação das cargas em todo o circuito. Assim, a placa esquerda de C_1 e a placa direita de C_2 adquirem a mesma carga em valor numérico, sem sinal, sendo que, na presente discussão, a placa esquerda de C é negativa e a direita em C_2 é positiva, o que gera um campo elétrico entre as placas, orientado da direita para a esquerda. Esse campo elétrico faz com que cargas negativas da placa direita de C_1 sejam atraídas para a placa esquerda de C_2, fazendo com que a primeira fique positiva, e a segunda, negativa. Além

disso, ainda em virtude da conservação das cargas, os valores destas cargas também são iguais, desconsiderando os sinais.

Resta provar que as cargas nas placas internas têm o mesmo valor que as cargas nas placas externas, sempre desconsiderando os sinais. Para isso, percebemos que, para o campo elétrico ser nulo na região do fio que liga os dois capacitores, o campo produzido pelas placas externas deve ser completamente anulado pelo campo produzido pelas placas internas, o que só ocorre quando as placas internas possuem a mesma carga que as externas. Portanto, chegamos finalmente à conclusão de que as cargas em todas as placas dos capacitores em série possuem o mesmo valor $|Q|$, sem sinal.

A capacitância de C_1 é

$$C_1 = \frac{Q}{\Delta\mathbb{V}_1}$$

de onde extraímos

$$\Delta\mathbb{V}_1 = \frac{Q}{C_1}$$

De forma análoga, para C_2 obtemos

$$\Delta\mathbb{V}_2 = \frac{Q}{C_2}$$

Somando as duas expressões, achamos

$$\Delta\mathbb{V}_1 + \Delta\mathbb{V}_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

ou, lembrando que o lado esquerdo é a diferença de potencial entre **B** e **A**,

$$\Delta\mathbb{V} = \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right] Q$$

O capacitor equivalente deve ter a mesma carga Q que os capacitores em série, ou seja,

$$\Delta\mathbb{V} = \frac{Q}{C}$$

Portanto, da comparação entre as duas equações encontramos

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{11.12}$$

que fornece o valor da capacitância equivalente para dois capacitores em série. Através da argumentação acima, é fácil perceber que, se houver N capacitores em série, a capacitância equivalente será

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} \tag{11.13}$$

As expressões acima também deixam claro que a capacitância equivalente de capacitores em série é sempre menor do que a menor capacitância dos capacitores individuais, e esta demonstração é deixada como exercício (veja o exercício 11.2).

Exemplo 11.4. *Suponha que você dispõe apenas de capacitores de capacitância $C = 1,0\ \mu F$ e que, para uma experiência, são necessários capacitores de $C = 0,5\ \mu F$, $C = 0,25\ \mu F$ e $C = 0,33\ \mu F$. Você vai poder realizar essa experiência?*

A experiência pode ser realizada. Primeiro, considerando dois capacitores em série, temos, para a capacitância equivalente, mediante o uso da equação 11.12,

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \\ &= \frac{1}{1,0 \times 10^{-6}} + \frac{1}{1,0 \times 10^{-6}} \\ \frac{1}{C} &= 2,0 \times 10^{6} \end{aligned}$$

ou

$$C = 0,5 \times 10^{-6}\ \text{F}$$

ou seja, associando dois capacitores de $C = 1,0\ \mu$F em série, obtemos um capacitor de $C = 0,5\ \mu$F.

Vamos considerar agora três capacitores de $1,0\ \mu$F em série. Pela expressão 11.13, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{C} &= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{C_i} \\ &= \frac{1}{1,0 \times 10^{-6}} + \frac{1}{1,0 \times 10^{-6}} + \frac{1}{1,0 \times 10^{-6}} \\ \frac{1}{C} &= 3,0 \times 10^{6}\end{aligned}$$

e então,

$$C = 0,33 \times 10^{-6} \text{ F}$$

e o capacitor equivalente tem uma capacitância de $0,33\ \mu$F, como é necessário.

Por fim, reunindo quatro capacitores em série, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{C} &= \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{C_i} \\ &= \frac{1}{1,0 \times 10^{-6}} + \frac{1}{1,0 \times 10^{-6}} + \frac{1}{1,0 \times 10^{-6}} + \frac{1}{1,0 \times 10^{-6}} \\ \frac{1}{C} &= 4,0 \times 10^{6}\end{aligned}$$

ou seja,

$$C = 0,25 \times 10^{-6} \text{ F}$$

e montamos o capacitor de $0,25\ \mu$F. Temos agora todos os capacitores necessários à experiência.

11.2.2 Associação de Capacitores em Paralelo

Na figura 11.7 vemos dois capacitores ligados em paralelo. Neste caso, a diferença de potencial entre as placas dos dois capacitores é a mesma, dada por $\Delta\mathbb{V} = \mathbb{V}_{\mathbf{B}} - \mathbb{V}_{\mathbf{A}}$. Essa diferença de potencial também é a mesma que deve existir entre as placas do capacitor equivalente. O capacitor C_1 tem uma capacitância

$$C_1 = \frac{Q_1}{\Delta\mathbb{V}}$$

de onde obtemos

$$Q_1 = \mathcal{C}_1 \Delta \mathbb{V}$$

e de forma semelhante, para $\mathcal{C}_2$, achamos

$$Q_2 = \mathcal{C}_2 \Delta \mathbb{V}$$

A carga total positiva ou negativa nas placas dos capacitores é dada por

$$Q = Q_1 + Q_2$$

e esta é a carga do capacitor equivalente, cuja capacitância é

$$\mathcal{C} = \frac{Q}{\Delta \mathbb{V}}$$

ou

$$\mathcal{C} = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta \mathbb{V}}$$

ou ainda,

$$\mathcal{C} = \frac{Q_1}{\Delta \mathbb{V}} + \frac{Q_2}{\Delta \mathbb{V}}$$

que fica

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \qquad (11.14)$$

e desse modo, a capacitância equivalente para dois capacitores ligados em paralelo é a soma das suas capacitâncias. Para N capacitores em paralelo, temos

$$\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{C}_i \qquad (11.15)$$

Note que a capacitância equivalente para capacitores em paralelo é sempre maior do que o maior valor de capacitância individual.

Exemplo 11.5. *Três capacitores, de $C_1 = 1,0\ \mu F$, $C_2 = 0,5\ \mu F$ e $C_3 = 2,5\ \mu F$, respectivamente, podem ser conectados em paralelo, para formar capacitores de capacitância maior que $C = 3,0\ \mu F$. Quais são os valores de capacitância produzidos?*

Podemos fazer várias combinações entre os capacitores. Colocando C_1 e C_3 em paralelo, obtemos

$$\begin{aligned} C_{1,3} &= C_1 + C_3 \\ &= 1,0 \times 10^{-6} + 2,5 \times 10^{-6} \\ C_{1,3} &= 3,5 \times 10^{-6}\ \text{F} \end{aligned}$$

ou $C_{1,3} = 3,5\ \mu\text{F}$. Reunindo C_2 e C_3 em paralelo, achamos

$$\begin{aligned} C_{2,3} &= C_2 + C_3 \\ &= 0,5 \times 10^{-6} + 2,5 \times 10^{-6} \\ C_{2,3} &= 3,0 \times 10^{-6}\ \text{F} \end{aligned}$$

ou seja, $C_{2,3} = 3,0\ \mu\text{F}$. Associando C_1, C_2 e C_3 em paralelo, o capacitor equivalente fica

$$\begin{aligned} C_{1,2,3} &= C_1 + C_2 + C_3 \\ &= 1,0 \times 10^{-6} + 0,5 \times 10^{-6} + 2,5 \times 10^{-6} \\ C_{1,2,3} &= 4,0 \times 10^{-6}\ \text{F} \end{aligned}$$

isto é, $C_{1,2,3} = 4,0\ \mu\text{F}$. As outras combinações produzem capacitores com capacitâncias menores que $3,0\ \mu\text{F}$.

11.2.3 Associação Mista de Capacitores

A associação mais geral entre capacitores envolve tanto ligações em série quanto em paralelo. Nestes casos, o capacitor equivalente é obtido mediante vários passos, nos quais as expressões 11.12 até 11.15 podem ser utilizadas várias vezes. Vejamos, portanto, alguns desses problemas.

Exemplo 11.6. *A figura 11.8 apresenta uma associação mista de capacitores. Responda ao seguinte.*

a) Calcule a capacitância equivalente.

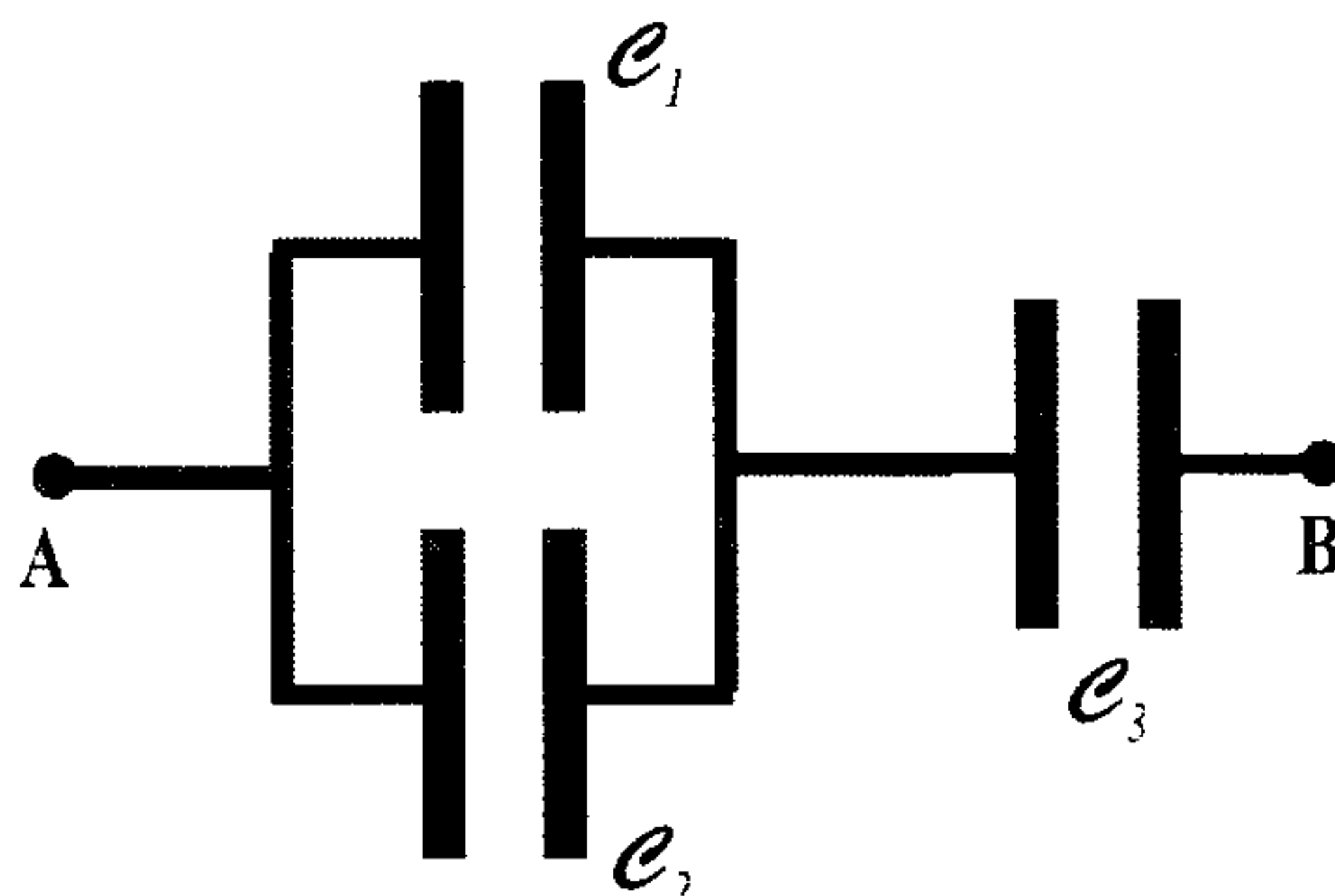



Figura 11.8: Uma associação mista de capacitores.

Nesta associação, os capacitores C_1 e C_2 são ligados em paralelo, formando um capacitor equivalente que, por sua vez, está ligado em série ao capacitor C_3. O capacitor equivalente em paralelo é

$$C_p = C_1 + C_2$$

Este capacitor está em série com C_3, o que resulta no capacitor equivalente

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_p} + \frac{1}{C_3} \\ &= \frac{C_3 + C_p}{C_3 C_p} \\ C &= \frac{C_3 C_p}{C_3 + C_p} \\ C &= \frac{C_3(C_1 + C_2)}{C_3 + C_1 + C_2} \end{aligned}$$

b) Sabendo que $C_1 = 2C_2$ e $C_3 = 4,5C_2$, obtenha a capacitância equivalente en função de C_2.

A capacitância equivalente fica

$$\begin{aligned} C &= \frac{4,5C_2(2C_2 + C_2)}{4,5C_2 + 2C_2 + C_2} \\ C &= \frac{4,5C_2(3C_2)}{7,5C_2} \\ C &= \frac{13,5C_2^2}{7,5C_2} \end{aligned}$$

$$C = 1,8C_2$$

c) Se $C_2 = 3,5$ μF, qual é o valor da capacitância equivalente?

A capacitância equivalente tem o valor

$$\begin{aligned} C &= 1,8C_2 \\ &= 1,8 \times 3,5 \times 10^{-6} \\ C &= 6,3 \times 10^{-6}\ \text{F} \end{aligned}$$

e a capacitância vale $6,3\ \mu$F.

Exemplo 11.7. *Calcule a capacitância equivalente entre os pontos* **A** *e* **B** *do circuito mostrado na figura 11.9, nas seguintes condições.*

a) A chave S está aberta.

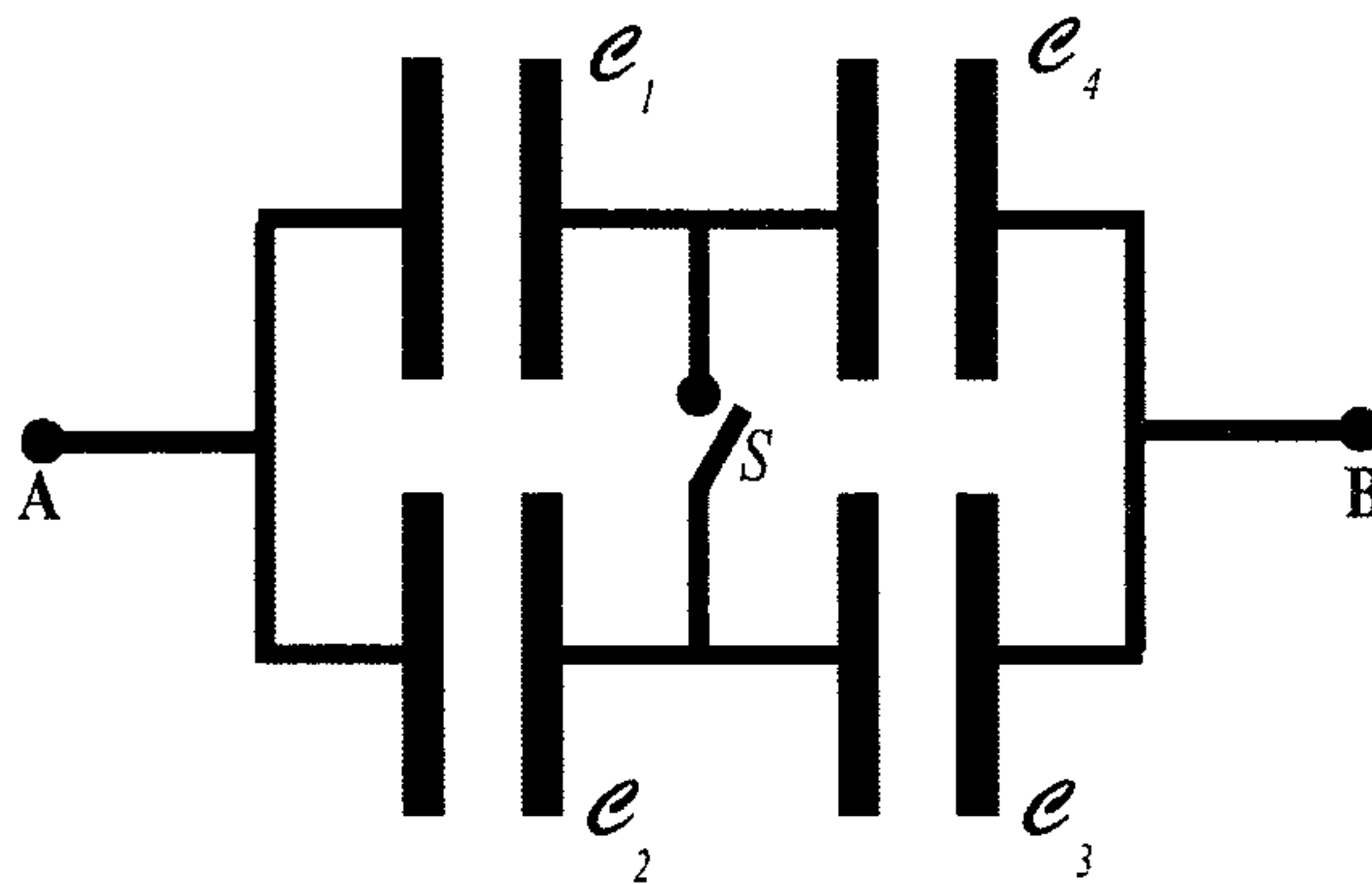



Figura 11.9: Uma outra associação mista de capacitores.

Quando a chave S está aberta, os capacitores C_1 e C_4 estão em série, e da mesma forma, C_2 e C_3, formando então os capacitores equivalentes $C_{1,4}$ e $C_{2,3}$, os quais, por sua vez, estão em paralelo, formando o capacitor equivalente C. Vamos, portanto, aos cálculos, iniciando com os capacitores C_1 e C_4, que estão em série.

$$\frac{1}{C_{1,4}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_4}$$

$$\frac{1}{C_{1,4}} = \frac{C_1 + C_4}{C_1 C_4}$$
$$C_{1,4} = \frac{C_1 C_4}{C_1 + C_4}$$

Os capacitores C_2 e C_3 estão em série, e assim,

$$\frac{1}{C_{2,3}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$
$$= \frac{C_2 + C_3}{C_2 C_3}$$
$$C_{2,3} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$

Os capacitores equivalentes $C_{1,4}$ e $C_{2,3}$ estão em paralelo, e conseqüentemente,

$$C = C_{1,4} + C_{2,3}$$
$$= \frac{C_1 C_4}{C_1 + C_4} + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$
$$C = \frac{C_1 C_4 (C_2 + C_3) + C_2 C_3 (C_1 + C_4)}{(C_1 + C_4)(C_2 + C_3)}$$

Supondo que todos os capacitores sejem iguais, com capacitância C_1, temos

$$C = \frac{C_1 C_1 (C_1 + C_1) + C_1 C_1 (C_1 + C_1)}{(C_1 + C_1)(C_1 + C_1)}$$
$$= \frac{2C_1^3 + 2C_1^3}{4C_1^2}$$
$$C = C_1$$

e assim, a capacitância equivalente é igual à capacitância de um capacitor individual.

b) A chave S está fechada.

Quando a chave S está fechada, os capacitores C_1 e C_2 estão em paralelo, formando o capacitor equivalente $C_{1,2}$. Da mesma forma, os capacitores C_3 e C_4 também estão em paralelo, e eles dão origem ao capacitor $C_{3,4}$. Estes dois capacitores, por sua vez, estão em série, formando o capacitor equivalente C. Vejamos os cálculos.

$$C_{1,2} = C_1 + C_2$$

$$C_{3,4} = C_3 + C_4$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C} &= \frac{1}{C_{1,2}} + \frac{1}{C_{3,4}} \\
&= \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4} \\
\frac{1}{C} &= \frac{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)} \\
C &= \frac{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}
\end{aligned}$$

Se os capacitores forem todos iguais a C_1, teremos

$$\begin{aligned}
C &= \frac{(C_1 + C_1)(C_1 + C_1)}{C_1 + C_1 + C_1 + C_1} \\
&= \frac{4C_1^2}{4C_1} \\
C &= C_1
\end{aligned}$$

Exemplo 11.8. *Suponha que um capacitor plano paralelo, de área A e distância L entre os planos, tem inicialmente vácuo entre os planos e que ele está submetido a uma diferença de potencial V entre as placas, quando então ele adquire uma carga Q. Esse capacitor é desconectado de fios externos, sendo mantido isolado, e um dielétrico de permissividade ϵ é colocado no seu interior, preenchendo todo o seu volume interno. Qual é a capacitância inicial, a capacitância final, e quais são os valores da carga e da diferença de potencial elétrico finais?*

A capacitância de um capacitor plano paralelo no vácuo é dada pela expressão 11.2, ou seja,

$$C_i = \frac{\epsilon_0 A}{L}$$

Essa capacitância também pode ser escrita, em termos da carga e da diferença de potencial, como

$$C_i = \frac{Q}{V}$$

Após o capacitor ter sido desconectado e mantido isolado, as cargas nas suas placas continuam tendo o valor Q, já que, estando isolado, ele não pode receber ou doar cargas. Sua capacitância muda para

$$C_f = \frac{\epsilon A}{L}$$

ou, em termos relativos,

$$\begin{aligned} \frac{C_f}{C_i} &= \frac{\frac{\epsilon A}{L}}{\frac{\epsilon_0 A}{L}} \\ &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \\ \frac{C_f}{C_i} &= \mathcal{K} \\ C_f &= \mathcal{K} C_i \end{aligned}$$

ou seja, a capacitância aumenta por um fator igual à constante dielétrica quando o capacitor é totalmente preenchido por um dielétrico. A nova capacitância também pode ser escrita como

$$\begin{aligned} C_f &= \frac{Q}{V_f} \\ &= \frac{Q}{V} \frac{V}{V_f} \\ C_f &= C_i \frac{V}{V_f} \end{aligned}$$

ou, como $C_f = \mathcal{K} C_i$,

$$\begin{aligned} \mathcal{K} C_i &= C_i \frac{V}{V_f} \\ \mathcal{K} &= \frac{V}{V_f} \\ V_f &= \frac{V}{\mathcal{K}} \end{aligned}$$

Isto é, a diferença de potencial entre as placas do capacitor diminui por um fator igual à constante dielétrica. Note que isso ocorre porque o capacitor está isolado do meio externo e as cargas estão fixadas nas placas. O próximo exemplo estuda um caso em que o potencial é fixado, não as cargas.

Exemplo 11.9. *Considere o mesmo problema anterior, só que, agora, a diferença de potencial a que o capacitor está submetido é mantida fixa. Obtenha as mesmas grandezas que no caso anterior.*

Os valores de capacitância inicial e final não mudam, e elas valem

$$\mathcal{C}_i = \frac{\epsilon_0 A}{L}$$

e

$$\mathcal{C}_f = \frac{\epsilon A}{L}$$

respectivamente. Da mesma forma, a relação entre as capacitâncias continua sendo

$$\mathcal{C}_f = \mathcal{K}\mathcal{C}_i$$

Em termos da carga e da diferença de potencial, as capacitâncias ficam

$$\mathcal{C}_i = \frac{Q}{V}$$

e

$$\mathcal{C}_f = \frac{Q_f}{V}$$

lembrando que a diferença de potencial V é fixa. Podemos reescrever esta capacitância como

$$\mathcal{C}_f = \frac{Q_f}{Q}\frac{Q}{V}$$
$$\mathcal{C}_f = \frac{Q_f}{Q}\mathcal{C}_i$$

e já que $\mathcal{C}_f = \mathcal{K}\mathcal{C}_i$, obtemos

$$\mathcal{K}C_i = \frac{Q_f}{Q}C_i$$
$$\mathcal{K} = \frac{Q_f}{Q}$$
$$Q_f = \mathcal{K}Q$$

e assim, a carga acumulada no capacitor aumenta por um fator igual à constante dielétrica quando ele é totalmente preenchido por um dielétrico de constante dielétrica $\mathcal{K}$.

Exemplo 11.10. *Considere o capacitor apresentado na figura 11.10.*

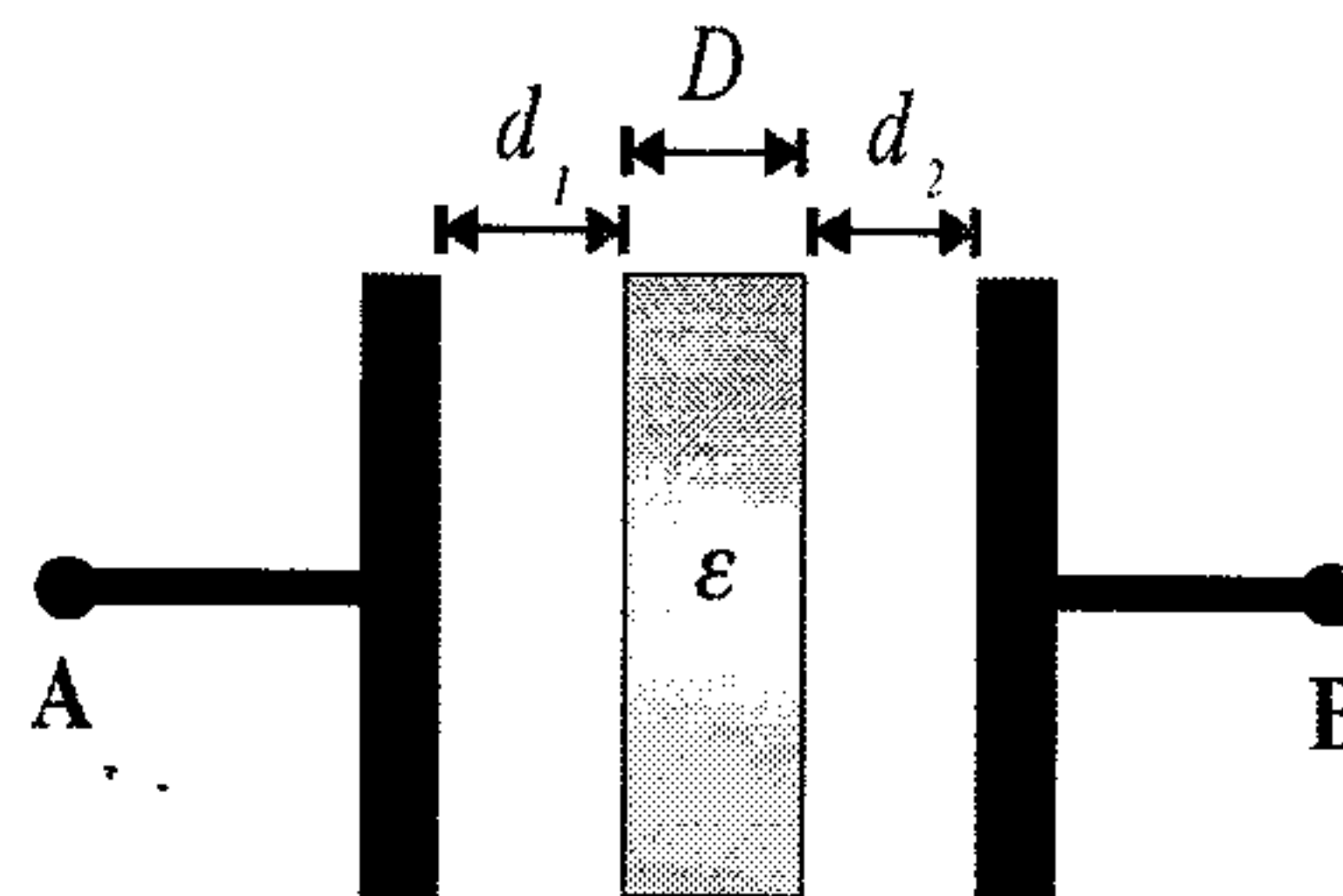



Figura 11.10: Um capacitor semipreenchido por um dielétrico.

Na figura, vemos um capacitor de área A e distância $L = d_1 + D + d_2$ entre as placas, contendo um dielétrico de mesma área que o capacitor, mas com largura D, situado a uma distância d_1 da placa esquerda e d_2 da placa direita. Qual é a capacitância deste capacitor? O resto do volume do capacitor é ocupado por ar.

Este capacitor é, na verdade, uma associação em série de três capacitores, um de distância d_1 entre as placas, de capacitância

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{d_1}$$

outro formado pelo dielétrico, de capacitância

$$C_2 = \frac{\epsilon A}{D}$$

e o terceiro formado pelo capacitor de tamanho d_2, com a capacitância

$$\mathcal{C}_3 = \frac{\epsilon_0 A}{d_2}$$

Como eles estão em série, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathcal{C}} &= \frac{1}{\mathcal{C}_1} + \frac{1}{\mathcal{C}_2} + \frac{1}{\mathcal{C}_3} \\
&= \frac{1}{\frac{\epsilon_0 A}{d_1}} + \frac{1}{\frac{\epsilon A}{D}} + \frac{1}{\frac{\epsilon_0 A}{d_2}} \\
&= \frac{d_1}{\epsilon_0 A} + \frac{D}{\epsilon A} + \frac{d_2}{\epsilon_0 A} \\
&= \frac{d_1 + d_2}{\epsilon_0 A} + \frac{D}{\epsilon A} \\
&= \frac{L - D}{\epsilon_0 A} + \frac{D}{\epsilon A} \\
\frac{1}{\mathcal{C}} &= \frac{\epsilon(L - D) + \epsilon_0 D}{\epsilon_0 \epsilon A} \\
\mathcal{C} &= \frac{\epsilon_0 \epsilon A}{\epsilon(L - D) + \epsilon_0 D}
\end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{C} = \frac{\epsilon A}{\mathcal{K}(L - D) + D}$$

Observe que não importa a posição em que o dielétrico se encontra dentro do capacitor, apenas a sua largura D. Quando $D \to 0$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \frac{\epsilon A}{\mathcal{K} L} \\
\mathcal{C} &= \frac{\epsilon_0 A}{L}
\end{aligned}$$

que corresponde a um capacitor preenchido apenas por ar. Se $D \to L$, achamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \frac{\epsilon A}{\mathcal{K}(L - L) + L} \\
\mathcal{C} &= \frac{\epsilon A}{L}
\end{aligned}$$

que é o resultado para um capacitor completamente preenchido pelo dielétrico.

Exemplo 11.11. *Calcule a capacitância equivalente para o capacitor apresentado na figura 11.11.*

d D

ε_1 ε_3 ε_2 A B

$\mathcal{C}$

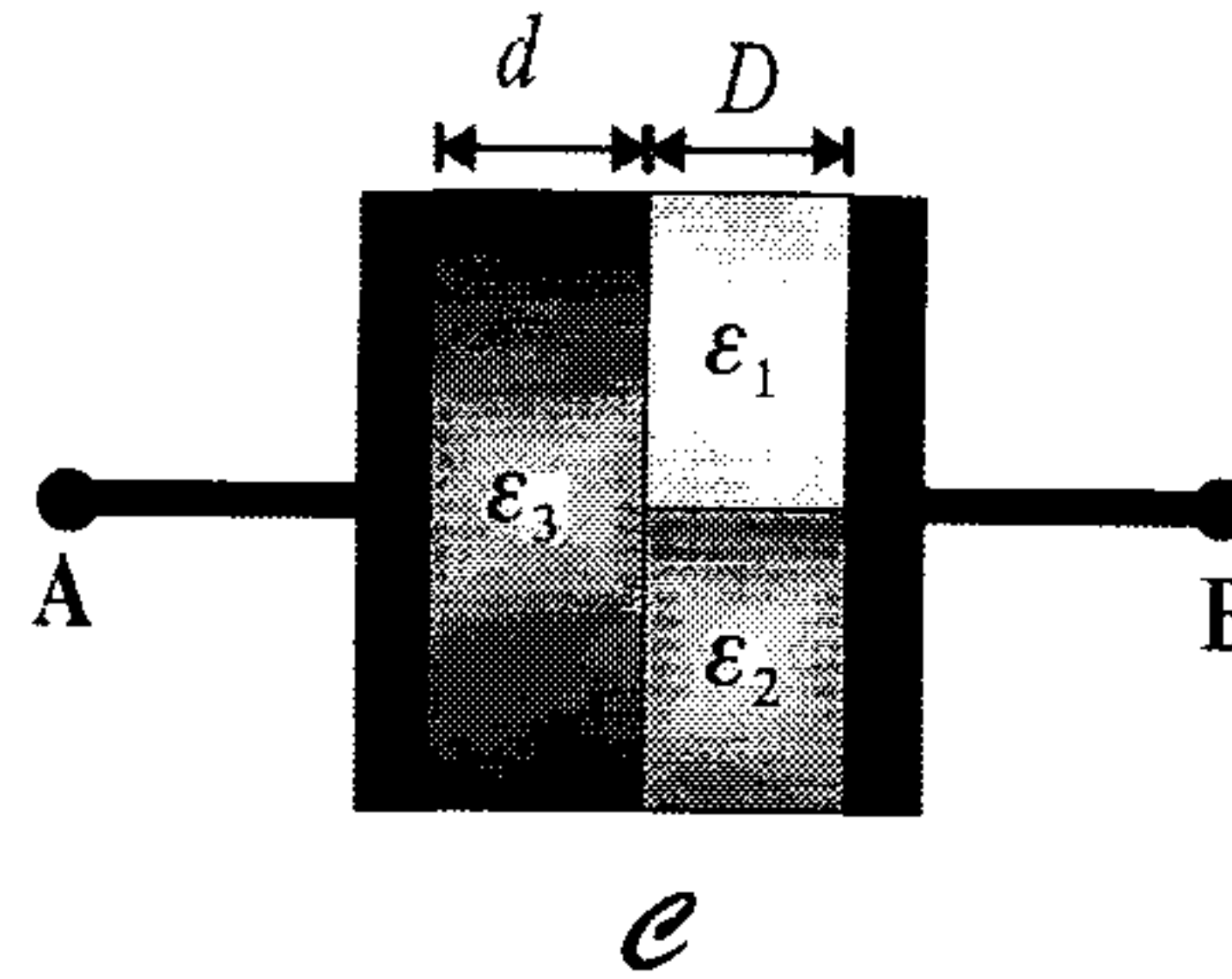



Figura 11.11: Um capacitor preenchido por três dielétricos.

O capacitor da figura tem uma área total A e uma distância $L = d + D$ entre as placas. Ele é formado por uma associação de três capacitores. O primeiro, $\mathcal{C}_3$, está em série com o capacitor equivalente formado por $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, que estão em paralelo. As capacitâncias desses capacitores são

$$\mathcal{C}_3 = \frac{\epsilon_3 A}{d}$$

$$\mathcal{C}_1 = \frac{\epsilon_1 a}{D}$$

onde a é a área do capacitor $\mathcal{C}_1$, e

$$\mathcal{C}_2 = \frac{\epsilon_2(A-a)}{D}$$

Os capacitores $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ estão em paralelo, logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{1,2} &= \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \\ &= \frac{\epsilon_1 a}{D} + \frac{\epsilon_2(A-a)}{D} \\ \mathcal{C}_{1,2} &= \frac{\epsilon_1 a + \epsilon_2(A-a)}{D}\end{aligned}$$

O capacitor $\mathcal{C}_3$ está em série com $\mathcal{C}_{1,2}$, e assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{C}} &= \frac{1}{\mathcal{C}_3} + \frac{1}{\mathcal{C}_{1,2}} \\ \frac{1}{\mathcal{C}} &= \frac{1}{\frac{\epsilon_3 A}{d}} + \frac{1}{\frac{\epsilon_1 a + \epsilon_2(A-a)}{D}}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\mathcal{C}} = \frac{d}{\epsilon_3 A} + \frac{D}{\epsilon_1 a + \epsilon_2(A-a)}$$
$$\frac{1}{\mathcal{C}} = \frac{d\big[\epsilon_1 a + \epsilon_2(A-a)\big] + \epsilon_3 AD}{\epsilon_3 A\big[\epsilon_1 a + \epsilon_2(A-a)\big]}$$

ou

$$\mathcal{C} = \frac{\epsilon_3 A\big[\epsilon_1 a + \epsilon_2(A-a)\big]}{d\big[\epsilon_1 a + \epsilon_2(A-a)\big] + \epsilon_3 AD} \tag{11.16}$$

Esta expressão comporta vários casos interessantes, que são discutidos no exercício 11.4.

Exemplo 11.12. *Num capacitor de placas retangulares, as duas placas têm lados a e b, e elas estão dispostas como mostra a figura 11.12.*

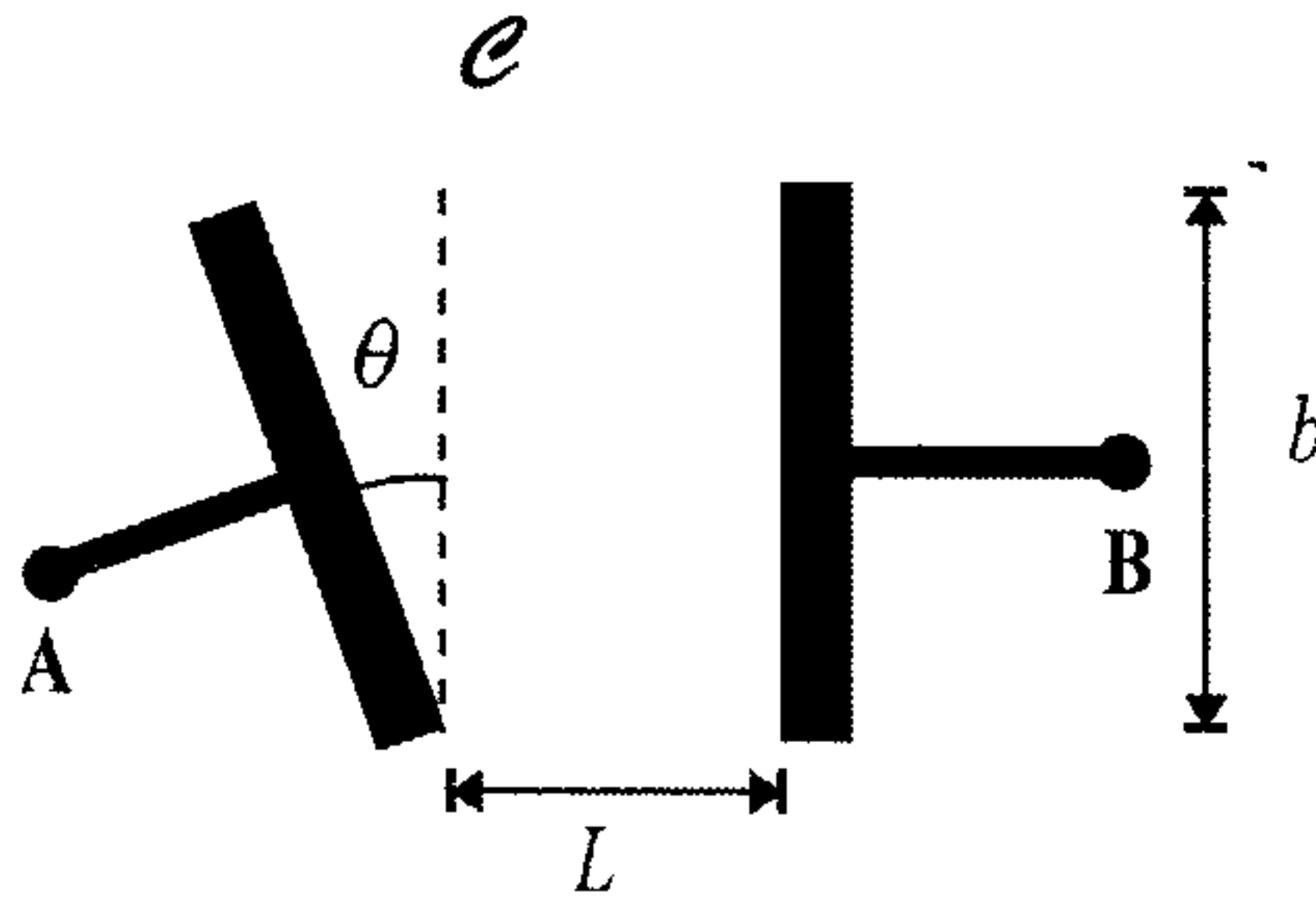



Figura 11.12: Um capacitor com uma das placas levemente inclinada.

Uma das placas do capacitor está levemente inclinada de um ângulo θ em relação à posição correta. O meio entre as placas é o vácuo, e elas estão a uma distância L no local onde mais se aproximam. Calcule a capacitância desse capacitor.

Para esse capacitor, não podemos utilizar simplesmente a expressão 11.2, ou seja,

$$\mathcal{C} = \frac{\epsilon_0 A}{L}$$

pois a distância L entre as placas varia dentro dele. Entretanto, essa expressão ainda poderá ser utilizada se pensarmos nesse capacitor como sendo

constituído por infinitos capacitores ligados em paralelo, cada um com uma área infinitesimal dA, como ilustra a figura 11.13.

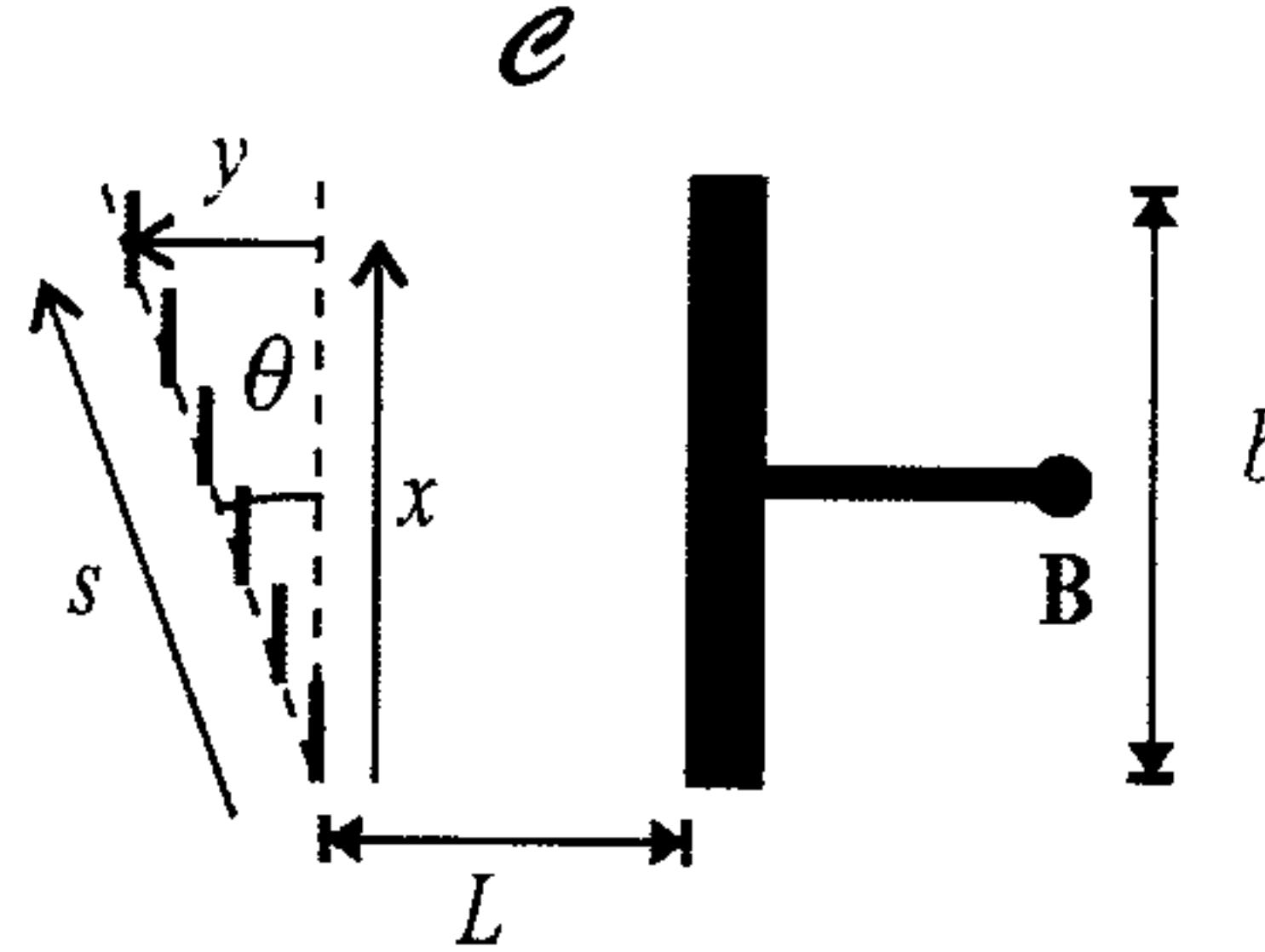



Figura 11.13: Placa levemente inclinada do capacitor, subdividida em capacitores infinitesimais.

Na figura, vemos que os capacitores, que estão muito ampliados para maior clareza, ficam a uma distância $\ell = L + y$ da placa da direita, sendo que y, uma função de s, indica a posição do capacitor em relação à origem situada no canto inferior esquerdo. A área dA do capacitor vale $dA = adx$, onde a é o lado que não aparece na figura. Precisamos relacionar y e x, o que é feito por meio da tangente do ângulo θ, já que

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

e portanto,

$$y = x \operatorname{tg}\theta$$

Assim, a capacitância infinitesimal para um dos capacitores é

$$\begin{aligned} d\mathcal{C} &= \epsilon_0 \frac{dA}{\ell} \\ &= \epsilon_0 \frac{adx}{L + y} \\ d\mathcal{C} &= a\epsilon_0 \frac{dx}{L + x \operatorname{tg}\theta} \end{aligned}$$

Para calcular a capacitância total, devemos somar os capacitores. Como eles estão em paralelo, isto é feito mediante a integração das capacitâncias, desde $x = 0$ até o valor $x = X$, que é dado por

$$\cos\theta = \frac{X}{b}$$

onde b é o comprimento do lado do capacitor que aparece na figura. Desta expressão, temos

$$X = b\cos\theta$$

e desse modo,

$$\begin{aligned}
\int_0^X d\mathcal{C} &= \int_0^X a\epsilon_0 \frac{dx}{L + x\,\mathrm{tg}\,\theta} \\
\mathcal{C} &= a\epsilon_0 \int_0^X \frac{dx}{L + x\,\mathrm{tg}\,\theta} \\
&= \frac{a\epsilon_0}{\mathrm{tg}\,\theta}\left[\ln(L + x\,\mathrm{tg}\,\theta)\right]_0^X \\
&= \frac{a\epsilon_0}{\mathrm{tg}\,\theta}\left[\ln(L + X\,\mathrm{tg}\,\theta) - \ln L\right] \\
&= \frac{a\epsilon_0}{\mathrm{tg}\,\theta}\ln\frac{L + X\,\mathrm{tg}\,\theta}{L} \\
\mathcal{C} &= \frac{a\epsilon_0}{\mathrm{tg}\,\theta}\ln\frac{L + b\cos\theta\,\mathrm{tg}\,\theta}{L}
\end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{C} = \frac{a\epsilon_0}{\mathrm{tg}\,\theta}\ln\left[1 + \frac{b\,\mathrm{sen}\,\theta}{L}\right]$$

que é a capacitância do capacitor. Quando θ é bem pequeno, podemos expandir o logaritmo em série de Taylor, através da expressão 2.5, que é

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

e, considerando os dois primeiros termos desta série, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &\approx \frac{a\epsilon_0}{\mathrm{tg}\,\theta}\left[\frac{b\,\mathrm{sen}\,\theta}{L} - \frac{b^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{2L^2}\right] \\
\mathcal{C} &\approx \frac{ab\epsilon_0\cos\theta}{L}\left[1 - \frac{b\,\mathrm{sen}\,\theta}{2L}\right]
\end{aligned}$$

$$\mathcal{C} \approx \cos\theta \frac{\epsilon_0 A}{L}\left[1 - \frac{b\,\mathrm{sen}\,\theta}{2L}\right]$$

Note que, quando $\theta \to 0$, obtemos a capacitância

$$\mathcal{C} = \frac{\epsilon_0 A}{L}$$

como era esperado, pois $\theta = 0$ corresponde ao capacitor paralelo usual. Este exemplo encerra por ora nossa discussão sobre as associações de capacitores. Vamos passar a outro assunto importante.

11.3 Forças e Torques em Capacitores

Um problema importante consiste em determinar a força que atua num material dielétrico quando ele é inserido num capacitor. Outro problema refere-se à força que existe entre as placas de um capacitor. Para estudá-los, precisamos saber como calcular essas forças. Podemos pensar no método direto, de integração das forças elétricas entre todos as cargas constituintes do sistema, mas esse processo pode ser extremamente trabalhoso, e desnecessário, como veremos a seguir.

Na seção 10.5 desenvolvemos o conceito de energia eletrostática, que é a energia potencial elétrica total armazenada num campo elétrico. Lá vimos a expressão 10.52,

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2}\int_V \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}\, dV$$

que permite que calculemos a energia eletrostática numa região do espaço dentro do volume V, e também a expressão 10.53,

$$\mathrm{u} = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}$$

que é a densidade volumétrica de energia eletrostática. Essas expressões fornecem a energia eletrostática para um circuito, capacitor, etc., e desde que eles não sofram nenhuma alteração em sua geometria ou nos meios que os constituem, a energia eletrostática fica constante, já que os campos elétricos não mudam.

Suponha agora que um dos constituintes de um sistema formado por condutores que estão isolados do meio externo, de forma que a quantidade de cargas neles existente não possa variar, é submetido a um pequeno deslocamento $d\vec{\ell}$. A força elétrica total que age sobre esse condutor produz um trabalho elétrico dado por

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

que é a definição usual de trabalho. Esse trabalho é feito às custas da energia potencial elétrica do sistema de condutores, que varia de uma quantidade igual, porém de sinal oposto, para que a energia se conserve, ou seja,

$$d\mathbb{U} = -dW$$

ou

$$d\mathbb{U} = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Podemos comparar esta relação com a equação 1.52, que é

$$d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\vec{\ell}$$

Assim, a analogia nos permite escrever

$$\vec{F} = -\nabla\mathbb{U} \tag{11.17}$$

Esta expressão pode ser comparada com a equação 5.8,

$$\vec{F} = -\nabla U$$

e assim vemos que, para este caso específico em que o sistema está isolado, a energia eletrostática total $\mathbb{U}$ e o aumento de energia potencial elétrica U têm o mesmo gradiente negativo, que corresponde à força que age sobre um dos constituintes do sistema. Entretanto, essas duas grandezas em si não são iguais, mas suas variações, que correspondem ao trabalho realizado com sinal negativo, são as mesmas.

É preciso que fique claro que, embora $\mathbb{U}$ e U não sejam a mesma grandeza, elas apresentam a mesma variação quando o sistema está isolado. Considere três cargas, Q_1, Q_2 e q, que formam um sistema isolado. Cada par de cargas produz um aumento na energia potencial, dado pela equação 5.5,

$$U_{i,j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Em particular, a energia potencial que envolve a carga q é

$$U_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 q}{|\vec{r}_{Q_1} - \vec{r}_q|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 q}{|\vec{r}_{Q_2} - \vec{r}_q|}$$

A energia eletrostática total é a soma das energias potenciais, ou seja, ela é dada por

$$\mathbb{U} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 q}{|\vec{r}_{Q_1} - \vec{r}_q|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 q}{|\vec{r}_{Q_2} - \vec{r}_q|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{Q_1} - \vec{r}_{Q_2}|}$$

ou

$$\mathbb{U} = U_q + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{Q_1} - \vec{r}_{Q_2}|} \tag{11.18}$$

Suponha agora que apenas a carga q sofre um pequeno deslocamento. Então, a energia potencial U_q varia de uma certa quantidade dU_q, que corresponde ao trabalho realizado pelas forças elétricas das outras duas cargas, com sinal negativo. Esta força pode ser expressa por

$$\vec{F}_q = -\nabla U_q$$

como, aliás, já discutimos no capítulo 5. Por outro lado, essa variação na energia potencial U_q corresponde a uma variação igual na energia eletrostática total, pois o sistema está isolado e a energia deve se conservar, o que significa que a força também pode ser obtida mediante o gradiente negativo da energia eletrostática. Isso pode ser facilmente verificado se aplicarmos o operador ∇ na equação 11.18, o que resulta em

$$\nabla\mathbb{U} = \nabla U_q + \nabla\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{Q_1} - \vec{r}_{Q_2}|}\right]$$

Como as cargas Q_1 e Q_2 não sofrem nenhuma mudança nas suas posições, o segundo termo do lado direito é constante, e seu gradiente é nulo. Portanto,

$$\nabla\mathbb{U} = -\vec{F}_q$$

ou

$$\vec{F}_q = -\nabla\mathbb{U}$$

e assim, mostramos que, ainda que as variações das grandezas sejam as mesmas, as próprias grandezas não o são. Mas isso só vale para um sistema isolado.

Assim, para um sistema isolado, a força é dada, em termos da energia eletrostática, pela expressão 11.17, que, em coordenadas retangulares, corresponde a

$$F_x = -\left(\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial x}\right)_Q \qquad F_y = -\left(\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial y}\right)_Q \qquad F_z = -\left(\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial z}\right)_Q \tag{11.19}$$

onde o índice Q exprime o fato de que as derivadas devem ser tomadas com a carga fixa.

Quando o sistema sofre um deslocamento angular $\vec{d\theta}$ sob a ação de um torque $\vec{\mathbb{T}}$, o trabalho realizado é dado por

$$dW = \vec{\mathbb{T}} \cdot \vec{d\theta} \tag{11.20}$$

Conseqüentemente, desenvolvendo o mesmo raciocínio, obtemos

$$\mathbb{T}_1 = -\left(\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \theta_1}\right)_Q \qquad \mathbb{T}_2 = -\left(\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \theta_2}\right)_Q \qquad \mathbb{T}_3 = -\left(\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \theta_3}\right)_Q$$

onde $\mathbb{T}_i$ é a componente do torque na direção do deslocamento angular $d\theta_i$. Note que essas expressões são válidas apenas para sistemas isolados, e para podermos utilizá-las, devemos exprimir a energia eletrostática $\mathbb{U}$ em termos de grandezas que representam os deslocamentos, para que ela possa ser derivada em relação a essas grandezas. Antes de vermos alguns exemplos, vamos passar ao caso em que o sistema não é isolado.

Nos exemplos 11.8 e 11.9, estudamos o que ocorre num capacitor quando ele é preenchido por um dielétrico de permissividade ϵ, para o caso em que a carga é mantida fixa, o que corresponde a um sistema isolado, e para o caso em que o potencial é mantido fixo, quando a carga varia. Esta última situação, em que os potenciais são fixados, e não as cargas, é muito mais comum do que a anterior, em que o sistema está isolado. Assim, nos interessa obter uma relação entre a força que age sobre um constituinte e a energia eletrostática quando os potenciais nos condutores não variam.

Vamos considerar um sistema que não está isolado, em que as cargas podem variar e os potenciais são mantidos fixos por algum agente externo. Neste caso, a variação da energia eletrostática do sistema é dada por

$$d\mathbb{U} = dW_{\text{ext}} - dW$$

onde dW_{ext} é o trabalho realizado pelo agente externo ao sistema, que mantém os potenciais fixos, e dW é o trabalho realizado pelas forças elétricas internas. O trabalho externo aumenta a quantidade de energia eletrostática, enquanto o trabalho interno diminui, o que explica os sinais adotados. Esta equação pode ser reexpressa como

$$dW = dW_{\text{ext}} - d\mathbb{U}$$

e assim, o trabalho interno é dado por

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

A energia eletrostática pode ser obtida através da expressão 5.15, e então,

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i \mathbb{V}_i$$

Quando as cargas variam de um valor dQ_i, a variação na energia eletrostática torna-se

$$d\mathbb{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} dQ_i \mathbb{V}_i$$

Para manter os potenciais elétricos fixos, o meio externo precisa transferir cargas para o sistema ou retirar cargas do sistema. Essas cargas são movidas num potencial fixo e elas produzem um aumento de energia potencial dado por 5.11, ou seja,

$$dU = \sum_{i} dQ_i \mathbb{V}_i$$

Esse aumento de energia potencial, que não é o aumento da energia eletrostática, provém do trabalho externo feito pelo agente externo, ou seja,

$$dW_{\text{ext}} = dU$$

e assim, obtemos

$$dW_{\text{ext}} = \sum_{i} dQ_i \mathbb{V}_i = 2d\mathbb{U}$$

Observe que o trabalho externo é o dobro da variação da energia eletrostática. A diferença entre eles é gasta para mover algum constituinte do sistema contra as forças elétricas internas, o que produz o trabalho

$$\begin{aligned} dW &= dW_{\text{ext}} - d\mathbb{U} \\ &= 2d\mathbb{U} - d\mathbb{U} \\ dW &= d\mathbb{U} \end{aligned}$$

e como

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

achamos

$$d\mathbb{U} = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

ou

$$\vec{F} = \nabla\mathbb{U}$$

que pode ser escrita, em coordenadas retangulares, como

$$F_x = \left(\frac{\partial\mathbb{U}}{\partial x}\right)_{\mathbb{V}} \qquad F_y = \left(\frac{\partial\mathbb{U}}{\partial y}\right)_{\mathbb{V}} \qquad F_z = \left(\frac{\partial\mathbb{U}}{\partial z}\right)_{\mathbb{V}}$$

onde o índice $\mathbb{V}$ ressalta o fato de que as derivadas devem ser feitas com um potencial $\mathbb{V}$ fixo. Note que, ao contrário do que ocorre quando o sistema está isolado, aqui $d\mathbb{U} \neq dU$. Além disso, nos dois casos a relação primordial

$$\vec{F} = -\nabla U$$

é verificada, mas não a relação

$$\vec{F} = -\nabla\mathbb{U}$$

que vale apenas no primeiro. Quando os deslocamentos são angulares, obtemos para os torques,

$$\mathbb{T}_1 = \left(\frac{\partial\mathbb{U}}{\partial\theta_1}\right)_{\mathbb{V}} \qquad \mathbb{T}_2 = \left(\frac{\partial\mathbb{U}}{\partial\theta_2}\right)_{\mathbb{V}} \qquad \mathbb{T}_3 = \left(\frac{\partial\mathbb{U}}{\partial\theta_3}\right)_{\mathbb{V}}$$

Vejamos agora alguns exemplos interessantes.

Exemplo 11.13. *Um capacitor retangular de lados a e b e distância L entre as placas é preenchido por um dielétrico de permissividade* ϵ *e submetido a uma diferença de potencial* V_0*. Quando está completamente carregado, ele é desconectado do circuito a que pertence e é mantido isolado, enquanto o dielétrico é puxado para fora do capacitor, ficando com um comprimento x dentro do capacitor, como mostra a figura 11.14.*

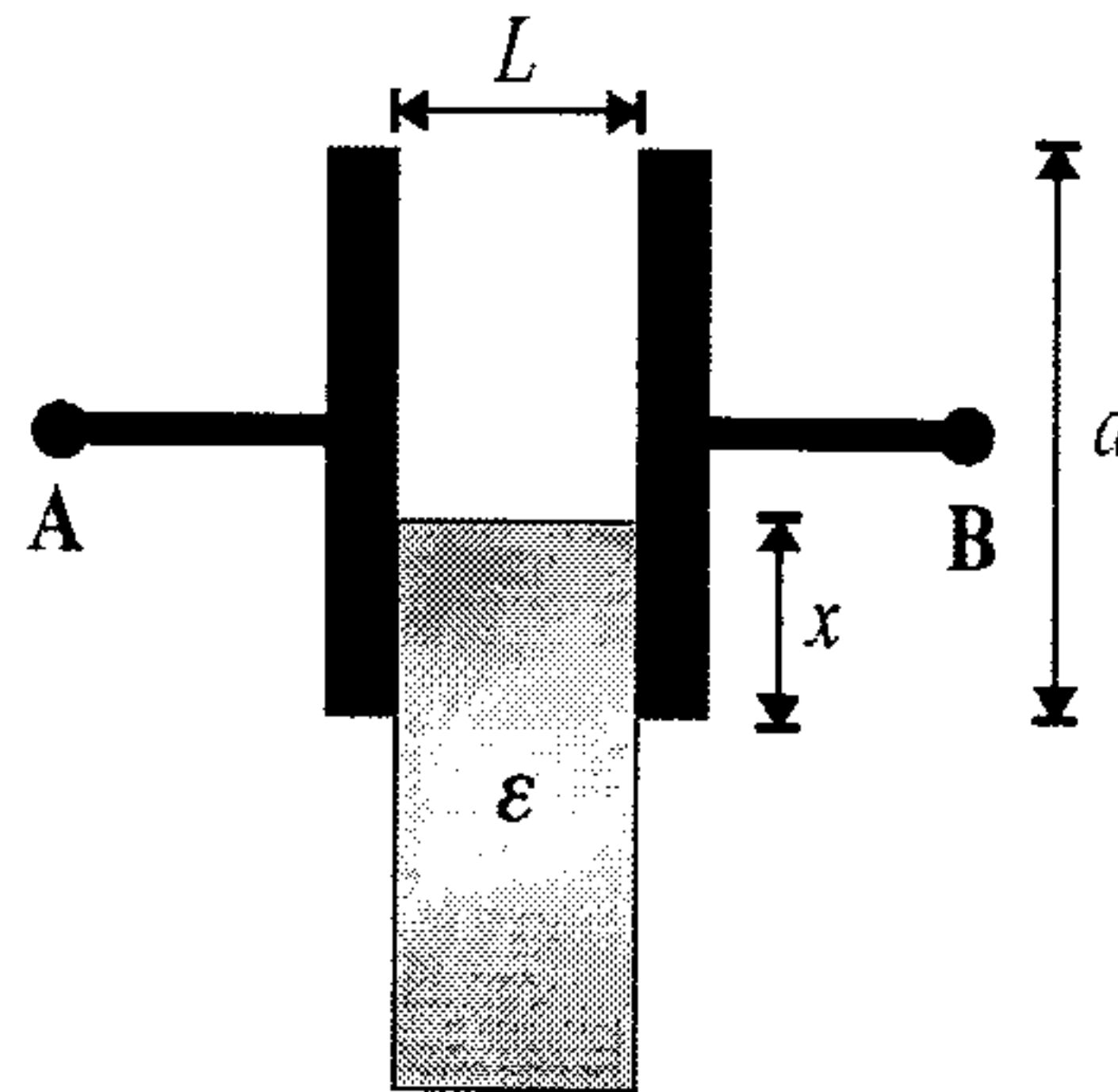



Figura 11.14: Um capacitor retangular com um dielétrico puxado para fora.

Para esse capacitor, calcule a diferença de potencial em função de x. Calcule também a força exercida pelo capacitor para recolocar o dielétrico na posição original.

No início, o capacitor estava totalmente preenchido, e sua capacitância era

$$C_i = \frac{\epsilon ab}{L}$$

Essa capacitância nos permite calcular a carga numa das placas, pois

$$C_i = \frac{Q_i}{V_0}$$

ou

$$Q_i = C_i V_0$$

$$Q_i = \frac{\epsilon ab V_0}{L} \qquad (11.21)$$

A carga não muda, porque o capacitor está isolado. Quando o dielétrico preenche parcialmente o capacitor, temos dois capacitores em paralelo, sendo um ocupado pelo dielétrico e o outro, por vácuo, com capacitâncias

$$\mathcal{C}_d = \frac{\epsilon x b}{L}$$

e

$$\mathcal{C}_v = \frac{\epsilon_0 (a-x) b}{L}$$

que formam o capacitor equivalente

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_f &= \mathcal{C}_d + \mathcal{C}_v \\ &= \frac{\epsilon x b}{L} + \frac{\epsilon_0 (a-x) b}{L} \\ \mathcal{C}_f &= \frac{\left[\epsilon x + \epsilon_0 (a-x)\right] b}{L} \end{aligned}$$

Como as cargas nas placas não mudam, temos a relação

$$\mathcal{C}_f = \frac{Q_i}{\mathbb{V}_f}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_f &= \frac{Q_i}{\mathcal{C}_f} \\ &= \frac{\frac{\epsilon a b V_0}{L}}{\frac{\left[\epsilon x + \epsilon_0 (a-x)\right] b}{L}} \\ \mathbb{V}_f &= \frac{\epsilon a V_0}{\epsilon x + \epsilon_0 (a-x)} \end{aligned}$$

ou, em termos da constante dielétrica,

$$\mathbb{V}_f = \frac{\mathcal{K} a}{\mathcal{K} x + (a-x)} V_0 \tag{11.22}$$

Quando $x \to a$, o capacitor está totalmente preenchido, e a diferença de potencial é

$$\mathbb{V}_f = \frac{\mathcal{K}a}{\mathcal{K}a} V_0 = V_0$$

Quando $x \to 0$, achamos, para a diferença de potencial,

$$\mathbb{V}_f = \frac{\mathcal{K}a}{a} V_0 = \mathcal{K} V_0$$

e os dois limites concordam com o esperado. Para calcular a energia acumulada no capacitor, precisamos relacionar este potencial com o campo elétrico, o que pode ser feito através da equação 4.24,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

onde σ é a densidade de carga positiva, que, combinada com a expressão 5.31,

$$\Delta \mathbb{V} = \frac{QL}{\epsilon_0 A}$$

fornece, para o vácuo,

$$\Delta \mathbb{V} = \frac{\sigma L}{\epsilon_0}$$

ou

$$\Delta \mathbb{V} = \mathcal{E} L$$

Esta diferença de potencial é fornecida pela equação 11.22, e assim, o campo elétrico fica

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{K} a V_0}{\left[\mathcal{K}x + (a - x)\right] L}$$

ou, em termos da carga Q, usando a relação 11.21, obtemos

$$Q = \frac{\epsilon a b V_0}{L}$$
$$V_0 = \frac{QL}{ab\epsilon}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{\mathcal{K}a\frac{QL}{ab\epsilon}}{[\mathcal{K}x + (a-x)]\cdot L} \\
&= \frac{\mathcal{K}Q}{b\epsilon}\frac{1}{\mathcal{K}x + (a-x)} \\
\mathcal{E} &= \frac{Q}{b\epsilon_0}\frac{1}{\mathcal{K}x + (a-x)}
\end{aligned}$$

e, vetorialmente, considerando um versor $\hat{n}$ orientado da placa esquerda (positiva) para a direita (negativa),

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{b\epsilon_0}\frac{1}{\mathcal{K}x + (a-x)}\,\hat{n}$$

Agora, através da expressão 10.52,

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2}\int_V \vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}\,dV$$

podemos calcular a energia eletrostática. Começando com a parte que se situa dentro do dielétrico, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_d &= \frac{1}{2}\int_V \frac{Q}{b\epsilon_0}\frac{1}{\mathcal{K}x + (a-x)}\,\hat{n}\cdot\frac{\epsilon Q}{b\epsilon_0}\frac{1}{\mathcal{K}x + (a-x)}\,\hat{n}\,dV \\
&= \frac{\mathcal{K}Q^2}{2b^2\epsilon_0}\frac{1}{\left[\mathcal{K}x + (a-x)\right]^2}\int_V dV \\
&= \frac{\mathcal{K}Q^2}{2b^2\epsilon_0}\frac{1}{\left[\mathcal{K}x + (a-x)\right]^2}Lxb \\
\mathbb{U}_d &= \frac{\mathcal{K}Q^2L}{2b\epsilon_0}\frac{x}{\left[\mathcal{K}x + (a-x)\right]^2}
\end{aligned}$$

A parte da energia fora do dielétrico é

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_v &= \frac{1}{2}\int_V \frac{Q}{b\epsilon_0}\frac{1}{\mathcal{K}x + (a-x)}\,\hat{n}\cdot\frac{Q}{b}\frac{1}{\mathcal{K}x + (a-x)}\,\hat{n}\,dV \\
&= \frac{Q^2}{2b^2\epsilon_0}\frac{1}{\left[\mathcal{K}x + (a-x)\right]^2}\int_V dV \\
\mathbb{U}_v &= \frac{Q^2}{2b^2\epsilon_0}\frac{1}{\left[\mathcal{K}x + (a-x)\right]^2}(a-x)bL
\end{aligned}$$

$$\mathbb{U}_v = \frac{Q^2L}{2b\epsilon_0}\frac{a-x}{\left[\mathcal{K}x+(a-x)\right]^2}$$

e então, a energia eletrostática fica

$$\begin{aligned}
\mathbb{U} &= \mathbb{U}_d + \mathbb{U}_v \\
&= \frac{\mathcal{K}Q^2L}{2b\epsilon_0}\frac{x}{\left[\mathcal{K}x+(a-x)\right]^2} + \frac{Q^2L}{2b\epsilon_0}\frac{a-x}{\left[\mathcal{K}x+(a-x)\right]^2} \\
&= \frac{Q^2L}{2b\epsilon_0}\frac{\mathcal{K}x+(a-x)}{\left[\mathcal{K}x+(a-x)\right]^2} \\
\mathbb{U} &= \frac{Q^2L}{2b\epsilon_0}\frac{1}{\mathcal{K}x+(a-x)} \qquad (11.23)
\end{aligned}$$

Esta expressão está de acordo com o que esperamos nos limites $x \to 0$ e $x \to a$. A verificação é deixada como exercício (veja o exercício 11.6). Para calcular a força que o capacitor exerce sobre o dielétrico, usamos as equações 11.19, pois o sistema está isolado, considerando apenas a componente em x, de modo que

$$\begin{aligned}
F_x &= -\left(\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial x}\right)_Q \\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_Q \left[\frac{Q^2L}{2b\epsilon_0}\frac{1}{\mathcal{K}x+(a-x)}\right] \\
&= -\frac{Q^2L}{2b\epsilon_0}\frac{-(\mathcal{K}-1)}{\left[\mathcal{K}x+(a-x)\right]^2} \\
F_x &= \frac{(\mathcal{K}-1)Q^2L}{2b\epsilon_0}\frac{1}{\left[\mathcal{K}x+(a-x)\right]^2}
\end{aligned}$$

e a força está orientada no sentido de x positivo, e ela age de forma a recolocar o dielétrico no lugar original.

Exemplo 11.14. *Calcule a força que um dos planos do capacitor plano paralelo preenchido por ar exerce sobre o outro plano, quando a carga é mantida fixa e quando a diferença de potencial é mantida fixa.*

No exemplo 11.1, calculamos a energia eletrostática do capacitor plano paralelo preenchido por ar, que é dada pela equação 11.3,

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2}\frac{Q^2L}{A\epsilon_0}$$

Para obter a força que um plano exerce sobre o outro, devemos supor que L, que é a distância entre eles, possa variar de um dL, e vamos calcular a força como sendo

$$F_L = -\left(\frac{\partial\mathbb{U}}{\partial L}\right)_Q$$

quando a carga é mantida fixa. Isso nos fornece

$$F_L = -\left(\frac{\partial}{\partial L}\right)_Q\left[\frac{1}{2}\frac{Q^2L}{A\epsilon_0}\right]$$

$$F_L = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{A\epsilon_0}$$

que é uma força atrativa, como deve ser, já que as cargas nos planos têm sinais contrários, e eles se atraem mutuamente. Quando a diferença de potencial é mantida fixa, precisamos reescrever a energia eletrostática em termos de $\Delta\mathbb{V}$. A equação 5.31 relaciona a carga com a diferença de potencial, através de

$$\Delta\mathbb{V} = \frac{QL}{\epsilon_0 A}$$

Logo,

$$Q = \frac{\Delta\mathbb{V}\epsilon_0 A}{L}$$

e a energia eletrostática fica

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2}\frac{\left[\frac{\Delta\mathbb{V}\epsilon_0 A}{L}\right]^2 L}{A\epsilon_0}$$

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2}\frac{\Delta\mathbb{V}^2\epsilon_0 A}{L}$$

Assim, a força que um plano faz sobre o outro é obtida mediante

$$F_L = \left(\frac{\partial\mathbb{U}}{\partial L}\right)_{\Delta\mathbb{V}}$$

ou seja,

$$F_L = \left(\frac{\partial}{\partial L}\right)_{\Delta\mathbb{V}} \left[\frac{1}{2}\frac{\Delta\mathbb{V}^2\epsilon_0 A}{L}\right]$$

$$F_L = -\frac{1}{2}\frac{\Delta\mathbb{V}^2\epsilon_0 A}{L^2}$$

que também é atrativa.

Exemplo 11.15. *Dois condutores cilíndricos coaxiais, de raios R_1 e R_2, preenchidos por ar, e de tamanho l, onde $l \gg R_2$, formam um cabo coaxial como o que aparece na figura 11.5.*

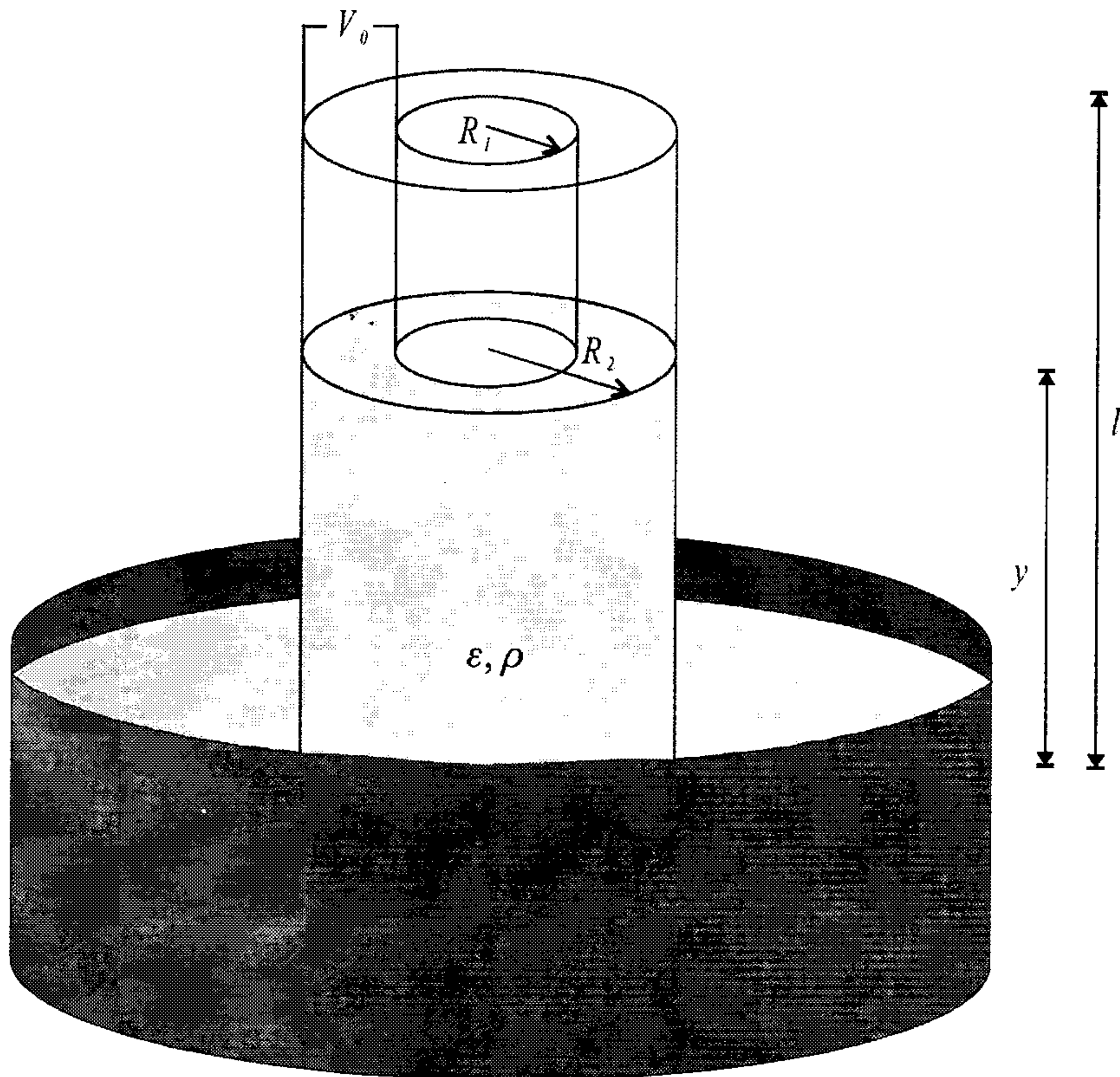



Figura 11.15: Um cabo coaxial mergulhado num líquido dielétrico com permissividade ϵ e densidade ϱ.

Este cabo é mergulhado verticalmente num líquido, de permissividade ϵ. Depois, uma diferença de potencial fixa V_0 é mantida entre os condutores, e o líquido sobe a uma altura y, como mostra a figura 11.15. Considerando que a aceleração da gravidade vale g e que o líquido tem uma densidade volumétrica ϱ constante, responda ao seguinte.

a) Encontre a capacitância equivalente em função de y.

No exemplo 11.3, calculamos a capacitância de um cabo coaxial preenchido com um dielétrico ϵ como sendo (equação 11.8)

$$C = \frac{2\pi\epsilon\ell}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

Assim, temos, na região do cabo preenchida pelo dielétrico,

$$C_d = \frac{2\pi\epsilon y}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

enquanto na parte preenchida por ar,

$$C_{\text{ar}} = \frac{2\pi\epsilon_0(l-y)}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

Esses dois capacitores estão em paralelo, e desse modo, a capacitância equivalente é

$$\begin{aligned} C &= C_d + C_{\text{ar}} \\ &= \frac{2\pi\epsilon y}{\ln\frac{R_2}{R_1}} + \frac{2\pi\epsilon_0(l-y)}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \\ C &= \frac{2\pi}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\left[\epsilon y + \epsilon_0(l-y)\right] \end{aligned}$$

b) Encontre a energia eletrostática armazenada.

Para encontrar a energia eletrostática, precisamos do campo elétrico entre os cilindros, dado pela equação 11.6, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon\rho\ell}\,\hat{\rho}$$

Vamos exprimir esse campo em termos da diferença de potencial V_0, e para isso, usamos a expressão 11.7, que fica

$$\Delta\mathbb{V} = V_0 = \frac{Q}{2\pi\epsilon\ell}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

de onde obtemos

$$Q = \frac{2\pi\epsilon\ell V_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

que, substituída na equação do campo elétrico, resulta em

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\frac{2\pi\epsilon\ell V_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}{2\pi\epsilon\rho\ell}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$
$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{V_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

A parcela da energia eletrostática dentro do dielético é

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_d &= \frac{1}{2}\int_V \vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}\,dV \\
&= \frac{1}{2}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{y} \frac{V_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\epsilon\frac{V_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\,\rho d\rho d\theta dz \\
&= \frac{\epsilon V_0^2}{2\ln^2\frac{R_2}{R_1}}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{y}\frac{d\rho d\theta dz}{\rho} \\
&= \frac{\epsilon V_0^2}{2\ln^2\frac{R_2}{R_1}}\left[z\right]_0^y\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\frac{d\rho d\theta}{\rho} \\
&= \frac{\epsilon V_0^2}{2\ln^2\frac{R_2}{R_1}}y\left[\theta\right]_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{d\rho}{\rho} \\
&= \frac{\epsilon V_0^2 y}{2\ln^2\frac{R_2}{R_1}}(2\pi)\left[\ln\rho\right]_{R_1}^{R_2} \\
&= \frac{\pi\epsilon V_0^2 y}{\ln^2\frac{R_2}{R_1}}\ln\frac{R_2}{R_1} \\
\mathbb{U}_d &= \frac{\pi\epsilon V_0^2 y}{\ln\frac{R_2}{R_1}}
\end{aligned}$$

Note que aqui tivemos que explicitar a integral de volume, pois o campo elétrico não é constante. A parcela da energia eletrostática na região preenchida por ar fica

$$
\begin{aligned}
\mathbb{U}_{\text{ar}} &= \frac{1}{2}\int_V \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}\, dV \\
&= \frac{1}{2}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\int_y^l \frac{V_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \epsilon_0 \frac{V_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}\, \rho d\rho d\theta dz \\
&= \frac{\epsilon_0 V_0^2}{2\ln^2\frac{R_2}{R_1}}\left[z\right]_y^l \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\frac{d\rho d\theta}{\rho} \\
&= \frac{\epsilon_0 V_0^2}{2\ln^2\frac{R_2}{R_1}}(l-y)\left[\theta\right]_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{d\rho}{\rho} \\
&= \frac{\epsilon_0 V_0^2(l-y)}{2\ln^2\frac{R_2}{R_1}}(2\pi)\left[\ln\rho\right]_{R_1}^{R_2} \\
&= \frac{\pi\epsilon_0 V_0^2(l-y)}{\ln^2\frac{R_2}{R_1}}\ln\frac{R_2}{R_1} \\
\mathbb{U}_{\text{ar}} &= \frac{\pi\epsilon_0 V_0^2(l-y)}{\ln\frac{R_2}{R_1}}
\end{aligned}
$$

A energia eletrostática total é

$$
\begin{aligned}
\mathbb{U} &= \mathbb{U}_d + \mathbb{U}_{\text{ar}} \\
&= \frac{\pi\epsilon V_0^2 y}{\ln\frac{R_2}{R_1}} + \frac{\pi\epsilon_0 V_0^2(l-y)}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \\
\mathbb{U} &= \frac{\pi V_0^2}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\left[\epsilon y + \epsilon_0(l-y)\right]
\end{aligned}
$$

c) Encontre a força eletrostática que age sobre o líquido na direção y.

A força eletrostática que age sobre o líquido na direção y pode ser obtida mediante

$$
F_e = \left(\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial y}\right)_{V_0}
$$

lembrando que o potencial está mantido fixo. Obtemos, portanto,

$$
\begin{aligned}
F_e &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{V_0} \left\{ \frac{\pi V_0^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \left[\epsilon y + \epsilon_0 (l - y)\right] \right\} \\
&= \frac{\pi V_0^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} (\epsilon - \epsilon_0) \\
F_e &= \frac{\chi \pi V_0^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}
\end{aligned}
$$

sendo que, no último passo, usamos a relação 10.16 entre a susceptibilidade elétrica χ e as permissividades, de modo que

$$
\chi = \epsilon - \epsilon_0
$$

Observe que a força é orientada no sentido positivo do eixo y, e ela é a responsável pela elevação do líquido até a altura y.

d) Encontre uma expressão para a susceptibilidade em função das grandezas do problema.

Esta experiência pode ser feita para determinar a susceptibilidade elétrica χ de um líquido, pois ele sobe no cabo coaxial sob a ação da força eletrostática até uma altura y tal que essa força é contrabalançada pelo peso da coluna de líquido. Quando isso acontece, temos

$$
F_e = P
$$

ou, como $P = mg$ e $m = \varrho V$, onde ϱ é a densidade do líquido, e V, o volume de líquido que sobe no cabo coaxial $[V = \pi(R_2^2 - R_1^2)y]$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\chi \pi V_0^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} &= mg \\
\chi &= \frac{\varrho V g \ln \frac{R_2}{R_1}}{\pi V_0^2} \\
\chi &= \frac{\varrho \pi (R_2^2 - R_1^2) y g \ln \frac{R_2}{R_1}}{\pi V_0^2}
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\chi = \frac{\varrho (R_2^2 - R_1^2) y g \ln \frac{R_2}{R_1}}{V_0^2}
$$

que é a expressão procurada para a susceptibilidade. Se medirmos a altura y que o líquido sobe e se conhecermos as outras propriedades físicas, podemos encontrar a susceptibilidade elétrica através desta equação, e a partir da susceptibilidade, achamos também a permissividade elétrica ϵ do líquido. Este exemplo encerra nossa discussão sobre os capacitores e sobre a Eletrostática em geral. Outros problemas são vistos nos exercícios, e algumas experiências são comentadas em seguida.

11.4 Mãos à Obra: Capacitores

Nesta seção, discutimos duas montagens experimentais importantes no desenvolvimento da Física. Vamos construir um capacitor elementar, a *garrafa de Leyden*, e comentar a experiência de Millikan, que mediu a carga do elétron.

11.4.1 Garrafa de Leyden

Para esta experiência, você vai precisar do seguinte.

1. Um recipiente plástico cilíndrico, como o vasilhame de refrigerantes de dois litros.
2. Papel-alumínio.
3. Fios de cobre.
4. Uma varinha de latão.
5. Uma bolinha de isopor.
6. Tesoura e fita adesiva.
7. Bastão de vidro e flanela de lã.

Nesta experiência, vamos reproduzir o primeiro capacitor construído, a garrafa de Leyden, inventada em 1746 na cidade de Leyden. Para tanto, corte a garrafa de plástico aproximadamente na metade da sua altura. Depois, na metade inferior, forre o plástico com papel-alumínio, por dentro e por fora, formando duas coroas cilíndricas. A altura dessas coroas deve ser cerca de 1 cm menor do que a altura do plástico. Em seguida, pegue um pedaço de fio

de cobre desencapado e use-o para dar algumas voltas em torno do papel-alumínio da parte externa, deixando uma ponta desencapada de uns 7 cm. Você deve ficar com uma montagem parecida com a da figura 11.16, que é a parte inferior da garrafa de Leyden.

garrafa de plástico

papel-alumínio

fio de cobre

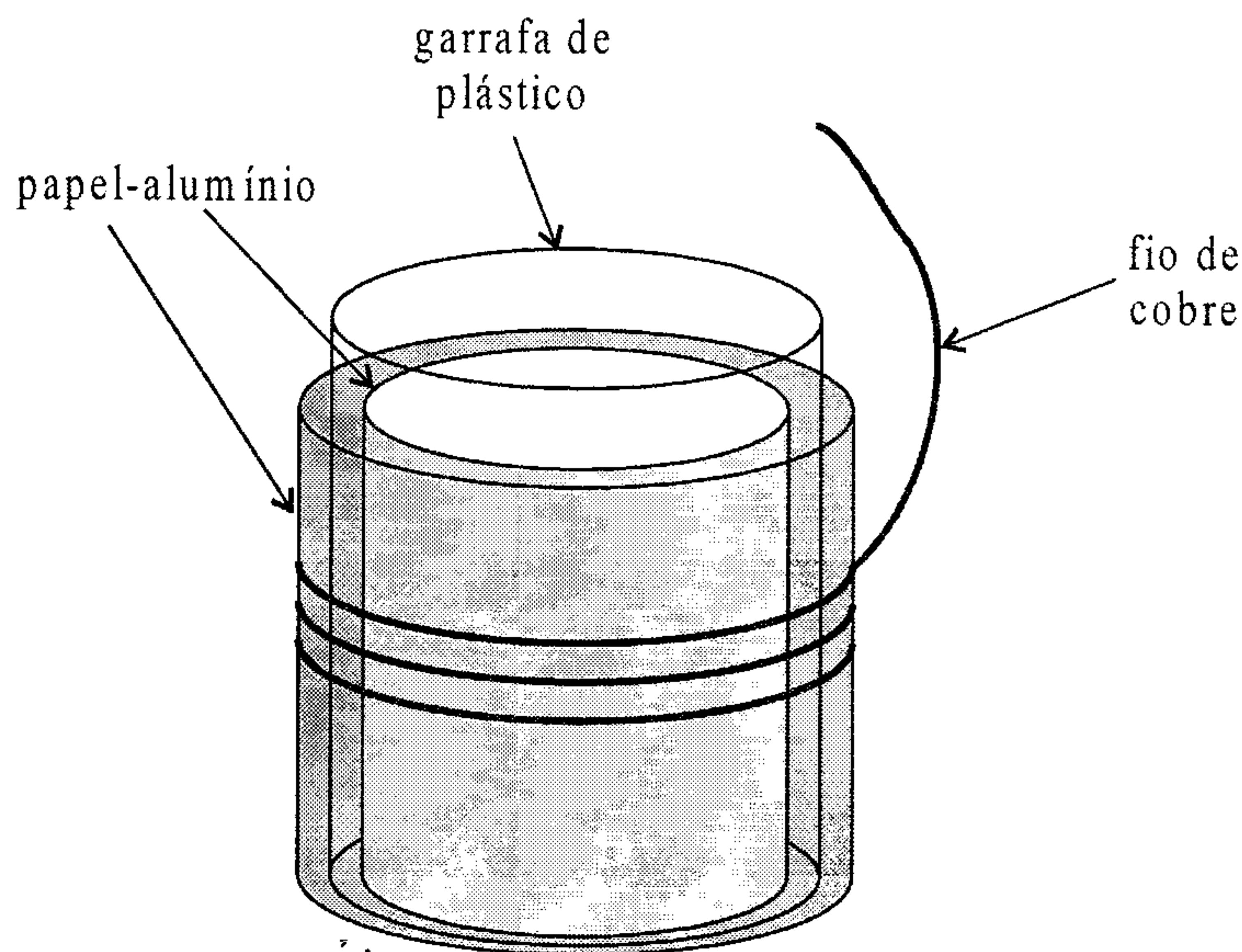



Figura 11.16: Montagem experimental da parte inferior da garrafa de Leyden.

Agora, vamos montar a parte superior da garrafa de Leyden. Utilize a outra metade do recipiente plástico, e a sua própria tampa, e enfie a varinha de latão por dentro dela, por uma distância que seja suficiente para que a varinha chegue quase ao fundo da parte inferior da garrafa. Na parte da varinha que fica para fora do recipiente plástico, coloque a bolinha de isopor e a envolva com papel-alumínio, de modo a permitir o contato elétrico entre o alumínio e o latão. Você deve obter algo semelhante à figura 11.17.

Montadas as duas partes da garrafa de Leyden, pique papel-alumínio em pedaços pequenos e os coloque dentro da parte inferior da garrafa, até cerca de três quartos de sua capacidade. Depois, tampe a parte inferior, fazendo com que a varinha de latão fique rodeada pelos pedaços de papel-alumínio. Por fim, aproxime o fio de cobre da bolinha de isopor, sem deixar que eles se toquem, como mostra a figura 11.18. Está pronta a sua garrafa de Leyden.

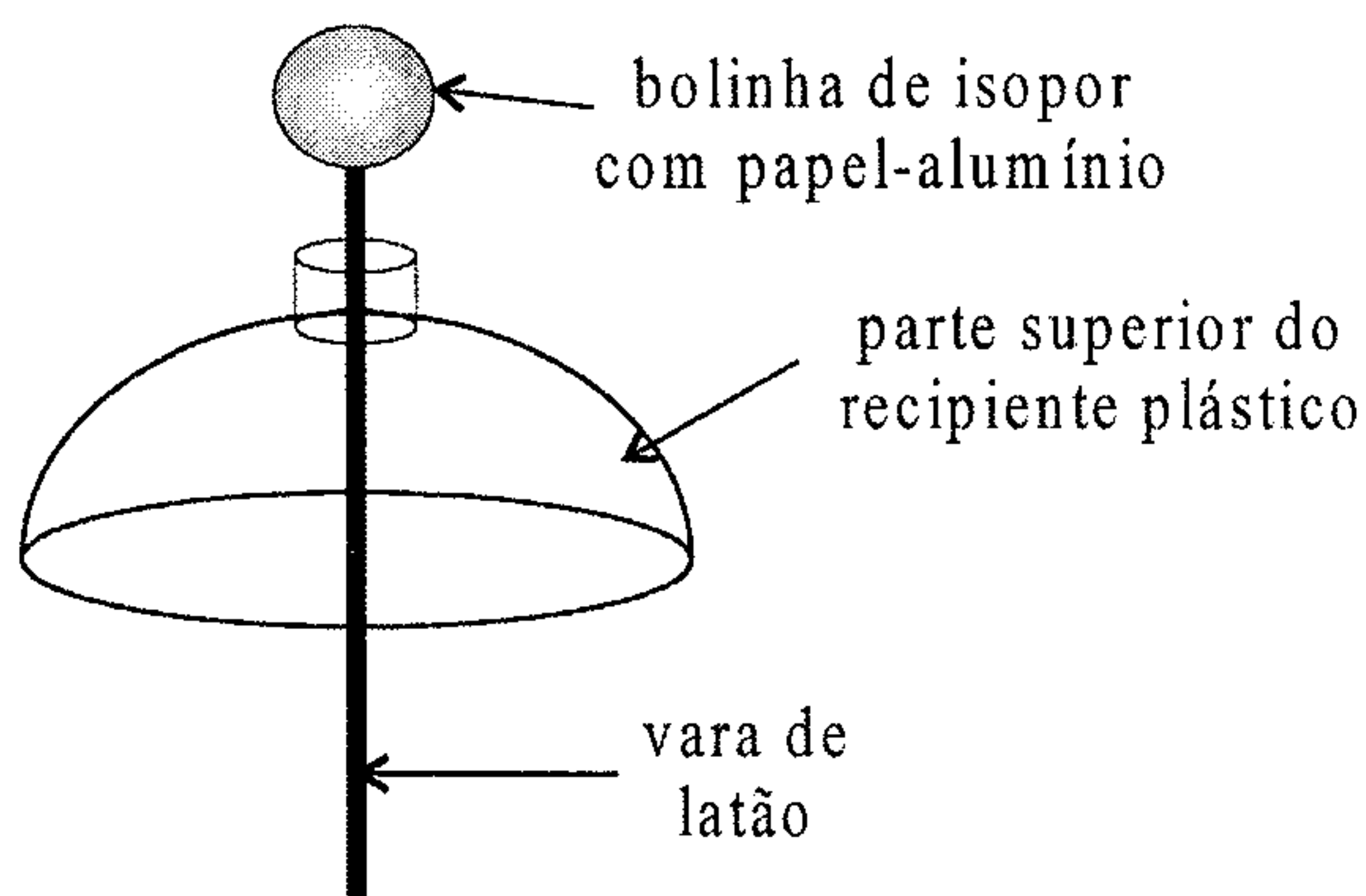



Figura 11.17: Parte superior da garrafa de Leyden.

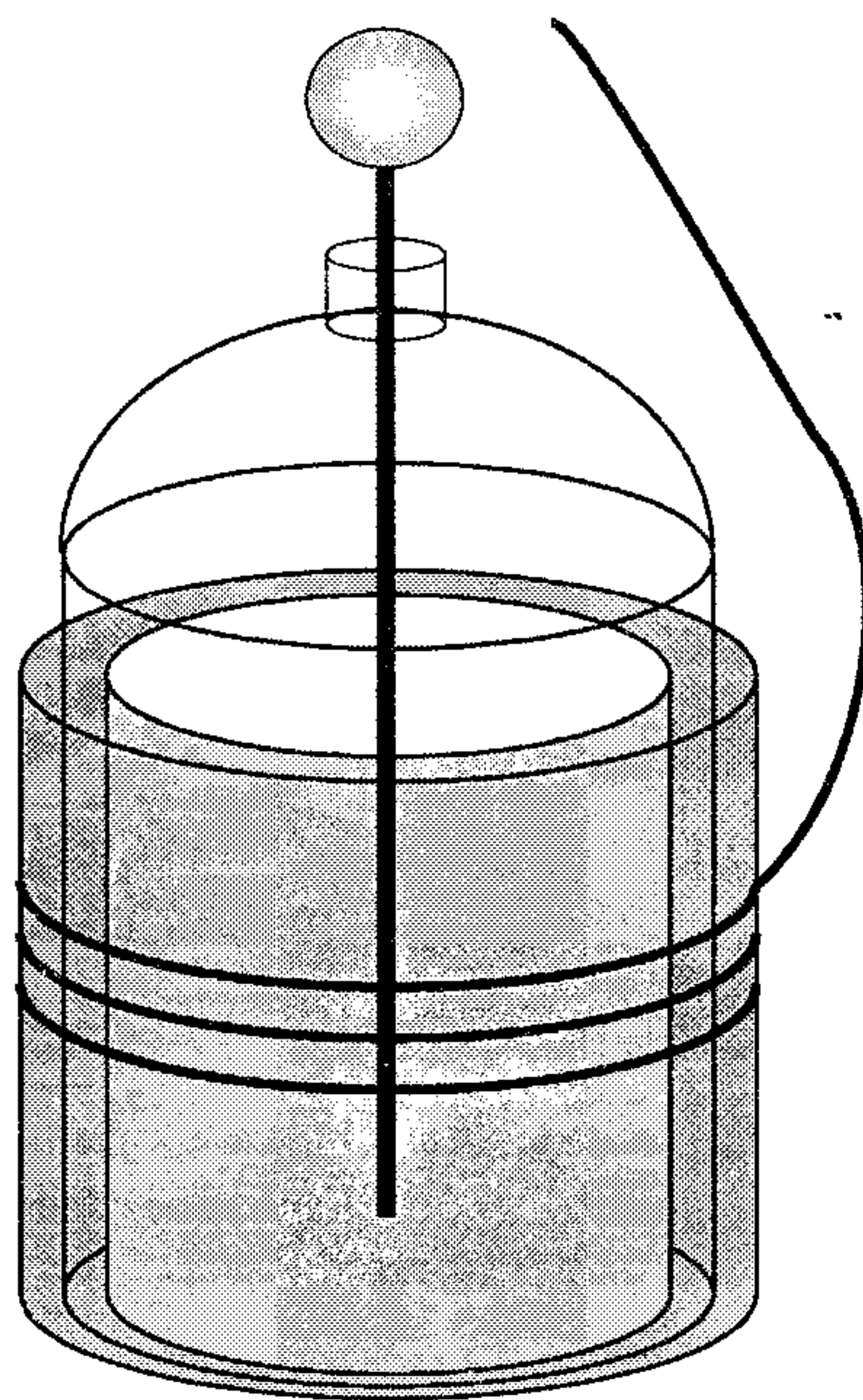



Figura 11.18: Garrafa de Leyden finalizada.

Agora vamos à experiência propriamente dita. Atrite o bastão de vidro com a flanela de lã e toque a bolinha de isopor com ele. Repita o processo várias vezes até que o capacitor adquira uma carga considerável. Depois, aproxime a ponta do fio de cobre da bolinha de isopor e observe o que ocorre. Faça

a experiência também num ambiente escuro, que pode ser mais interessante.

Depois de realizar este experimento, carregue novamente o capacitor e encoste a bolinha na antena de um rádio que esteja ligado. Anote novamente o que ocorre e procure explicar os fenômenos observados.

11.4.2 Experiência de Millikan

O fato de o campo elétrico dentro de um capacitor ser constante, homogêneo e facilmente determinável (ele vale, pela equação 4.24, $\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$, onde σ é a densidade de carga numa das placas) permitiu a R. A. Millikan, em 1909, medir o valor da carga e do elétron. Para isso, ele utilizou um capacitor de placas horizontais que podia ser submetido a uma diferença de potencial ΔV variável. Millikan borrifou gotas de óleo dentro do capacitor, com um atomizador do tipo usado em aerossóis. Nestas condições, as gotas de óleo adquirem, por atrito, uma pequena carga Q quando passam pelo atomizador, e, ao atravessar o capacitor, ficam sujeitas a uma força elétrica $\vec{F}$, dada, em módulo, por $F = Q\mathcal{E}$, a seu próprio peso $P = mg$, onde m é a massa da gota e g, a aceleração da gravidade, e também a uma força de atrito $\vec{R}$ gerada pela resistência do ar. As gotas são observadas por um microscópio e suas velocidades podem ser medidas mediante a verificação do tempo que elas levam para passar entre dois marcos definidos no equipamento. A montagem da experiência pode ser vista na figura 11.19.

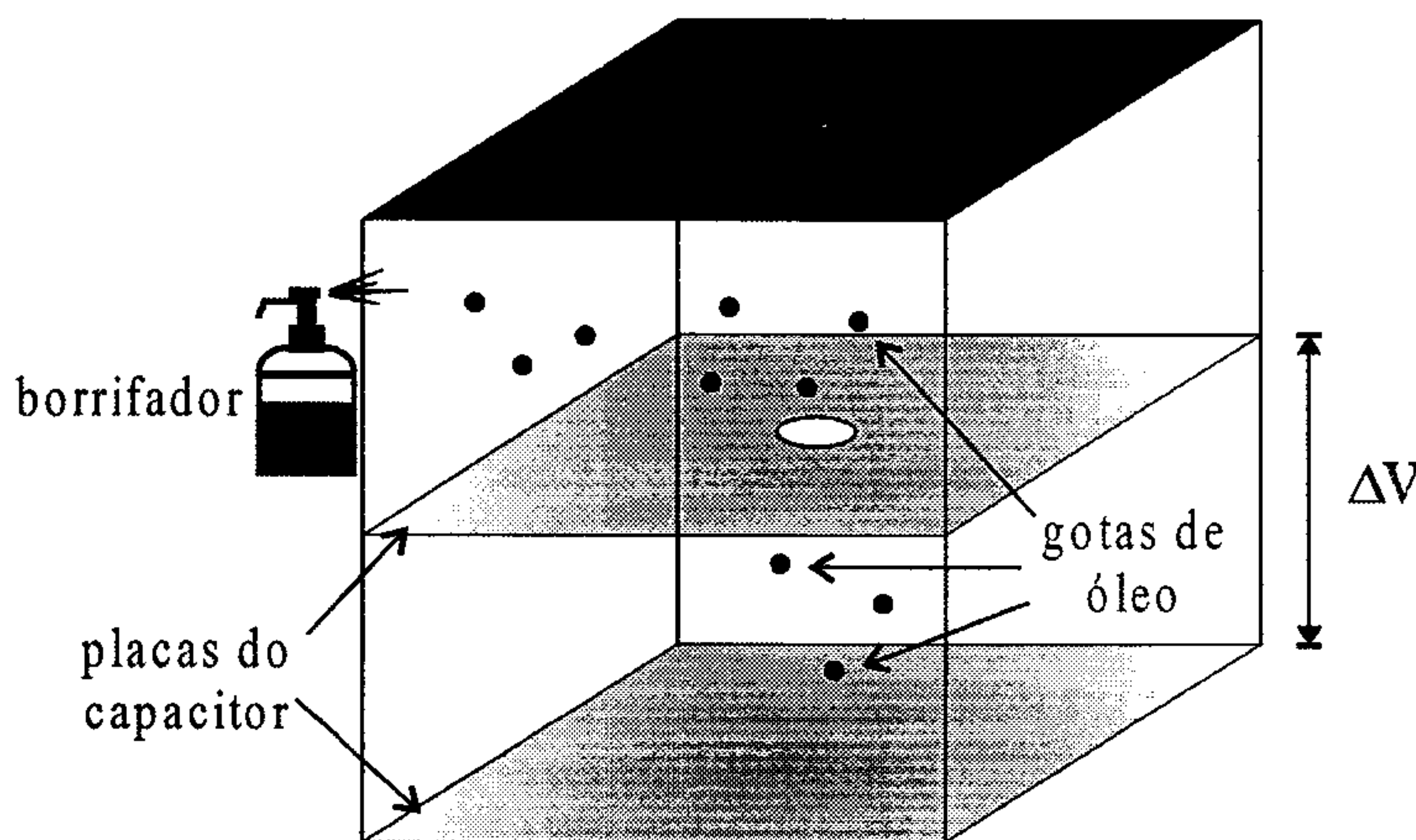



Figura 11.19: Montagem experimental da experiência de Millikan.

Como se percebe pela figura, a placa superior do capacitor tem um pequeno furo, para concentrar as gotas apenas numa certa região. Estando o capacitor desligado, as gotas caem sob a ação apenas do peso $\vec{P}$ e da resistência do ar $\vec{R}$, que é uma força proporcional à velocidade das gotas, na forma

$$\vec{R} = -\gamma\vec{v}$$

onde γ é um coeficiente que depende da geometria das gotas e do fluido pelo qual elas passam. Para gotas de óleo esféricas, esta expressão se reduz à lei de Stokes, dada por

$$\vec{R} = -6\pi\eta r\vec{v}$$

onde η é o coeficiente de viscosidade do ar e r é o raio das gotas. Sendo assim, as gotas são aceleradas até uma velocidade limite v, em que a resistência do ar torna-se igual ao seu peso, quando então elas caem em movimento uniforme. Portanto, nesta condição de equilíbrio temos

$$\vec{P} + \vec{R} = 0$$

ou, em módulo,

$$mg = 6\pi\eta rv \tag{11.24}$$

As gota têm uma densidade ρ, e elas são esféricas, de modo que

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{m}{\frac{4\pi r^3}{3}} \\ \rho &= \frac{3m}{4\pi r^3} \\ r^3 &= \frac{3m}{4\pi\rho} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}} \end{aligned}$$

Usando este valor para r na equação 11.24, obtemos

$$\begin{aligned} mg &= 6\pi\eta\sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}v \\ m^3g^3 &= 216\pi^3\eta^3\frac{3m}{4\pi\rho}v^3 \end{aligned}$$

$$m^2 = \frac{162\pi^2\eta^3}{\rho g^3} v^3$$

$$m = \frac{9\pi\eta}{g}\sqrt{\frac{2\eta}{g}} v^{\frac{3}{2}} \qquad (11.25)$$

Esta expressão para a massa será necessária para a segunda parte da experiência, em que o capacitor é ligado. Mediante uma escolha apropriada da diferença de potencial $\Delta\mathbb{V}$, é possível fazer com que as gotas de óleo alcancem o equilíbrio estático dentro do capacitor, sob a ação apenas do peso $\vec{P}$ e da força elétrica $\vec{F} = Q\vec{\mathcal{E}}$. Neste caso, achamos

$$\vec{P} + \vec{F} = 0$$

ou, em módulo,

$$mg = Q\mathcal{E} \qquad (11.26)$$

A diferença de potencial no capacitor é dada pela equação 5.31, ou seja,

$$\Delta\mathbb{V} = \frac{QL}{\epsilon_0 A}$$

sendo que L é a distância entre as placas do capacitor. Lembrando que

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

temos

$$\Delta\mathbb{V} = \frac{\sigma L}{\epsilon_0}$$

Como, pela expressão 4.24,

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

obtemos

$$\Delta\mathbb{V} = \mathcal{E}L$$

ou seja,

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\mathbb{V}}{L}$$

Usando este valor, e mais a relação 11.25, na expressão 11.26, encontramos

$$\frac{9\pi\eta}{g}\sqrt{\frac{2\eta}{g}}v^{\frac{3}{2}}g = Q\frac{\Delta\mathbb{V}}{L}$$

$$Q = \frac{9\pi\eta L}{\Delta\mathbb{V}}\sqrt{\frac{2\eta}{g}}v^{\frac{3}{2}}$$

que dá o valor da carga contida nas gotas em termos de grandezas conhecidas e de grandezas que podem ser determinadas por outros métodos independentes. Estudando várias gotas, Millikan observou que seus resultados para as cargas eram coerentes com a equação

$$Q = ne$$

sendo n um número inteiro pequeno, e e, uma constante de valor $e = 1,592 \times 10^{-16}$ C. Millikan interpretou que as gotas de óleo contêm algumas partículas carregadas, os elétrons, e que essas partículas têm uma carga elétrica bem definida, cujo valor ele obteve com uma razoável precisão, já que o valor aceito hoje para a carga do elétron é, com três casas decimais, $1,602 \times 10^{-19}$ C.

11.5 Exercícios

11.1 Que valores de capacitância é possível produzir com quatro capacitores iguais de 2 μF?

11.2 Mostre que a capacitância do capacitor equivalente em série é sempre menor do que a menor capacitância dos capacitores que formam a associação.

11.3 Suponha que num capacitor plano paralelo de área A e distância L entre as placas, preenchido por ar, seja colocada uma placa condutora de cobre, de área A e largura d, a uma distância x da placa positiva, sendo $d + x < L$. Qual é a capacitância do capacitor? (Lembre-se que a superfície de um condutor é uma superfície equipotencial.)

11.4 No exemplo 11.11 estudamos um capacitor preenchido com três dielétricos diferentes. A capacitância equivalente é dada pela equação 11.16. Verifique o que ocorre com essa expressão quando

a) $a \to 0$

b) $a \to A$

c) $\epsilon_1 \to \epsilon_2$

d) $\epsilon_1 \to \epsilon_3$

e) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon$

Calcule também, para todos esses casos, a energia eletrostática acumulada.

11.5 Qual é a capacitância equivalente entre os vários pontos marcados no circuito mostrado na figura 11.20? Supondo que $C_1 = C_2 = \frac{C_3}{3} = 4,5C_4 = 2,5\ \mu$F, quais são os valores numéricos das capacitâncias?

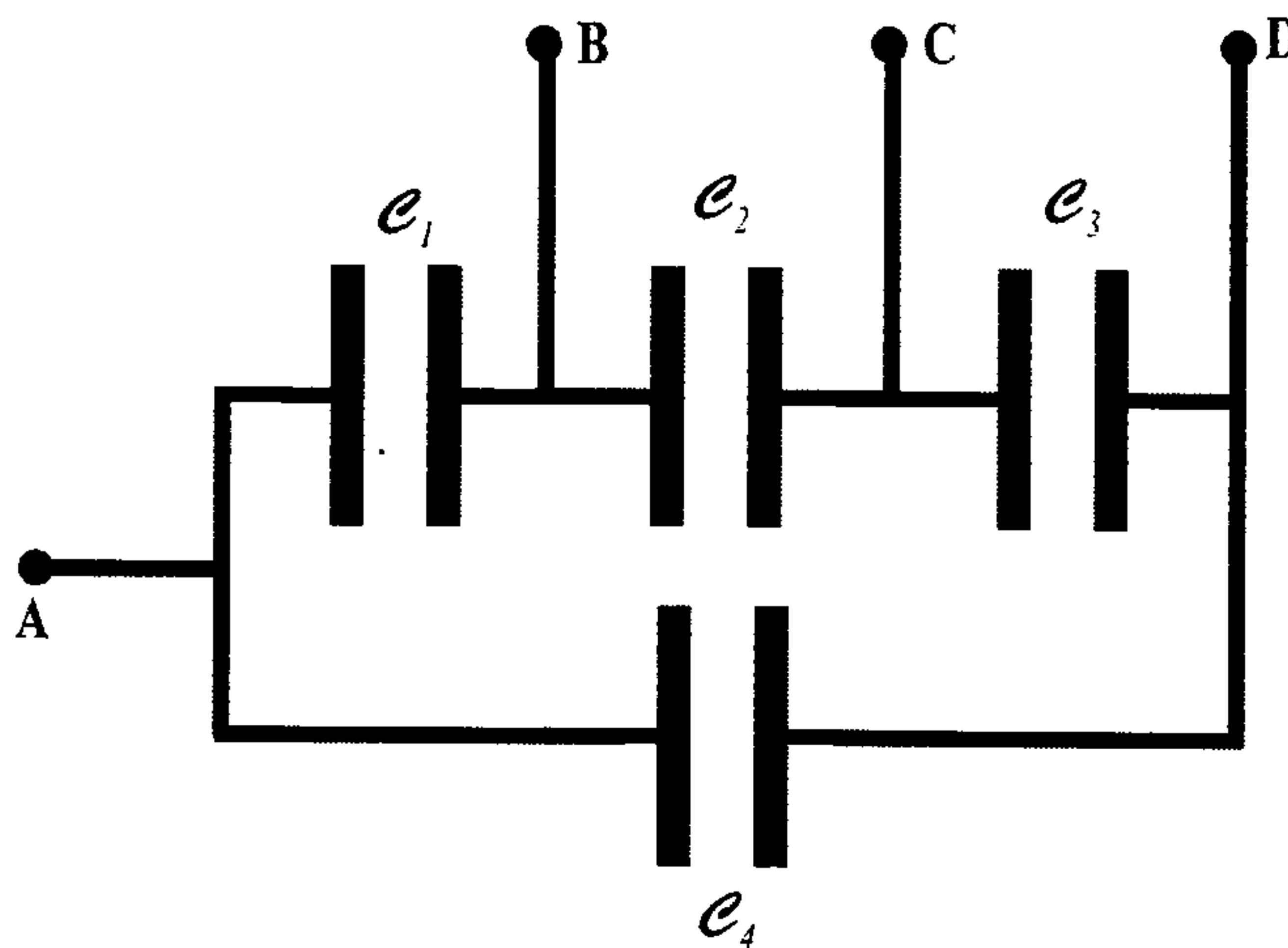



Figura 11.20: Uma associação de capacitores.

11.6 Verifique se a expressão 11.23 para a energia eletrostática obtida no exemplo 11.13 está de acordo com o esperado nos limites $x \to 0$ e $x \to a$. Pode ser útil o exemplo 11.1.

11.7 Considere dois fios condutores cilíndricos paralelos muito longos e estreitos, separados por uma distância D. Os fios têm densidades lineares de carga λ e $-\lambda$, respectivamente. Calcule a capacitância formada por este sistema. O método das imagens pode ser útil.

11.8 O capacitor da figura 11.21 está semipreenchido por uma chapa dielétrica de mesma área A que o capacitor. Sua permissividade é ϵ e sua largura é D.

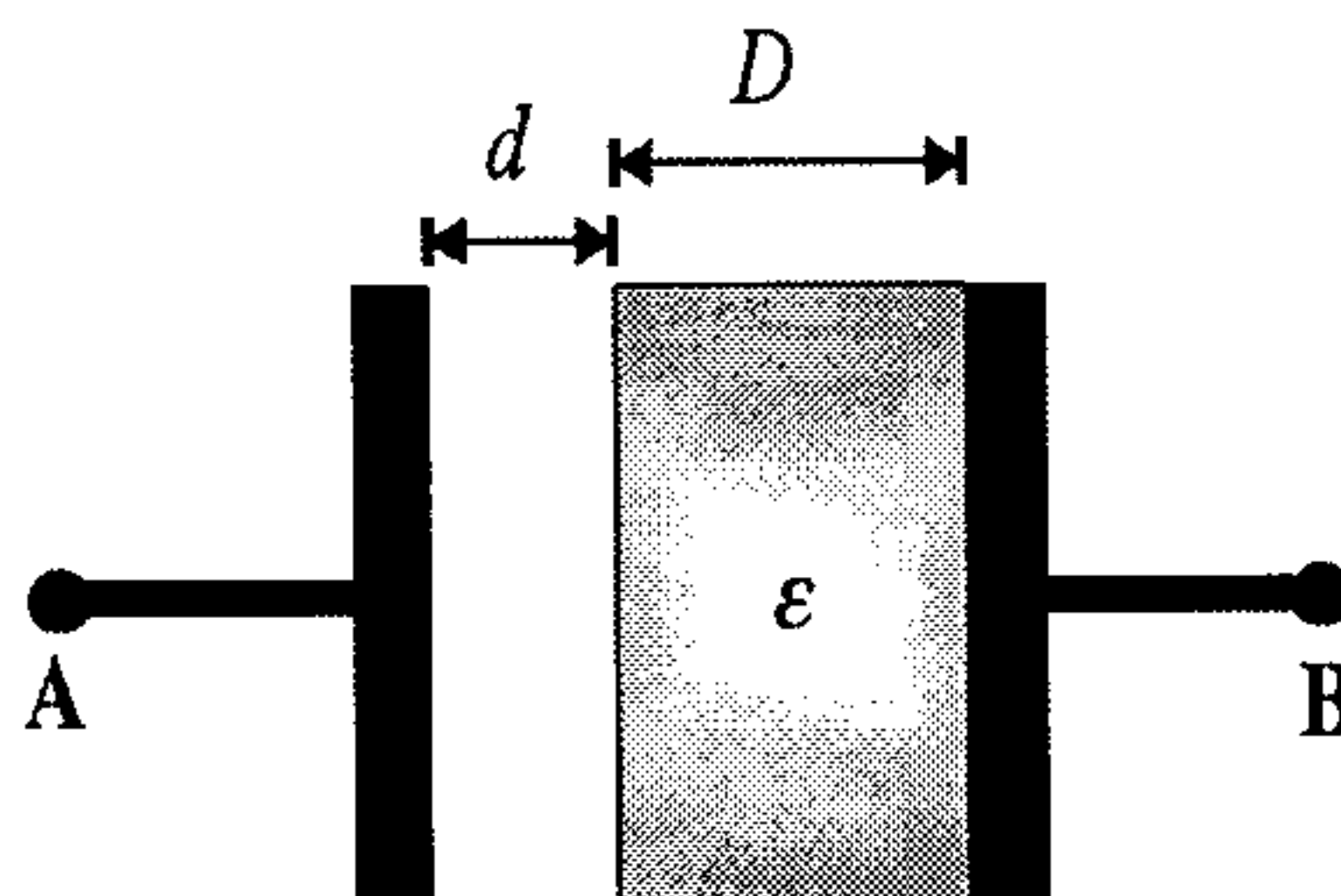



Figura 11.21: Um capacitor semipreenchido por um dielétrico de permissividade ϵ.

Com relação a este sistema, determine a capacitância equivalente, a energia eletrostática armazenada e a força exercida pelo capacitor sobre o dielétrico se ele for puxado para fora de uma distância y, mantendo-se:

a) A carga constante.

b) A diferença de potencial constante.

11.9 Um capacitor esférico é formado por duas esferas condutoras de raios R_1 e R_2. Dentro dele são colocadas duas coroas esféricas dielétricas, sendo que uma vai de R_1 até R_3 ($R_2 < R_3 < R_1$), com permissividade ϵ_1, e a outra vai de R_3 até R_2, com permissividade ϵ_2. Calcule o capacitor equivalente, a energia eletrostática armazenada e a força que uma placa exerce sobre a outra quando a carga é mantida fixa e quando o potencial é mantido fixo. Estude os limites

a) $R_1 \to 0$

b) $R_2 \to \infty$

c) $\epsilon_1 \to \epsilon_2$

APÊNDICES

Apêndice A

Constantes Físicas

Apresentamos aqui alguns dados físicos relevantes, como constantes físicas e dados gerais.

Grandeza	Símbolo	Valor
Carga elétrica elementar (módulo)	e	$1,6 \times 10^{-19}$ C
Constante de Boltzmann	k_B	$1,38 \times 10^{-23}$ J/K
Permissividade elétrica do vácuo	ε_0	$8,85 \times 10^{-12}$ C^2/N.m
Constante de Planck	h	$6,63 \times 10^{-34}$ J.s
Constante de gravitação universal	G	$6,67 \times 10^{-11}$ N.m^2/kg^2
Massa de repouso do elétron	m_e	$9,11 \times 10^{-31}$ kg
Massa de repouso do próton	m_p	$1,67 \times 10^{-27}$ kg
Velocidade da luz no vácuo	c	3×10^{8} m/s
Magnéton de Bohr	μ_B	$9,27 \times 10^{-24}$ A.m^2
Permeabilidade magnética do vácuo	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ T.m/A
Número de Avogadro	N_0, A	$6,023 \times 10^{23}$ mol^{-1}
Constante universal dos gases ideais	R	$8,31$ J/mol.K
Constante de Faraday	$\mathcal{F}$	$9,65 \times 10^{4}$ C/mol
Aceleração da gravidade ao nível do mar	g	9,80 m/s^2
Raio médio da Terra	R_T	$6,367 \times 10^{6}$ m
Massa da Terra	M_T	$5,99 \times 10^{24}$ kg
Zero absoluto de temperatura	T_0	0 K $= -273,15$ ºC
Temperatura do ponto triplo da água	T_{pt}	273,16 K = 0,01 ºC

Apêndice B

Operadores Diferenciais

Aqui deduziremos a expressão do operador ∇ e do gradiente, divergente, rotacional e Laplaciano em três sistemas de coordenadas: retangulares, cilíndricas e esféricas.

B.1 Coordenadas Retangulares

Nas coordenadas retangulares (x, y, z), o operador ∇ é escrito como

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}$$

e o gradiente de uma função escalar $\phi(x, y, z)$ passa a ser

$$\nabla\phi = \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\phi$$

ou

$$\nabla\phi = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

O divergente de uma função vetorial $\vec{A} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}$ em retangulares é

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left(A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}\right)$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{A} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \frac{\partial\left(A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}}\right)}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \cdot \frac{\partial\left(A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}}\right)}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial\left(A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}}\right)}{\partial z}$$

ou ainda,

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

O rotacional de uma função vetorial $\vec{A} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}}$ é uma outra função vetorial $\vec{B}$, definida através do produto vetorial de ∇ com $\vec{A}$, ou seja,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Para encontrar um produto vetorial, podemos achar o determinante

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\hat{\mathbf{i}} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\hat{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\hat{\mathbf{k}}$$

que define o produto vetorial. Para o rotacional, temos

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

e o resultado é

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial A_z}{\partial y} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial A_x}{\partial z} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial A_y}{\partial x} - \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial A_y}{\partial z} - \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial A_z}{\partial x} - \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

ou seja,

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Por fim, o Laplaciano ∇^2 fica

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

$$\nabla^2 = \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

ou

$$\nabla^2 = \hat{\mathbf{i}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] + \hat{\mathbf{j}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] + \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

ou ainda,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

que, aplicado a uma função, resulta em

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

B.2 Coordenadas Cilíndricas

Vejamos agora as coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z), que foram apresentadas na seção 1.3. A transformação entre as coordenadas retangulares e cilíndricas é dada pelas equações 1.29 ou 1.30 (veja a figura 1.17),

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{B.1a}$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \tag{B.1b}$$

$$z = z \tag{B.1c}$$

e

$$x = \rho\cos\theta \tag{B.2a}$$

$$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{B.2b}$$

$$z = z \tag{B.2c}$$

enquanto a base de coordenadas cilíndricas $\mathcal{C} = \{\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ e a base de coordenadas retangulares $R_3 = \{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ estão relacionadas pelas equações 1.31 e 1.32 (veja a figura 1.18),

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{j}} \tag{B.3a}$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}} \tag{B.3b}$$
$$\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \tag{B.3c}$$

ou

$$\hat{\mathbf{i}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{B.4a}$$
$$\hat{\mathbf{j}} = \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{B.4b}$$
$$\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \tag{B.4c}$$

Então, para encontrar o operador ∇ neste sistema, precisamos aplicar sucessivamente a regra da cadeia, usando as expressões B.1 ou B.2. Considerando que, em retangulares (equação 1.50),

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}$$

devemos passar todos os termos para coordenadas cilíndricas, inclusive os versores, mediante as equações B.2 e B.4. Assim, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} \tag{B.5a}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} \tag{B.5b}$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{B.5c}$$

Vamos calcular separadamente cada uma das derivadas acima, usando as equações B.2.

1.

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\rho\cos\theta}{\rho}$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos\theta$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) \\
&= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) \\
&= -\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{y}{x^2} \\
&= -\frac{y}{x^2+y^2} \\
&= -\frac{\rho \operatorname{sen}\theta}{\rho^2} \\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}
\end{aligned}$$

3.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

4.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{\rho \operatorname{sen}\theta}{\rho} \\
\frac{\partial \rho}{\partial y} &= \operatorname{sen}\theta
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) \\
&= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x} \\
&= \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{1}{x} \\
&= \frac{x}{x^2+y^2} \\
&= \frac{\rho\cos\theta}{\rho^2} \\
\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos\theta}{\rho}
\end{aligned}$$

6.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

7.

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

8.

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

9.

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

Reunindo todas as expressões acima nas equações B.5, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

Agora, voltamos ao operador ∇. Reescrevendo os termos em função das coordenadas cilíndricas e usando também as equações B.4, temos

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\nabla = &\left(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\left(\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\ &+ \left(\operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla = &\left[\cos^2\theta\,\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{sen}^2\theta\,\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\rho}}\\ &+ \left[-\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos^2\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

e portanto, em cilíndricas,

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{B.6}$$

de modo que o gradiente fica

$$\nabla\phi = \hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{B.7}$$

Para calcular o divergente, é preciso tomar alguns cuidados, pois os versores $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ possuem derivadas em relação a θ, como vemos em

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right)\\ &= -\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}\\ \frac{\partial\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial\theta} &= \hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right)\\ &= -\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{j}}\\ \frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\theta} &= -\hat{\boldsymbol{\rho}}\end{aligned}$$

Assim, em cilíndricas, uma função vetorial $\vec{A} = A_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}$ tem a divergência

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left[\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left(A_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}\right)$$

ou

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot & \left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(A_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}\right)\right] \\ & + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}\right)\right] \\ & \qquad + \hat{\mathbf{k}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(A_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}\right)\right]\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\right) + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \cdot \left[A_\rho \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \theta}\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \cdot \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \cdot \left[A_\theta \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta}\right] + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \cdot \left(A_\rho\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \cdot \left[A_\theta\left(-\hat{\boldsymbol{\rho}}\right)\right] + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}A_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{B.8}$$

Para o rotacional, precisamos saber que

$$\begin{array}{lll} \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = 0 & \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{k}} & \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = -\hat{\mathbf{k}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0 & \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\boldsymbol{\rho}} & \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0 \end{array}$$

O rotacional apresenta os mesmos problemas que o divergente, e ele fica

$$\nabla \times \vec{A} = \left[\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] \times \left(A_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}\right)$$

ou

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(A_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}})\right] \\ + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \times \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}})\right] \\ + \hat{\mathbf{k}} \times \left[\frac{\partial}{\partial z}(A_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}})\right]\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial A_\theta}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right] \\ + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \times \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}}) + A_\theta\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial A_z}{\partial \theta}\right] \\ + \hat{\mathbf{k}} \times \left[\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial A_\rho}{\partial z} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} = \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial A_\theta}{\partial \rho} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial A_z}{\partial \rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \times \left[\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} + A_\rho\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \theta} - A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\right] \\ + \frac{\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} = \hat{\boldsymbol{\rho}}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right] + \hat{\boldsymbol{\theta}}\left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right] \\ + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial A_\theta}{\partial \rho} - \frac{\hat{\mathbf{k}}}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} + A_\theta\,\frac{\hat{\mathbf{k}}}{\rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \times \left(A_\rho\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\end{aligned}$$

ou então,

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{\boldsymbol{\rho}}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right] + \hat{\boldsymbol{\theta}}\left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right] + \frac{\hat{\mathbf{k}}}{\rho}\left[A_\theta + \rho\frac{\partial A_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\right]$$

e por fim,

$$\nabla \times \vec{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right]\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\right]\frac{\hat{\mathbf{k}}}{\rho} \tag{B.9}$$

O Laplaciano é

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

$$\nabla^2 = \left[\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

ou

$$\begin{aligned}\nabla^2 = \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] \\ + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right] \\ + \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \cdot \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \cdot \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\rho^2} \cdot (-\hat{\boldsymbol{\rho}})\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{B.10}$$

que, aplicado a uma função, fica

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

B.3 Coordenadas Esféricas

As coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), que foram apresentadas na seção 1.4 (veja a figura 1.19), estão relacionadas às coordenadas retangulares pelas equações 1.35 e 1.36,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{B.11a}$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \tag{B.11b}$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \tag{B.11c}$$

e

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \tag{B.12a}$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \tag{B.12b}$$

$$z = r \cos \theta \tag{B.12c}$$

enquanto a base $\mathcal{E} = \{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}\}$ de coordenadas esféricas está relacionada à base de coordenadas retangulares $R_3 = \{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ pelas expressões 1.37 e 1.38 (veja a figura 1.20),

$$\hat{\mathbf{r}} = \operatorname{sen} \theta \cos \phi \, \hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \, \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \, \hat{\mathbf{k}} \tag{B.13a}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \cos \phi \, \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \operatorname{sen} \phi \, \hat{\mathbf{j}} - \operatorname{sen} \theta \, \hat{\mathbf{k}} \tag{B.13b}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\operatorname{sen} \phi \, \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi \, \hat{\mathbf{j}} \tag{B.13c}$$

e

$$\hat{\mathbf{i}} = \operatorname{sen} \theta \cos \phi \, \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \cos \phi \, \hat{\boldsymbol{\theta}} - \operatorname{sen} \phi \, \hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{B.14a}$$

$$\hat{\mathbf{j}} = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \, \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \operatorname{sen} \phi \, \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos \phi \, \hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{B.14b}$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \cos \theta \, \hat{\mathbf{r}} - \operatorname{sen} \theta \, \hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{B.14c}$$

Novamente vamos precisar usar a regra da cadeia para transformar as derivadas do operador ∇ em retangulares,

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}$$

para as coordenadas esféricas. Temos que achar

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} \tag{B.15a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} \tag{B.15b}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{B.15c}$$

Vamos aos cálculos.

1.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= \frac{r \operatorname{sen}\theta \cos\phi}{r} \\
\frac{\partial r}{\partial x} &= \operatorname{sen}\theta\cos\phi
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right] \\
&= \frac{1}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}\frac{1}{2}\frac{2x}{z\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{z^2}{z^2+x^2+y^2}\frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{zx}{\left(z^2+x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\cos\phi}{r^2\sqrt{r^2\operatorname{sen}^2\theta}} \\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right] \\
&= -\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \frac{y}{x^2} \\
&= -\frac{x^2}{x^2+y^2} \frac{y}{x^2} \\
&= -\frac{y}{x^2+y^2} \\
&= -\frac{r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{\operatorname{sen} \phi}{r \operatorname{sen} \theta}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= \frac{r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi}{r} \\
\frac{\partial r}{\partial y} &= \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right] \\
&= \frac{1}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}} \frac{1}{2} \frac{2y}{z\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{z^2}{z^2+x^2+y^2} \frac{y}{z\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{zy}{\left(z^2+x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi}{r^2 \sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \\
\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos \theta \operatorname{sen} \phi}{r}
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right] \\
&= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x} \\
&= \frac{x^2}{y^2+x^2}\frac{1}{x} \\
&= \frac{x}{y^2+x^2} \\
&= \frac{r \operatorname{sen}\theta \cos\phi}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \\
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\cos\phi}{r \operatorname{sen}\theta}
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= \frac{r\cos\theta}{r} \\
\frac{\partial r}{\partial z} &= \cos\theta
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right] \\
\frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0
\end{aligned}$$

9.

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right]$$

$$= -\frac{1}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}$$

$$= -\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}}{r^2}$$

$$= -\frac{r \operatorname{sen}\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$$

Portanto, as equações B.15 resultam em

$$\frac{\partial}{\partial x} = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{sen}\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

O operador ∇ fica

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}$$

ou

$$\begin{aligned}\nabla = {} & \left(\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \operatorname{sen}\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)\left[\operatorname{sen}\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}\right. \\ & \left. + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{sen}\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right] + \left(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right. \\ & \left. + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)\left[\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right] \\ & + \left(\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\left[\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right]\end{aligned}$$

A componente em $\hat{\mathbf{r}}$ de ∇ é

$$\nabla_{\hat{\mathbf{r}}} = \hat{\mathbf{r}}\Big[\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos^2\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\phi\operatorname{sen}\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\operatorname{sen}\phi\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big]$$

A componente em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ fica

$$\nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\Big[\cos\theta\operatorname{sen}\theta\cos^2\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta\cos^2\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta\cos\phi\operatorname{sen}\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\phi\cos\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big]$$

E por fim, a componente em $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ torna-se

$$\nabla_{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\Big[-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\phi\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\operatorname{sen}^2\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + \operatorname{sen}\theta\cos\phi\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi\operatorname{sen}\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big]$$

Reunindo as três expressões anteriores, obtemos

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\Big[\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial}{\partial r} + \cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big] + \hat{\boldsymbol{\theta}}\Big[\cos\theta\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial r} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big] + \hat{\boldsymbol{\phi}}\Big[\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big]$$

e finalmente,

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{B.16}$$

O gradiente de uma função ψ fica

$$\nabla\psi = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \tag{B.17}$$

enquanto o divergente de $\vec{A} = A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ é

$$\nabla\cdot\vec{A} = \left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\cdot\left(A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$$

e aqui é preciso tomar cuidado, porque $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ possuem derivadas com relação a θ e ϕ, como pode ser visto em

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}\right)\\
&= \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{j}} - \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{k}}\\
\frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\theta} &= \hat{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{j}} - \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{k}}\right)\\
&= -\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{j}} - \cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}\\
\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\theta} &= -\hat{\mathbf{r}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\phi} &= \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}\right)\\
&= -\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{j}}\\
&= \mathrm{sen}\,\theta\left(-\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{j}}\right)\\
\frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\phi} &= \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\phi} &= \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{j}} - \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{k}}\right)\\
&= -\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{j}}\\
&= \cos\theta\left(-\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{j}}\right)\\
\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\phi} &= \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial\phi} = \frac{\partial}{\partial\phi}(-\operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{j}})$$
$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial\phi} = -(\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}})$$

Multiplicando o versor $\hat{\mathbf{r}}$ por $\operatorname{sen}\theta$ e o versor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ por $\cos\theta$, temos

$$\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{r}} = \operatorname{sen}^2\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}} + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos^2\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos^2\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}} - \cos\theta\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$

Somando as equações acima, achamos

$$\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \operatorname{sen}^2\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}} + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}} + \cos^2\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos^2\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}} - \cos\theta\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$

ou

$$\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\operatorname{sen}^2\theta\cos\phi + \cos^2\theta\cos\phi\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\phi + \cos^2\theta\operatorname{sen}\phi\right)\hat{\mathbf{j}}$$

ou ainda,

$$\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}}$$
$$\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial\phi}$$

isto é,

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial\phi} = -\left(\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

e assim, o divergente fica

$$\nabla\cdot\vec{A} = \left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\cdot\left(A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{A} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen}\theta} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \phi}\left(A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)\right]$$

ou ainda,

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \cdot \left[A_r \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) + A_\phi \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \theta}\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen}\theta} \cdot \left[A_r \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \phi} + A_\theta \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)\right]$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \cdot \left[A_r\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + A_\theta \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta}\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen}\theta} \cdot \left[A_r \operatorname{sen}\theta \hat{\boldsymbol{\phi}} + A_\theta \cos\theta \hat{\boldsymbol{\phi}} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + A_\phi \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \phi}\right]$$

ou então,

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \cdot \left[-A_\theta\,\hat{\mathbf{r}}\right] + \frac{A_r}{r} + \frac{A_\theta \cos\theta}{r \operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen}\theta} \cdot \left[-A_\phi\left(\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + 2\frac{A_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_\theta \cos\theta}{r \operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

e por fim,

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \qquad \text{(B.18)}$$

Para calcular o rotacional em esféricas, é preciso conhecer os produtos vetoriais entre os versores $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, que são dados pelas expressões 1.40,

$$\begin{array}{lll}
\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} = 0 & \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
\hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\mathbf{r}} = -\hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0 & \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{r}} \\
\hat{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} = 0
\end{array}$$

e assim,

$$\nabla \times \vec{A} = \left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right] \times \left(A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{A} = \hat{\mathbf{r}} \times \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)\right] \\
+ \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \times \left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)\right] \\
+ \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen}\theta} \times \left[\frac{\partial}{\partial \phi}\left(A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)\right]
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{A} = \hat{\mathbf{r}} \times \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\partial A_\phi}{\partial r}\right] \\
+ \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \times \left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_r\,\hat{\mathbf{r}}\right) + A_\theta\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)\right] \\
+ \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen}\theta} \times \left[\frac{\partial}{\partial \phi}\left(A_r\,\hat{\mathbf{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) + A_\phi\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \phi}\right]
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{A} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial A_\phi}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \times \left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + A_r\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} - A_\theta\hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} + A_\phi\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \theta}\right] \\
+ \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen}\theta} \times \left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} + A_r\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \phi} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} + A_\theta\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \phi} - A_\phi\left(\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]
\end{aligned}$$

ou então,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{A} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial A_\phi}{\partial r} - \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{A_r}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} \\
+ \frac{A_\theta}{r}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{A_r \operatorname{sen}\theta}{r \operatorname{sen}\theta}\hat{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} \\
- \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} + \frac{A_\theta \cos\theta}{r \operatorname{sen}\theta}\hat{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} - \frac{A_\phi \operatorname{sen}\theta}{r \operatorname{sen}\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{A_\phi \cos\theta}{r \operatorname{sen}\theta}\hat{\mathbf{r}}
\end{aligned}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \operatorname{sen}\theta}\left[\operatorname{sen}\theta \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} + A_\phi \cos\theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \left(A_\phi + r\frac{\partial A_\phi}{\partial r}\right)\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left[r\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + A_\theta - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]$$

ou seja, o rotacional é

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right] \quad \text{(B.19)}$$

enquanto o Laplaciano fica

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

$$\nabla^2 = \left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right] \cdot \left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right]$$

ou

$$\nabla^2 = \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}\left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right]$$

ou ainda,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r^2} \cdot \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \cdot \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$
$$+ \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \operatorname{sen} \theta} \cdot \left(\operatorname{sen} \theta \, \hat{\boldsymbol{\phi}}\right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \cdot \left(\cos \theta \, \hat{\boldsymbol{\phi}}\right) \frac{\partial}{\partial \theta}$$
$$+ \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \cdot \left(\operatorname{sen} \theta \, \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \, \hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \frac{\partial}{\partial \phi}$$

ou então,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \left[\operatorname{sen} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right] + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

e finalmente,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \qquad \text{(B.20)}$$

que é o operador Laplaciano em esféricas. Quando aplicamos ∇^2 a uma função, obtemos

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}$$

B.4 Exercícios

B.1 Calcule o gradiente e o Laplaciano das funções abaixo.

a)

$$f(x, y, z) = 2xy + 3\sqrt{y} z^2$$

b)

$$f(x, y, z) = y^3 \operatorname{sen} xz + \ln 2y^3 z$$

c)

$$f(\rho,\theta,z)=\frac{\rho\cos\theta}{z}$$

d)

$$f(\rho,\theta,z)=\frac{\theta z}{\rho^2}$$

e)

$$f(r,\theta,\phi)=r\,\mathrm{sen}\,2\theta\cos\phi+r^2\,\mathrm{sen}\,2\theta\,\mathrm{tg}\,\phi$$

f)

$$f(r,\theta,\phi)=r^3\ln(\theta\cos\phi)$$

B.2 Calcule o divergente e o rotacional das funções abaixo.

a)

$$\vec{f}(x,y,z)=4xyz\,\hat{\mathbf{i}}-\frac{3z^2}{y}\,\hat{\mathbf{j}}+\cos x\,\hat{\mathbf{k}}$$

b)

$$\vec{f}(x,y,z)=y^5\ln xz\,\hat{\mathbf{i}}-\mathrm{tgh}\,2y^3z\,\hat{\mathbf{j}}+e^{x^2yz}\,\hat{\mathbf{k}}$$

c)

$$\vec{f}(\rho,\theta,z)=\frac{\rho}{z}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}+\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}-\rho z\,\hat{\mathbf{k}}$$

d)

$$\vec{f}(\rho,\theta,z)=\rho^2\theta z\,\hat{\boldsymbol{\rho}}+\frac{z}{\mathrm{tg}\,\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}+2\rho z\cosh 2\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$

e)

$$\vec{f}(r,\theta,\phi)=r\,\mathrm{sen}\,2\theta\,\hat{\mathbf{r}}+r\,\mathrm{sen}^2\,2\theta\,\mathrm{tg}\,\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}}-\frac{\phi}{r\cos\theta}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

f)

$$\vec{f}(r,\theta,\phi)=\frac{r^3}{\ln(\theta\cos\phi)}\,\hat{\mathbf{r}}+2r\arccos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Apêndice C

Equação, Polinômios e Séries de Legendre

Neste apêndice, vamos resolver a equação diferencial de Legendre 6.58 e a equação generalizada de Legendre 6.57, obter os polinômios de Legendre e os polinômios generalizados de Legendre, verificar propriedades da série de Legendre e apresentar os harmônicos esféricos.

C.1 Resolução da Equação de Legendre

A equação de Legendre é dada pela expressão 6.58, isto é,

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+\ell(\ell+1)\Theta=0 \tag{C.1}$$

Esta equação é obtida da equação generalizada de Legendre 6.57,

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0 \tag{C.2}$$

quando $m=0$. As duas equações apareceram quando resolvemos a equação de Laplace em coordenadas esféricas. Vimos então que elas estão associadas à variável θ, já que $x=\cos\theta$. Como $0\leq\theta\leq\pi$, o intervalo para x é $-1\leq x\leq 1$.

A equação de Legendre 6.58 ou C.1 pode ser reescrita como

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} - \frac{2x}{(1-x^2)}\frac{d\Theta}{dx} + \frac{\ell(\ell+1)}{(1-x^2)}\Theta = 0$$

Esta equação precisa ser resolvida mediante o método de séries [1]. Ela tem um ponto singular em $x = \pm 1$, pois estes dois valores são zeros do denominador. Isto significa que, se quisermos encontrar a solução em torno desses valores, precisamos utilizar o método de Fröbenius. No entanto, podemos obter a solução em torno de outro ponto, como $x = 0$, e neste caso, como se trata de um ponto ordinário (não é raiz do denominador), devemos utilizar o método normal de séries, que consiste em supor que a solução da equação diferencial é a série de potências

$$\Theta(x) = P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{C.3}$$

Se a solução é dada pela equação acima, ela resolve a equação diferencial, e quando a substituirmos, e também suas derivadas, na expressão C.1, obteremos uma igualdade que nos permitirá encontrar os coeficientes a_n da série C.3. Vejamos então as derivadas da série,

$$\frac{d\Theta(x)}{dx} = \frac{dP}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{C.4}$$

e

$$\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2} = \frac{d^2P}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{C.5}$$

Note que, ao derivarmos uma série de potências normal, o índice inferior da somatória aumenta de um. Substituindo as expressões C.3, C.4 e C.5 em C.1, obtemos

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \ell(\ell+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

ou

[1] Veja *Equações Diferenciais Aplicadas à Física*, para uma discussão detalhada a respeito do método de séries.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$
$$- 2\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + \ell(\ell+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

ou ainda,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n}$$
$$- 2\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + \ell(\ell+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Para podermos continuar, devemos ter todas as séries na mesma potência de x. Escolhendo x^n como potência de interesse, já que três das séries estão com este fator, percebemos que a primeira precisa ser reescrita, pois nela aparece o termo x^{n-2}. Para fazer isso, definimos $m = n - 2$ ou $n = m + 2$, e assim,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2}x^m$$

Agora, como n e m indicam apenas a faixa de valores sobre os quais a soma é feita, elas são variáveis "mudas" e podem ser intercambiadas sem problema. Ficamos então com

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

e voltando à equação diferencial, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n}$$
$$- 2\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + \ell(\ell+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \text{(C.6)}$$

Todas as somatórias estão com a mesma potência de x, mas elas começam em valores diferentes de n, cujo valor comum tem início em $n = 2$. Vamos explicitar os termos com n menor do que este valor, ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = 2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n = 2a_1x + 2\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n$$

e

$$\ell(\ell+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = \ell(\ell+1)a_0 + \ell(\ell+1)a_1x + \ell(\ell+1)\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$$

Voltando à expressão C.6, encontramos

$$2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n - 2a_1x$$
$$- 2\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n + \ell(\ell+1)a_0 + \ell(\ell+1)a_1x + \ell(\ell+1)\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n = 0$$

Agora, reunimos os termos com a mesma potência de x^n, isto é,

$$\big[2a_2 + \ell(\ell+1)a_0\big] + \big[6a_3 - 2a_1 + \ell(\ell+1)a_1\big]x$$
$$+ \sum_{n\,=\,2}^{\infty}\Big\{(n+2)(n+1)a_{n+2} + \big[\ell(\ell+1) - n(n-1) - 2n\big]a_n\Big\}x^n = 0$$

ou

$$\big[2a_2 + \ell(\ell+1)a_0\big] + \big[6a_3 - 2a_1 + \ell(\ell+1)a_1\big]x$$
$$+ \sum_{n\,=\,2}^{\infty}\Big\{(n+2)(n+1)a_{n+2} + \big[\ell(\ell+1) - n(n+1)\big]a_n\Big\}x^n = 0$$

Temos uma igualdade de polinômios que fornece as seguintes equações:

$$2a_2 + \ell(\ell+1)a_0 = 0 \tag{C.7a}$$
$$6a_3 + \big[\ell(\ell+1) - 2\big]a_1 = 0 \tag{C.7b}$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + \big[\ell(\ell+1) - n(n+1)\big]a_n = 0 \tag{C.7c}$$

A expressão C.7a nos diz que

$$2a_2 + \ell(\ell+1)a_0 = 0$$
$$a_2 = -\frac{\ell(\ell+1)a_0}{2}$$

A equação C.7b resulta em

$$6a_3 + \big[\ell(\ell+1) - 2\big]a_1 = 0$$
$$a_3 = \frac{\big[2 - \ell(\ell+1)\big]a_1}{6}$$

Por fim, da expressão C.7c, obtemos

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + \big[\ell(\ell+1) - n(n+1)\big]a_n = 0$$

ou

$$a_{n+2} = \frac{\big[n(n+1) - \ell(\ell+1)\big]a_n}{(n+2)(n+1)}, \qquad n \geq 0 \tag{C.8}$$

Esta equação nos permite encontrar a_{n+2} se soubermos quanto vale a_n. Por isso, ela é chamada de *relação de recorrência.*

Vejamos agora se a série definida pelos coeficientes a_n acima é convergente. Se ela não for, não é uma solução aceitável fisicamente para uma função cujo objetivo é representar um potencial elétrico. Um modo para verificar isso é o *teste da razão*, isto é, se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

a série converge quando $L < 1$, diverge para $L > 1$, e nada se pode afirmar quando $L = 1$. Utilizando a relação de recorrência C.8, achamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\big[n(n+1) - \ell(\ell+1)\big]}{(n+2)(n+1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\big[n^2 + n - \ell(\ell+1)\big]}{n^2 + 3n + 2}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = 1$$

Como o limite vale 1, o teste da razão não é suficiente para determinar se a série converge ou não. No entanto, o teste da razão nos diz que, quando n é

grande, o coeficiente a_{n+2} torna-se igual ao coeficiente a_n, pois a razão entre eles vale 1, ou seja,

$$a_{n+2} \simeq a_n, \qquad n \to \infty$$

Portanto, a solução em série C.3 pode ser escrita, considerando um N suficientemente grande para validar a condição estabelecida pela equação acima, como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + a_{N+1} x^{N+1} + a_{N+1} x^{N+2} + a_{N+1} x^{N+3} + \cdots$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + a_{N+1} x^{N+1} \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + a_{N+1} x^{N+1} \sum_{m=0}^{\infty} x^m$$

A segunda somatória é uma série geométrica infinita, e a primeira, uma série de potências finita. Séries finitas sempre convergem [2], e assim, se a segunda converge, converge também a série C.3, e se a segunda diverge, diverge também a solução.

Como $x = \cos\theta$, estamos limitados ao intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Quando $|x| < 1$, a série geométrica converge, e ela possui uma soma dada pela expressão 2.35. Se $x = 1$, o que corresponde a $\theta = 0$, a série torna-se uma somatória infinita de números 1, resultando num valor infinito, e assim, em $x = 1$ ela diverge, e diverge também a própria solução. Isso não é permitido fisicamente, pois queremos soluções que sejam finitas. Então, em $x = 1$ temos um problema. Além disso, em $x = -1$ temos outro problema. Neste caso, a série torna-se $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Se o infinito for "par", a soma resulta no número zero, já que cada termo $+1$ é cancelado por um -1. Todavia, se o infinito for "ímpar", resta um número $+1$, e a soma resulta em $+1$. Isso significa que a soma da série não possui um valor definido e que, portanto, a série também diverge para $x = -1$, que corresponde a $\theta = \pi$. A conclusão é que, se a série C.3 é infinita, ela diverge para $x = \pm 1$, o que não pode ocorrer, pois as soluções devem ser finitas. Portanto, esta solução em série deve ser finita, e essa condição é satisfeita se a relação de recorrência C.8 se anular

[2] A menos que $x \to \infty$, obviamente, o que não é o caso, já que $-1 \leq x \leq 1$.

para algum valor de n. Para que isso ocorra, como n é um número natural, ℓ também deve ser um número natural, de modo que, quando $n = \ell$, a série pára, porque neste caso a relação de recorrência fornece

$$a_{\ell+2} = \frac{\left[\ell(\ell+1) - \ell(\ell+1)\right] a_\ell}{(\ell+2)(\ell+1)} = 0$$

e a partir daí, todos os outros termos da série são nulos. Note que, como a relação de recorrência relaciona a_{n+2} com a_n, e como ℓ tem um valor fixo, sendo ℓ par, é preciso fazer $a_1 = 0$. Caso contrário, a série com n par, no caso de ℓ ser par, termina, mas não a série com n ímpar, que começa com a_1. Se a série com n ímpar não termina, ela é infinita e diverge, o que não pode ocorrer. Se ℓ é ímpar, então, necessariamente, $a_0 = 0$, de modo que a série com n par seja nula e a série com n ímpar pare quando $n = \ell$. Podemos agora explicitar algumas dessas soluções.

Quando $\ell = 0$, temos, pela relação de recorrência, que começa com $n = 0$,

$$\begin{aligned} a_{0+2} &= \frac{\left[0(0+1) - 0(0+1)\right] a_0}{(0+2)(0+1)} \\ a_2 &= 0 \end{aligned}$$

Como ℓ é par, $a_1 = 0$. Se não fosse, então encontraríamos um a_3, dado por

$$\begin{aligned} a_{1+2} &= \frac{\left[1(1+1) - 0(0+1)\right] a_1}{(1+2)(1+1)} \\ a_3 &= \frac{2a_1}{6} \\ a_3 &= \frac{a_1}{3} \end{aligned}$$

Depois, acharíamos um a_5, um a_7 e assim sucessivamente, e a série seria infinita, o que não deve ocorrer. Portanto, $a_1 = 0$.

Como $a_2 = 0$, a série C.3 tem apenas o termo a_0, ou seja,

$$\Theta_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0$$

Se $\ell = 1$, o termo a_0 é nulo para que a série de n par se anule. A relação de recorrência começa de $n = 1$, e obtemos

$$a_{1+2} = \frac{\left[1(1+1) - 1(1+1)\right]a_1}{(1+2)(1+1)}$$
$$a_3 = 0$$

e assim,

$$\Theta_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_1 x$$

Quando $\ell = 2$, $a_1 = 0$, e a relação de recorrência nos fornece

$$a_{0+2} = \frac{\left[0(0+1) - 2(2+1)\right]a_0}{(0+2)(0+1)}$$
$$a_2 = \frac{-6a_0}{2}$$
$$a_2 = -3a_0$$

e então,

$$\begin{aligned}\Theta_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_0 + a_2 x^2 \\ &= a_0 - 3a_0 x^2 \\ \Theta_2(x) &= \left(1 - 3x^2\right)a_0\end{aligned}$$

Para $\ell = 3$, $a_0 = 0$, de modo que obtemos

$$a_{1+2} = \frac{\left[1(1+1) - 3(3+1)\right]a_1}{(1+2)(1+1)}$$
$$a_3 = \frac{-10a_1}{6}$$
$$a_2 = -\frac{5a_1}{3}$$

e a solução C.3 fica

$$\Theta_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Theta_3(x) = a_1 + a_3x^3$$
$$\Theta_3(x) = a_1 - \frac{5a_1}{3}x^3$$
$$\Theta_3(x) = \left(1 - \frac{5}{3}x^3\right)a_1$$

Continuando com o processo, vemos que as soluções para $\Theta(x)$ são polinômios. É usual normalizar esses polinômios, para que eles tenham valor unitário quando $x = 1$. Assim, obtemos os *polinômios de Legendre* $P_\ell(x)$, alguns dos quais estão apresentados na tabela 6.2, reproduzida abaixo.

ℓ	$P_\ell(x)$	$P_\ell(\cos\theta)$
0	1	1
1	x	$\cos\theta$
2	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$	$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$	$\frac{1}{2}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$	$\frac{1}{8}(35\cos^4\theta-30\cos^2\theta+3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$	$\frac{1}{8}(63\cos^5\theta-70\cos^3\theta+15\cos\theta)$

Tabela C.1: Reprodução da tabela 6.2 para os polinômios de Legendre P_ℓ, em função de x e de $\cos\theta$.

Observe que os polinômios de Legendre são funções pares se ℓ é par, e ímpares se ℓ é ímpar. Eles podem ser escritos de uma forma mais compacta mediante a *fórmula de Rodrigues* para os polinômios de Legendre. Esta equação é

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell \tag{C.9}$$

e a verificação para os polinômios da tabela C.1 fica como exercício (veja o exercício C.1). Desta relação, é possível deduzir algumas outras, utilizando também a equação diferencial de Legendre C.1. As principais são

$$\frac{dP_{\ell+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{\ell-1}(x)}{dx} - (2\ell+1)P_\ell(x) = 0 \tag{C.10a}$$

$$(\ell+1)P_{\ell+1}(x) - (2\ell+1)xP_\ell(x) + \ell P_{\ell-1}(x) = 0 \tag{C.10b}$$

$$\frac{dP_{\ell+1}(x)}{dx} - x\frac{dP_\ell(x)}{dx} - (\ell+1)P_\ell = 0 \tag{C.10c}$$

$$\left(x^2-1\right)\frac{dP_\ell(x)}{dx} - \ell xP_\ell(x) + \ell P_{\ell-1}(x) = 0 \tag{C.10d}$$

A primeira dessas relações pode ser provada através da fórmula de Rodrigues C.9. As outras são verificadas nos exercícios (veja o exercício C.2).

Demonstração. A fórmula de Rodrigues para os polinômios de Legendre é

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell$$

Aplicando esta expressão para $\ell+1$, obtemos

$$P_{\ell+1}(x) = \frac{1}{2^{\ell+1}(\ell+1)!}\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\left(x^2-1\right)^{\ell+1}$$

Vamos calcular agora a derivada desta equação, ou seja,

$$\frac{dP_{\ell+1}(x)}{dx} = \frac{1}{2^{\ell+1}(\ell+1)!}\frac{d^{\ell+2}}{dx^{\ell+2}}\left(x^2-1\right)^{\ell+1}$$

que fica

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{\ell+1}(x)}{dx} &= \frac{1}{2^{\ell+1}(\ell+1)!}\frac{d^{\ell+2}}{dx^{\ell+2}}\left(x^2-1\right)^{\ell+1} \\
&= \frac{1}{2^{\ell+1}(\ell+1)!}\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\left[2x(\ell+1)\left(x^2-1\right)^\ell\right] \\
&= \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\left[x\left(x^2-1\right)^\ell\right] \\
&= \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[\left(x^2-1\right)^\ell + 2x^2\left(x^2-1\right)^{\ell-1}\right] \\
\frac{dP_{\ell+1}(x)}{dx} &= \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell + \frac{1}{2^{\ell-1}(\ell-1)!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[x^2\left(x^2-1\right)^{\ell-1}\right]
\end{aligned}$$

ou

$$\frac{dP_{\ell+1}(x)}{dx} = P_\ell(x) + \frac{1}{2^{\ell-1}(\ell-1)!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[x^2\left(x^2-1\right)^{\ell-1}\right]$$

O polinômio, com $\ell = \ell - 1$, é

$$P_{\ell-1}(x) = \frac{1}{2^{\ell-1}(\ell-1)!}\frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}\left(x^2-1\right)^{\ell-1}$$

e sua derivada torna-se

$$\frac{dP_{\ell-1}(x)}{dx} = \frac{1}{2^{\ell-1}(\ell-1)!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^{\ell-1}$$

Vamos calcular agora

$$\frac{dP_{\ell+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{\ell-1}(x)}{dx} = P_\ell(x) + \frac{1}{2^{\ell-1}(\ell-1)!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[x^2\left(x^2-1\right)^{\ell-1}\right] - \frac{1}{2^{\ell-1}(\ell-1)!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^{\ell-1}$$

ou

$$\frac{dP_{\ell+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{\ell-1}(x)}{dx} = P_\ell(x) + \frac{1}{2^{\ell-1}(\ell-1)!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[x^2\left(x^2-1\right)^{\ell-1} - \left(x^2-1\right)^{\ell-1}\right]$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\frac{dP_{\ell+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{\ell-1}(x)}{dx} &= P_\ell(x) + \frac{1}{2^{\ell-1}(\ell-1)!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[\left(x^2-1\right)^{\ell-1}\left(x^2-1\right)\right]\\ &= P_\ell(x) + \frac{2\ell}{2\ell}\frac{1}{2^{\ell-1}(\ell-1)!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell\\ &= P_\ell(x) + \frac{2\ell}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell\\ \frac{dP_{\ell+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{\ell-1}(x)}{dx} &= P_\ell(x) + 2\ell P_\ell(x)\end{aligned}$$

e então,

$$\frac{dP_{\ell+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{\ell-1}(x)}{dx} = (2\ell+1)P_\ell(x)$$

que é a equação C.10a.

□

A partir das relações C.9 e C.10, além da própria equação de Legendre C.1, podemos mostrar que os polinômios de Legendre $P_\ell(x)$ são ortogonais entre si, o que é muito importante, porque isso permite que uma função qualquer, no intervalo $-1 \leq x \leq 1$, possa ser expandida em termos de uma série em polinômios de Legendre. Vamos inicialmente provar que os polinômios são ortogonais. Para isso, reescrevemos a equação de Legendre C.1 como

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2P_\ell(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_\ell(x)}{dx} + \ell(\ell+1)P_\ell(x) = 0$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP_\ell(x)}{dx}\right] + \ell(\ell+1)P_\ell(x) = 0$$

Agora, multiplicamos esta última expressão por $P_{\ell'}(x)$ e a integramos sobre os valores possíveis de x, ou seja, no intervalo $[-1,1]$, o que resulta em

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell'}(x)\left\{\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP_\ell(x)}{dx}\right] + \ell(\ell+1)P_\ell(x)\right\}dx = 0$$

ou

$$\int_{-1}^{1}\left\{P_{\ell'}\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP_\ell}{dx}\right] + \ell(\ell+1)P_\ell P_{\ell'}\right\}dx = 0$$

O primeiro termo na integral pode ser integrado por partes se definirmos

$$u = P_{\ell'} \Rightarrow du = \frac{dP_{\ell'}}{dx}\,dx$$
$$dv = \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP_\ell}{dx}\right]dx \Rightarrow v = \left(1-x^2\right)\frac{dP_\ell}{dx}$$

A integral por partes fica

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell'}\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP_\ell}{dx}\right]dx =$$
$$\left[P_{\ell'}\left(1-x^2\right)\frac{dP_\ell}{dx}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\frac{dP_\ell}{dx}\frac{dP_{\ell'}}{dx}\,dx$$

O termo entre colchetes se anula nos extremos de integração, e assim,

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell'} \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_\ell}{dx}\right] dx = \int_{-1}^{1} (x^2-1)\frac{dP_\ell}{dx}\frac{dP_{\ell'}}{dx}\, dx$$

Voltando à integral inicial, obtemos

$$\int_{-1}^{1} \left[(x^2-1)\frac{dP_\ell}{dx}\frac{dP_{\ell'}}{dx} + \ell(\ell+1)P_\ell P_{\ell'}\right] dx = 0$$

Agora, reescrevemos esta expressão permutando ℓ com ℓ', ou seja,

$$\int_{-1}^{1} \left[(x^2-1)\frac{dP_{\ell'}}{dx}\frac{dP_\ell}{dx} + \ell'(\ell'+1)P_{\ell'} P_\ell\right] dx = 0$$

Por fim, subtraímos esta equação da penúltima, isto é,

$$\int_{-1}^{1} \left[(x^2-1)\frac{dP_\ell}{dx}\frac{dP_{\ell'}}{dx} + \ell(\ell+1)P_\ell P_{\ell'}\right] dx - \int_{-1}^{1} \left[(x^2-1)\frac{dP_{\ell'}}{dx}\frac{dP_\ell}{dx} + \ell'(\ell'+1)P_{\ell'} P_\ell\right] dx = 0$$

Os termos envolvendo as derivadas são idênticos e se cancelam mutuamente. Os outros ficam

$$\int_{-1}^{1} \left[\ell(\ell+1)P_\ell P_{\ell'} - \ell'(\ell'+1)P_{\ell'} P_\ell\right] dx = 0$$

ou

$$\left[\ell(\ell+1) - \ell'(\ell'+1)\right] \int_{-1}^{1} P_\ell P_{\ell'}\, dx = 0$$

Desta expressão, vemos que, se $\ell \neq \ell'$, o termo entre colchetes não é nulo, e assim, a integral deve ser nula. Quando $\ell = \ell'$, a integral possui um valor não-nulo, porque é o termo entre colchetes que se anula. Para determinar o valor da integral, utilizamos a fórmula de Rodrigues C.9 e substituímos os polinômios, o que resulta em

$$\int_{-1}^{1} P_\ell P_\ell\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell\, dx$$

$$\int_{-1}^{1} [P_\ell]^2 \, dx = \frac{1}{2^{2\ell}(\ell!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell \frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell dx$$

Vamos integrar por partes a equação acima, definindo

$$u = \frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell \Rightarrow du = \frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\left(x^2-1\right)^\ell dx$$
$$dv = \frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell dx \Rightarrow v = \frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}\left(x^2-1\right)^\ell$$

Com estas definições, obtemos

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell \frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell dx =$$
$$\left[\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell \frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}\left(x^2-1\right)^\ell\right]_{-1}^{1}$$
$$- \int_{-1}^{1} \frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}\left(x^2-1\right)^\ell \frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\left(x^2-1\right)^\ell dx$$

Cada vez que o termo $\left(x^2-1\right)^\ell$ é derivado, permanece um fator $\left(x^2-1\right)$, que se anula em $x = \pm 1$. Assim, o termo entre colchetes na expressão acima se anula, e então,

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell \frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell dx = - \int_{-1}^{1} \frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}\left(x^2-1\right)^\ell \frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\left(x^2-1\right)^\ell dx$$

Para integrar esta equação por partes mais um vez, definimos

$$u = \frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\left(x^2-1\right)^\ell \Rightarrow du = \frac{d^{\ell+2}}{dx^{\ell+2}}\left(x^2-1\right)^\ell dx$$
$$dv = \frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}\left(x^2-1\right)^\ell dx \Rightarrow v = \frac{d^{\ell-2}}{dx^{\ell-2}}\left(x^2-1\right)^\ell$$

Achamos, portanto,

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}\left(x^2-1\right)^\ell \frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\left(x^2-1\right)^\ell dx =$$
$$\left[\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\left(x^2-1\right)^\ell \frac{d^{\ell-2}}{dx^{\ell-2}}\left(x^2-1\right)^\ell\right]_{-1}^{1}$$
$$- \int_{-1}^{1} \frac{d^{\ell-2}}{dx^{\ell-2}}\left(x^2-1\right)^\ell \frac{d^{\ell+2}}{dx^{\ell+2}}\left(x^2-1\right)^\ell dx$$

Como antes, o termo entre colchetes se anula, e encontramos

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}\left(x^2-1\right)^{\ell} \frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\left(x^2-1\right)^{\ell} dx = - \int_{-1}^{1} \frac{d^{\ell-2}}{dx^{\ell-2}}\left(x^2-1\right)^{\ell} \frac{d^{\ell+2}}{dx^{\ell+2}}\left(x^2-1\right)^{\ell} dx$$

Reunindo esta equação com a primeira expressão, obtemos

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}}\left(x^2-1\right)^{\ell} \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}}\left(x^2-1\right)^{\ell} dx = - \left[- \int_{-1}^{1} \frac{d^{\ell-2}}{dx^{\ell-2}}\left(x^2-1\right)^{\ell} \frac{d^{\ell+2}}{dx^{\ell+2}}\left(x^2-1\right)^{\ell} dx\right]$$

ou

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}}\left(x^2-1\right)^{\ell} \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}}\left(x^2-1\right)^{\ell} dx = (-1)^2 \int_{-1}^{1} \frac{d^{\ell-2}}{dx^{\ell-2}}\left(x^2-1\right)^{\ell} \frac{d^{\ell+2}}{dx^{\ell+2}}\left(x^2-1\right)^{\ell} dx$$

Integrando-a por partes mais $\ell - 2$ vezes, observamos que, no produto de derivadas, a ordem da primeira derivada diminui, chegando até a ordem zero, enquanto a segunda aumenta, chegando até a ordem 2ℓ. Assim, a integral inicial torna-se

$$\int_{-1}^{1} \left[P_\ell\right]^2 dx = \frac{(-1)^{\ell}}{2^{2\ell}(\ell!)^2} \int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^{\ell} \frac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}}\left(x^2-1\right)^{\ell} dx$$

Agora, vemos que o polinômio $\left(x^2-1\right)^{\ell}$ é de grau 2ℓ. Quando ele é derivado 2ℓ vezes, o resultado é a constante $(2\ell)!$, o que é fácil de compreender. Vamos escrever este polinômio do seguinte modo:

$$\left(x^2-1\right)^{\ell} = x^{2\ell} + a_1 x^{2\ell-1} + \cdots + a_{2\ell-2}x^2 + a_{2\ell-1}x + (-1)^{\ell}$$

Os valores exatos dos coeficientes numéricos a_n podem ser obtidos mediante o binômio de Newton, mas eles não são relevantes para a discussão atual. O importante é considerar que, quando derivamos esse polinômio, o seu grau diminui em uma unidade para cada derivada feita, de modo que, efetuadas 2ℓ derivadas, o polinômio torna-se uma constante, ou seja,

$$\begin{aligned}
\left(x^2-1\right)^\ell &= x^{2\ell}+a_1x^{2\ell-1}+\cdots+a_{2\ell-2}x^2+a_{2\ell-1}x+(-1)^\ell\\
\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)^\ell &= 2\ell x^{2l-1}+(2l-1)a_1x^{2l-2}+\cdots+2a_{2\ell-2}x+a_{2\ell-1}\\
\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2-1\right)^\ell &= 2\ell(2\ell-1)x^{2\ell-2}+(2\ell-1)(2\ell-2)a_1x^{2\ell-3}+\cdots+2a_{2\ell-2}\\
\frac{d^3}{dx^3}\left(x^2-1\right)^\ell &= 2\ell(2\ell-1)(2\ell-2)x^{2\ell-3}+\cdots\\
\vdots &= \vdots\\
\frac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}}\left(x^2-1\right)^\ell &= (2\ell)!
\end{aligned}$$

Assim, a integral fica

$$\int_{-1}^{1}\left[P_\ell\right]^2 dx=\frac{(-1)^\ell(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^\ell\,dx$$

Além disso, podemos escrever o integrando como

$$\left(x^2-1\right)^\ell=\left[-\left(1-x^2\right)\right]^\ell=(-1)^\ell\left(1-x^2\right)^\ell$$

e então chamamos a integral acima de I_ℓ. Portanto,

$$I_\ell=\int_{-1}^{1}\left[P_\ell\right]^2 dx=\frac{(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^\ell\,dx \qquad \text{(C.11)}$$

Para realizar essa integral, escrevemos

$$\begin{aligned}
\left(1-x^2\right)^\ell &= \left(1-x^2\right)^{\ell-1}\left(1-x^2\right)\\
\left(1-x^2\right)^\ell &= \left(1-x^2\right)^{\ell-1}-x^2\left(1-x^2\right)^{\ell-1}
\end{aligned}$$

Todavia,

$$\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)^\ell=-2\ell x\left(1-x^2\right)^{\ell-1}$$

e o segundo termo da penúltima equação pode ser reescrito como

$$\left(1-x^2\right)^\ell=\left(1-x^2\right)^{\ell-1}+\frac{x}{2\ell}\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)^\ell$$

Então, a integral fica

$$I_\ell = \frac{(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{\ell-1} + \frac{x}{2\ell}\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)^{\ell} dx$$

ou

$$\begin{aligned}
I_\ell &= \frac{(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{\ell-1} dx + \frac{(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{x}{2\ell}\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)^{\ell} dx \\
&= \frac{(2\ell)(2\ell-1)\left[2(\ell-1)\right]!}{2^2 2^{2(\ell-1)}\left[\ell(\ell-1)!\right]^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{\ell-1} dx + \frac{(2\ell-1)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1} xd\left[\left(1-x^2\right)^{\ell}\right] \\
&= \frac{2\ell(2\ell-1)\left[2(\ell-1)\right]!}{4\ell^2 2^{2(\ell-1)}\left[(\ell-1)!\right]^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{\ell-1} dx + \frac{(2\ell-1)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1} xd\left[\left(1-x^2\right)^{\ell}\right] \\
I_\ell &= \frac{2\ell-1}{2\ell}I_{\ell-1} + \frac{(2\ell-1)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1} xd\left[\left(1-x^2\right)^{\ell}\right]
\end{aligned}$$

Note que, no último passo, utilizamos a expressão para $I_{\ell-1}$, que pode ser obtida da equação C.11 se substituirmos ℓ por $\ell-1$, ou seja,

$$I_{\ell-1} = \frac{\left[2(\ell-1)\right]!}{2^{2(\ell-1)}\left[(\ell-1)!\right]^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{\ell-1} dx$$

Por fim, a integral restante pode ser calculada por partes. Chamando

$$\begin{aligned}
u = x &\Rightarrow du = dx \\
dv = d\left[\left(1-x^2\right)^{\ell}\right] &\Rightarrow v = \left(1-x^2\right)^{\ell}
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
I_\ell &= \frac{2\ell-1}{2\ell}I_{\ell-1} + \frac{(2\ell-1)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1} xd\left[\left(1-x^2\right)^{\ell}\right] \\
&= \frac{2\ell-1}{2\ell}I_{\ell-1} + \frac{(2\ell-1)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\left[x\left(1-x^2\right)^{\ell}\right]_{-1}^{1} - \frac{(2\ell-1)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{\ell} dx \\
&= \frac{2\ell-1}{2\ell}I_{\ell-1} - \frac{2\ell(2\ell-1)!}{2\ell 2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{\ell} dx \\
&= \frac{2\ell-1}{2\ell}I_{\ell-1} - \frac{(2\ell)!}{2\ell 2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{\ell} dx \\
I_\ell &= \frac{2\ell-1}{2\ell}I_{\ell-1} - \frac{1}{2\ell}I_\ell
\end{aligned}$$

ou então, multiplicando a equação por 2ℓ e reunindo os termos semelhantes,

$$(2\ell+1)I_\ell = (2\ell-1)I_{\ell-1}$$

que pode ainda ser reescrita como

$$(2\ell+1)I_\ell = \big[2(\ell-1)+1\big]I_{\ell-1}$$

Observe que o produto $(2\ell+1)I_\ell$ é independente da escolha de ℓ. Portanto, podemos escolher o ℓ mais favorável, que é $\ell = 0$, para fazer a integral I_ℓ. Desse modo, utilizando a expressão C.11 e lembrando que $P_0(x) = 1$, encontramos

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-1}^{1} \big[P_0\big]^2\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} dx \\ &= \big[x\big]_{-1}^{1}\, dx \\ I_0 &= 2 \end{aligned}$$

Agora, temos que

$$(2\ell+1)I_\ell = (2.0+1)I_0 = 2$$

ou seja,

$$I_\ell = \frac{2}{2\ell+1}$$

ou então,

$$\int_{-1}^{1} \big[P_\ell(x)\big]^2\, dx = \frac{2}{2\ell+1} \tag{C.12}$$

Como a integral é nula se $\ell \neq \ell'$, podemos reescrever a expressão acima utilizando a função delta de Kronecker, que é

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

e então,

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_{\ell'}(x)\,dx = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'} \qquad \text{(C.13)}$$

Note que os polinômios de Legendre são funções ortogonais, mas não ortonormais, já que a integral do seu quadrado não vale um. Porém, definindo as funções

$$\mathcal{P}_\ell = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}}P_\ell(x)$$

vemos que agora essas funções são ortonormais, já que, partindo da expressão C.13, considerando o caso $\ell = \ell'$, encontramos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_\ell(x)\,dx &= \frac{2}{2\ell+1} \\
\frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_\ell(x)\,dx &= 1 \\
\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}}P_\ell(x)\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}}P_\ell(x)\,dx &= 1 \\
\int_{-1}^{1} \mathcal{P}_\ell(x)\mathcal{P}_\ell(x)\,dx &= 1
\end{aligned}$$

Como os polinômios de Legendre são ortogonais, podemos expandir uma função qualquer $f(x)$ em uma série de Legendre, que é o próximo assunto a ser tratado.

C.2 Série de Legendre

Uma função $f(x)$ qualquer, no intervalo $-1 \leq x \leq 1$, pode ser expandida em uma série de Legendre, na forma

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(x) \qquad \text{(C.14)}$$

Para obter os coeficientes A_ℓ, multiplicamos a equação acima por $P_{\ell'}(x)$ e a integramos no intervalo $x \in [-1, 1]$, isto é,

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_{\ell'}(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(x)P_{\ell'}(x)\,dx$$

A ordem em que a integração e a somatória são feitas pode ser invertida sem problemas e a constante A_ℓ pode sair do sinal de integração, de modo que

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_{\ell'}(x)\,dx = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell \int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_{\ell'}(x)\,dx$$

A integral é resolvida através da equação C.13, e ela fica

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_{\ell'}(x)\,dx = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$$

Quando a somatória é efetuada, todos os termos são nulos, em virtude da delta de Kronecker, exceto aquele que tem $\ell = \ell'$, ou seja,

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_{\ell'}(x)\,dx = A_{\ell'}\frac{2}{2\ell'+1}$$

e então, passando tudo para ℓ e isolando A_ℓ, ficamos com

$$A_\ell = \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_\ell(x)\,dx \tag{C.15}$$

que estabelece como calcular os coeficientes da expansão em série de Legendre de uma função $f(x)$ qualquer. Alguns exemplos de utilização desta série são vistos no exercício C.3. Agora vamos à resolução da equação diferencial generalizada de Legendre.

C.3 Resolução da Equação Generalizada de Legendre

A equação diferencial generalizada de Legendre, dada pelas equações 6.57 ou C.2, é

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0$$

Para iniciar sua resolução, definimos

$$P(x) = \Theta(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathbb{P}(x) \tag{C.16}$$

o que facilita os cálculos. Com esta substituição, temos

$$\frac{d\Theta}{dx} = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d\mathbb{P}}{dx} - mx\left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}-1} \mathbb{P} = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \left[\frac{d\mathbb{P}}{dx} - \frac{mx\mathbb{P}}{1 - x^2}\right]$$

e

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \left[\frac{d^2\mathbb{P}}{dx^2} - \frac{m\mathbb{P}}{1 - x^2} - \frac{mx}{1 - x^2}\frac{d\mathbb{P}}{dx} - \frac{2mx^2\mathbb{P}}{\left(1 - x^2\right)^2}\right] - mx\left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}-1} \left[\frac{d\mathbb{P}}{dx} - \frac{mx\mathbb{P}}{1 - x^2}\right]$$

ou

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \left[\frac{d^2\mathbb{P}}{dx^2} - \frac{2mx}{1 - x^2}\frac{d\mathbb{P}}{dx} - \frac{m\mathbb{P}}{1 - x^2} - \frac{2mx^2\mathbb{P}}{\left(1 - x^2\right)^2} + \frac{m^2x^2\mathbb{P}}{\left(1 - x^2\right)^2}\right]$$

Utilizando estas expressões na equação diferencial, obtemos

$$\left(1 - x^2\right)\left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \left[\frac{d^2\mathbb{P}}{dx^2} - \frac{2mx}{1 - x^2}\frac{d\mathbb{P}}{dx} - \frac{m\mathbb{P}}{1 - x^2} - \frac{2mx^2\mathbb{P}}{\left(1 - x^2\right)^2} + \frac{m^2x^2\mathbb{P}}{\left(1 - x^2\right)^2}\right] - 2x\left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \left[\frac{d\mathbb{P}}{dx} - \frac{mx\mathbb{P}}{1 - x^2}\right] + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2}\right]\left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathbb{P} = 0$$

ou

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^2\mathbb{P}}{dx^2} - 2mx\frac{d\mathbb{P}}{dx} - m\mathbb{P} - \frac{2mx^2\mathbb{P}}{1 - x^2} + \frac{m^2x^2\mathbb{P}}{1 - x^2} - 2x\frac{d\mathbb{P}}{dx} + \frac{2mx^2\mathbb{P}}{1 - x^2} + \ell(\ell + 1)\mathbb{P} - \frac{m^2\mathbb{P}}{1 - x^2} = 0$$

ou ainda,

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^2\mathbb{P}}{dx^2} - 2(m + 1)x\frac{d\mathbb{P}}{dx} + \left[\ell(\ell + 1) - m\right]\mathbb{P} - m^2\mathbb{P}\frac{1 - x^2}{1 - x^2} = 0$$

ou finalmente,

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2\mathbb{P}}{dx^2}-2(m+1)x\frac{d\mathbb{P}}{dx}+\left[\ell(\ell+1)-m(m+1)\right]\mathbb{P}=0 \qquad \text{(C.17)}$$

Esta expressão é uma equação diferencial para $\mathbb{P}$, e precisamos resolvê-la pelo método normal de séries, em torno de $x = 0$, que é um ponto ordinário, supondo que

$$\mathbb{P}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

As derivadas são

$$\frac{d\mathbb{P}}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$
$$\frac{d^2\mathbb{P}}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

Voltando agora à equação diferencial, temos

$$\left(1-x^2\right)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2(m+1)x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$
$$+\left[\ell(\ell+1)-m(m+1)\right]\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

ou

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n$$
$$-2(m+1)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\left[\ell(\ell+1)-m(m+1)\right]\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

Na primeira somatória, x aparece com o expoente $n-2$, ao passo que nas outras temos x^n. Precisamos transformar esta somatória para que também tenhamos x^n. Para fazer isso, definimos $m = n-2$ ou $n = m+2$, e assim,

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m$$

Agora, como n e m são índices "mudos", que apenas indicam o início e o fim da somatória, podemos intercambiá-los sem problema, ou seja,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

Voltando agora à equação inicial, encontramos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n \\ - 2(m+1)\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + \big[\ell(\ell+1) - m(m+1)\big]\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

As somatórias começam em valores diferentes de n, e a faixa comum ocorre para $n \geq 2$. Assim, explicitamos os termos com $n = 0$ e $n = 1$, isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$-2(m+1)\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n = -2(m+1)a_1 x - 2(m+1)\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$$

e

$$\big[\ell(\ell+1) - m(m+1)\big]\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \big[\ell(\ell+1) - m(m+1)\big]a_0 \\ + \big[\ell(\ell+1) - m(m+1)\big]a_1 x + \big[\ell(\ell+1) - m(m+1)\big]\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Reunindo tudo isso na equação inicial, obtemos

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n \\ - 2(m+1)a_1 x - 2(m+1)\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + \big[\ell(\ell+1) - m(m+1)\big]a_0 \\ + \big[\ell(\ell+1) - m(m+1)\big]a_1 x + \big[\ell(\ell+1) - m(m+1)\big]\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

ou

$$2a_2 + \big[\ell(\ell+1) - m(m+1)\big]a_0 + \Big\{6a_3 + \big[\ell(\ell+1) - m(m+1) - 2(m+1)\big]a_1\Big\}x + \sum_{n=2}^{\infty}\Big\{(n+2)(n+1)a_{n+2} + \big[\ell(\ell+1) - m(m+1) - n(n-1) - 2(m+1)n\big]a_n\Big\}x^n = 0$$

Mediante a igualdade de polinômios, encontramos as equações

$$2a_2 + \big[\ell(\ell+1) - m(m+1)\big]a_0 = 0$$
$$6a_3 + \big[\ell(\ell+1) - m(m+1) - 2(m+1)\big]a_1 = 0$$

e

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + \big[\ell(\ell+1) - m(m+1) - n(n-1) - 2(m+1)n\big]a_n = 0$$

ou seja,

$$2a_2 + \big[\ell(\ell+1) - m(m+1)\big]a_0 = 0$$
$$a_2 = \frac{m(m+1) - \ell(\ell+1)}{2}a_0 \tag{C.18}$$

$$6a_3 + \big[\ell(\ell+1) - m(m+1) - 2(m+1)\big]a_1 = 0$$
$$a_3 = \frac{(m+1)(m+2) - \ell(\ell+1)}{6}a_1 \tag{C.19}$$

e

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + \big[\ell(\ell+1) - m(m+1) - n(n-1) - 2(m+1)n\big]a_n = 0$$

ou

$$a_{n+2} = \frac{n(n-1) + (m+1)(m+2n) - \ell(\ell+1)}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad n \geq 0 \tag{C.20}$$

que é a relação de recorrência. Vamos efetuar o teste da razão.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n(n-1)+(m+1)(m+2n)-\ell(\ell+1)}{(n+2)(n+1)}a_n}{a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)+(m+1)(m+2n)-\ell(\ell+1)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2} \\
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n} &= 1
\end{aligned}
$$

Como ocorre no caso da equação de Legendre, o teste da razão, sozinho, não permite estabelecer a convergência da série. Todavia, utilizando os mesmos argumentos desenvolvidos quando resolvemos a equação de Legendre, podemos mostrar que, se $|x| < 1$, a série converge, mas ela diverge para $x = \pm 1$, a menos que seja finita, o que ocorre se, para algum $n = n_0$, $\ell = m + n_0$, pois, neste caso,

$$
\begin{aligned}
a_{n_0+2} &= \frac{n_0(n_0-1)+(m+1)(m+2n_0)-(m+n_0)(m+n_0+1)}{(n_0+2)(n_0+1)}a_{n_0} \\
&= \frac{n_0^2-n_0+m^2+m+2mn_0+2n_0-m^2-2mn_0-n_0^2-m-n_0}{(n_0+2)(n_0+1)}a_{n_0} \\
&= \frac{0}{(n_0+2)(n_0+1)}a_{n_0} \\
a_{n_0+2} &= 0
\end{aligned}
$$

e a partir daí, a série pára. Fisicamente, m precisa ser um número natural; n_0 indica um termo da série, e por causa disso, também é um número natural. Portanto, ℓ é um número natural como os anteriores, o que se verifica também no caso da equação de Legendre. Além disso, para um valor fixo de ℓ, m pode valer, no máximo, ℓ, e assim, $m = 0, 1, \ldots, \ell$. Vamos calcular alguns dos $\mathbb{P}(x)$ e $P(x)$, lembrando que

$$P(x) = \left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\mathbb{P}(x)$$

e

$$\mathbb{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

1. $\ell = 0$, $m = 0$

Neste caso, a relação de recorrência fica

$$a_{n+2} = \frac{n}{n+2} a_n$$

e como começamos com $n = 0$, temos

$$a_2 = 0.a_0 = 0$$

e assim sucessivamente. Todos os termos pares a partir de a_2 são nulos. Note que, para anular a série ímpar, é preciso fazer $a_1 = 0$, como ocorreu com os polinômios de Legendre. Assim, temos

$$\mathbb{P}_{0,0}(x) = a_0$$

e

$$P_{0,0}(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathbb{P}(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{0}{2}} a_0 = a_0 = P_0(x)$$

2. $\ell = 1$

Quando $\ell = 1$, temos duas possibilidades para m: $m = 0$ ou $m = 1$. Com relação a $m = 0$, $a_0 = 0$, de modo que a série par se anula. Temos

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - 2}{(n+2)(n+1)} a_n$$

e portanto, obtemos

$$a_{1+2} = \frac{1(1+1) - 2}{(1+2)(1+1)} a_1 = 0.a_1 = 0$$

e assim sucessivamente. Todos os outros a_n com n ímpar a partir de $n = 3$ são nulos. Desta forma,

$$\mathbb{P}_{1,0}(x) = a_1 x$$

e

$$P_{1,0}(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathbb{P}(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{0}{2}} a_1 x = a_1 x = P_1(x)$$

Quando $m = 1$, $a_1 = 0$, e a relação de recorrência fica

$$a_{n+2} = \frac{n(n+3)}{(n+2)(n+1)} a_n$$

e então,

$$a_{0+2} = \frac{0(0+3)}{(0+2)(0+1)} a_0 = 0$$

Portanto,

$$\mathbb{P}_{1,1}(x) = a_0$$

e

$$P_{1,1}(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}(x) = \sqrt{1 - x^2} a_0 = a_0 \sqrt{1 - x^2}$$

Continuando com este processo, vemos que as funções $P_{\ell,m}(x)$ acima estão relacionadas aos polinômios de Legendre $P_\ell(x)$, através da expressão

$$P_{\ell,m}(x) = (-1)^m \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x) \qquad \text{(C.21)}$$

e por causa disso, eles são chamados de *polinômios generalizados de Legendre*. Alguns desses polinômios estão na tabela 6.3, reproduzida abaixo. A verificação da equação C.21 para os polinômios apresentados nessa tabela é deixada como exercício (veja o exercício C.4).

Utilizando, na equação C.21, a fórmula de Rodrigues C.9 para os polinômios de Legendre, obtemos a fórmula de Rodrigues para os polinômios generalizados de Legendre, isto é,

$$P_{\ell,m}(x) = (-1)^m \frac{\left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}}}{2^\ell \ell!} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} \left(x^2 - 1\right)^\ell \qquad 0 \leq m \leq \ell \qquad \text{(C.22)}$$

É útil estender a definição dos polinômios generalizados de Legendre para m negativo, desde que $|m| \leq \ell$. Isto é feito através de

$$P_{\ell,-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_{\ell,m}(x) \qquad \text{(C.23)}$$

que vale para $0 \leq m \leq \ell$. Note que, como $P_{\ell,-m}$ e $P_{\ell,m}$ são múltiplos um do outro, eles não são ortogonais. No entanto, para um dado m fixo, com ℓ variando, os polinômios $P_{\ell,m}$ formam um conjunto ortogonal no índice ℓ, o que demonstramos em seguida.

Para provar a ortogonalidade dos $P_{\ell,m}$, procedemos da seguinte forma: primeiro, reescrevemos a equação generalizada de Legendre C.2 como

ℓ, m	$P_{\ell,m}(x)$	$P_{\ell,m}(\cos\theta)$
0,0	1	1
1,0	x	$\cos\theta$
1,1	$-\sqrt{1-x^2}$	$-\operatorname{sen}\theta$
1,-1	$\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$
2,0	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$	$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$
2,1	$-3x\sqrt{1-x^2}$	$-3\cos\theta\operatorname{sen}\theta$
2,-1	$\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\cos\theta\operatorname{sen}\theta$
2,2	$3(1-x^2)$	$3\operatorname{sen}^2\theta$
2,-2	$\frac{1}{8}(1-x^2)$	$\frac{1}{8}\operatorname{sen}^2\theta$

Tabela C.2: Reprodução da tabela 6.3 para os polinômios generalizados de Legendre.

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_{\ell,m}(x)}{dx}\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_{\ell,m} = 0$$

Agora, multiplicamos esta expressão por $P_{\ell',m}$ e a integramos no intervalo $[-1,1]$, ou seja,

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell',m}\left\{\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_{\ell,m}(x)}{dx}\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_{\ell,m}\right\}dx = 0$$

ou

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell',m}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_{\ell,m}(x)}{dx}\right]dx + \int_{-1}^{1}\left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_{\ell,m}P_{\ell',m}\,dx = 0$$

Resolvemos a primeira integral por partes, chamando

$$u = P_{\ell',m}(x) \Rightarrow du = \frac{dP_{\ell',m}(x)}{dx}\,dx$$
$$dv = \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP_{\ell,m}(x)}{dx}\right]dx \Rightarrow v = \left(1-x^2\right)\frac{dP_{\ell,m}(x)}{dx}$$

Com estas substituições, a integral fica

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell',m}\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP_{\ell,m}(x)}{dx}\right]dx = \left[P_{\ell',m}(x)\left(1-x^2\right)\frac{dP_{\ell,m}(x)}{dx}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\frac{dP_{\ell',m}(x)}{dx}\frac{dP_{\ell,m}(x)}{dx}\,dx$$

O termo entre colchetes é nulo, e assim,

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell',m}\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP_{\ell,m}(x)}{dx}\right]dx = \int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)\frac{dP_{\ell',m}(x)}{dx}\frac{dP_{\ell,m}(x)}{dx}\,dx$$

que, reunido com a outra integral, resulta em

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)\frac{dP_{\ell',m}(x)}{dx}\frac{dP_{\ell,m}(x)}{dx}\,dx + \int_{-1}^{1}\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_{\ell,m}P_{\ell',m}\,dx = 0$$

ou

$$\int_{-1}^{1}\left\{\left(x^2-1\right)\frac{dP_{\ell',m}(x)}{dx}\frac{dP_{\ell,m}(x)}{dx} + \left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_{\ell,m}P_{\ell',m}\right\}dx = 0$$

Em seguida, escrevemos esta mesma expressão, apenas trocando ℓ por ℓ', e vice-versa, de forma que

$$\int_{-1}^{1}\left\{(x^2-1)\frac{dP_{\ell,m}(x)}{dx}\frac{dP_{\ell',m}(x)}{dx}+\left[\ell'(\ell'+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_{\ell',m}P_{\ell,m}\right\}dx=0$$

e subtraímos uma da outra, o que resulta em

$$\int_{-1}^{1}\left\{(x^2-1)\frac{dP_{\ell',m}(x)}{dx}\frac{dP_{\ell,m}(x)}{dx}+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_{\ell,m}P_{\ell',m}\right\}dx-$$
$$\int_{-1}^{1}\left\{(x^2-1)\frac{dP_{\ell,m}(x)}{dx}\frac{dP_{\ell',m}(x)}{dx}+\left[\ell'(\ell'+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_{\ell',m}P_{\ell,m}\right\}dx=0$$

ou

$$\int_{-1}^{1}\left[\ell(\ell+1)-\ell'(\ell'+1)\right]P_{\ell,m}P_{\ell',m}\,dx=0$$

ou ainda,

$$\left[\ell(\ell+1)-\ell'(\ell'+1)\right]\int_{-1}^{1}P_{\ell,m}P_{\ell',m}\,dx=0$$

Quando $\ell \neq \ell'$, o termo entre colchetes não é nulo. Portanto, a integral deve se anular. Quando $\ell = \ell'$, o colchetes se anula, permitindo que a integral tenha um valor não-nulo. Vamos calcular este valor, utilizando a relação C.21 entre os polinômios de Legendre P_ℓ e os polinômios generalizados de Legendre $P_{\ell,m}$, que é

$$P_{\ell,m}(x)=(-1)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)$$

A integral que queremos calcular é

$$\int_{-1}^{1}P_{\ell,m}P_{\ell,m}\,dx=$$
$$\int_{-1}^{1}\left[(-1)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)\right]\left[(-1)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)\right]dx$$

ou

$$\int_{-1}^{1}P_{\ell,m}P_{\ell,m}\,dx=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m\frac{d^mP_\ell(x)}{dx^m}\frac{d^mP_\ell(x)}{dx^m}\,dx$$

Utilizamos uma integração por partes, definindo

$$u = \left(1 - x^2\right)^m \frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m} \Rightarrow du = \frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right)^m \frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m}\right] dx$$
$$dv = \frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m}\, dx \Rightarrow v = \frac{d^{m-1} P_\ell(x)}{dx^{m-1}}$$

e assim, temos

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell,m} P_{\ell,m}\, dx = \left[\left(1 - x^2\right)^m \frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m} \frac{d^{m-1} P_\ell(x)}{dx^{m-1}}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{m-1} P_\ell(x)}{dx^{m-1}} \frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right)^m \frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m}\right] dx$$

O termo entre colchetes se anula nos extremos, logo

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell,m} P_{\ell,m}\, dx = -\int_{-1}^{1} \frac{d^{m-1} P_\ell(x)}{dx^{m-1}} \frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right)^m \frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m}\right] dx \qquad \text{(C.24)}$$

Agora, precisamos fazer algumas manipulações. Temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right)^m \frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m}\right] = \left(1 - x^2\right)^m \frac{d^{m+1} P_\ell(x)}{dx^{m+1}} - 2mx\left(1 - x^2\right)^{m-1} \frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m}$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right)^m \frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m}\right] = \left(1 - x^2\right)^{m-1}\left[\left(1 - x^2\right) \frac{d^{m+1} P_\ell(x)}{dx^{m+1}} - 2mx \frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m}\right] \qquad \text{(C.25)}$$

Além disso, comparando as expressões C.16,

$$P_{\ell,m}(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathbb{P}_{\ell,m}(x)$$

e C.21,

$$P_{\ell,m}(x) = (-1)^m \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x)$$

vemos que

$$\mathbb{P}_{\ell,m}(x) = (-1)^m \frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m} \tag{C.26}$$

Outro fato importante é que $\mathbb{P}_{\ell,m}$ satisfaz a equação diferencial C.17,

$$(1-x^2)\frac{d^2\mathbb{P}_{\ell,m}}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{d\mathbb{P}_{\ell,m}}{dx} + \big[\ell(\ell+1) - m(m+1)\big]\mathbb{P}_{\ell,m} = 0$$

Escrevemos esta equação para $m = m-1$, ou seja,

$$(1-x^2)\frac{d^2\mathbb{P}_{\ell,m-1}}{dx^2} - 2mx\frac{d\mathbb{P}_{\ell,m-1}}{dx} + \big[\ell(\ell+1) - m(m-1)\big]\mathbb{P}_{\ell,m-1} = 0$$

e substituímos $\mathbb{P}_{\ell,m-1}$ pelo seu valor, através da equação C.26 para $m = m-1$, isto é,

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\left[(-1)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_\ell(x)}{dx^{m-1}}\right] - 2mx\frac{d}{dx}\left[(-1)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_\ell(x)}{dx^{m-1}}\right] + \big[\ell(\ell+1) - m(m-1)\big]\left[(-1)^m\frac{d^{m-1}P_\ell(x)}{dx^{m-1}}\right] = 0$$

ou

$$(1-x^2)\frac{d^{m+1}P_\ell(x)}{dx^{m+1}} - 2mx\frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m} + \big[\ell(\ell+1) - m(m-1)\big]\frac{d^{m-1}P_\ell(x)}{dx^{m-1}} = 0$$

ou ainda, já que

$$\begin{aligned}\ell(\ell+1) - m(m-1) &= \ell^2 + \ell - m^2 + m \\ &= (\ell-m)(\ell+m) + \ell + m \\ \ell(\ell+1) - m(m-1) &= (\ell+m)(\ell-m+1)\end{aligned}$$

temos

$$(1-x^2)\frac{d^{m+1}P_\ell(x)}{dx^{m+1}} - 2mx\frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m} = -(\ell+m)(\ell-m+1)\frac{d^{m-1}P_\ell(x)}{dx^{m-1}}$$

Agora, percebemos que este termo é idêntico àquele entre colchetes na expressão C.25, e assim, achamos

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m}\right] = -(\ell+m)(\ell-m+1)(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_\ell(x)}{dx^{m-1}}$$

e voltamos à integral C.24,

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell,m} P_{\ell,m}\, dx =$$
$$(\ell+m)(\ell-m+1)\int_{-1}^{1} \frac{d^{m-1}P_\ell(x)}{dx^{m-1}}\left(1-x^2\right)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_\ell(x)}{dx^{m-1}}\, dx$$

que pode ser escrita como

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell,m} P_{\ell,m}\, dx = (\ell+m)(\ell-m+1)\times$$
$$\int_{-1}^{1}\left[(-1)^{m-1}\left(1-x^2\right)^{\frac{m-1}{2}}\frac{d^{m-1}P_\ell(x)}{dx^{m-1}}\right]$$
$$\times\left[(-1)^{m-1}\left(1-x^2\right)^{\frac{m-1}{2}}\frac{d^{m-1}P_\ell(x)}{dx^{m-1}}\right] dx$$

ou, utilizando a relação C.21,

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell,m} P_{\ell,m}\, dx = (\ell+m)(\ell-m+1)\int_{-1}^{1} P_{\ell,m-1} P_{\ell,m-1}\, dx$$

Assim, temos uma relação de recorrência entre as duas integrais, que serve para reduzir a ordem de m, até chegar em $m = 0$. Vamos aplicar essa relação novamente para $m = m - 1$, isto é,

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell,m-1} P_{\ell,m-1}\, dx = (\ell+m-1)(\ell-m+2)\int_{-1}^{1} P_{\ell,m-2} P_{\ell,m-2}\, dx$$

Desse modo, obtemos

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell,m} P_{\ell,m}\, dx = (\ell+m)(\ell-m+1)\int_{-1}^{1} P_{\ell,m-1} P_{\ell,m-1}\, dx$$

ou

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell,m} P_{\ell,m}\, dx =$$
$$(\ell+m)(\ell-m+1)(\ell+m-1)(\ell-m+2)\int_{-1}^{1} P_{\ell,m-2} P_{\ell,m-2}\, dx$$

ou ainda,

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell,m}P_{\ell,m}\,dx =$$
$$\big[(\ell+m)(\ell+m-1)\big]\big[(\ell-m+1)(\ell-m+2)\big]\int_{-1}^{1} P_{\ell,m-2}P_{\ell,m-2}\,dx$$

Ao repetirmos este processo mais $m-2$ vezes, os polinômios na integral se tornam os polinômios de Legendre, pois $P_{\ell,0} = P_\ell(x)$. Além disso, os termos entre colchetes que multiplicam a integral se tornam

$$(\ell+m)(\ell+m-1)(\ell+m-2)\times\cdots\times(\ell+2)(\ell+1)$$

e

$$(\ell-m+1)(\ell-m+2)(\ell-m+3)\times\cdots\times(\ell-1)\ell \tag{C.27}$$

O primeiro desses termos pode ser reescrito como

$$(\ell+m)(\ell+m-1)\times\cdots\times(\ell+1) = (\ell+m)(\ell+m-1)\times\cdots\times(\ell+1)\frac{\ell!}{\ell!}$$
$$(\ell+m)(\ell+m-1)\times\cdots\times(\ell+1) = \frac{(\ell+m)!}{\ell!}$$

Multiplicado pela expressão C.27, este termo fica

$$\frac{(\ell+m)!}{\ell!}(\ell-m+1)(\ell-m+2)(\ell-m+3)\times\cdots\times(\ell-1)\ell$$

O termo $\ell!$ no denominador pode ser escrito como

$$\ell! = \ell(\ell-1)\times\cdots\times(\ell-m+3)(\ell-m+2)(\ell-m+1)(\ell-m)!$$

e assim, obtemos, para o fator que multiplica a integral,

$$\frac{(\ell+m)!}{\ell!}(\ell-m+1)(\ell-m+2)(\ell-m+3)\times\cdots\times(\ell-1)\ell =$$
$$\frac{(\ell+m)!(\ell-m+1)(\ell-m+2)(\ell-m+3)\times\cdots\times(\ell-1)\ell}{\ell(\ell-1)\times\cdots\times(\ell-m+3)(\ell-m+2)(\ell-m+1)(\ell-m)!}$$

ou

$$\frac{(\ell+m)!}{\ell!}(\ell-m+1)(\ell-m+2)(\ell-m+3)\times\cdots\times(\ell-1)\ell=\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}$$

Assim, temos

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell,m}P_{\ell,m}\,dx=\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_\ell(x)\,dx$$

A integral, que já foi resolvida, vale, segundo a equação C.13,

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_{\ell'}(x)\,dx=\frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$$

Portanto,

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell,m}P_{\ell,m}\,dx=\frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}$$

Lembrando que, quando $\ell\neq\ell'$ a integral se anula, podemos utilizar a função delta de Kronecker e indicar a ortogonalidade dos $P_{\ell,m}(x)$ como

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell',m'}(x)P_{\ell,m}(x)\,dx=\frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell,\ell'} \qquad \text{(C.28)}$$

Note que, a exemplo dos $P_\ell(x)$, os polinômios generalizados de Legendre são ortogonais entre si, mas não ortonormais. É possível definir uma série, utilizando os polinômios de Legendre, mas esta série não tem tanta utilidade quanto a série dos *harmônicos esféricos* $Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$, que é tratada em seguida.

C.4 Harmônicos Esféricos $Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$

Na solução de problemas envolvendo coordenadas esféricas, é muito comum aparecerem, ao mesmo tempo, os polinômios generalizados de Legendre $P_{\ell,m}(x)$ (lembrando que $x=\cos\theta$), como solução da parte em θ, e as funções $e^{im\phi}$, onde m é inteiro, que são as soluções da parte em ϕ. De fato, a necessidade de, nos polinômios $P_{\ell,m}$, m ser inteiro, vem da resolução da equação diferencial para a parte em ϕ, pois, durante esta resolução, a condição de unicidade do potencial elétrico com relação ao ângulo ϕ implica que m deve ser inteiro. As funções $e^{im\phi}$ são ortogonais entre si no intervalo $[0,2\pi]$, como demonstramos abaixo.

Demonstração. Para demonstrar a ortogonalidade das funções $e^{im\phi}$, devemos lembrar que elas são funções complexas. Assim, vamos considerar duas dessas funções, as que têm m e m', tomar o complexo conjugado de uma delas, multiplicá-las e integrá-las no intervalo $[0, 2\pi]$, isto é, vamos calcular

$$\int_0^{2\pi} e^{im\phi} e^{-im'\phi}\, d\phi$$

Esta expressão é bastante simples de resolver. Vejamos.

$$\int_0^{2\pi} e^{im\phi} e^{-im'\phi}\, d\phi = \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi}\, d\phi$$

Se $m \neq m'$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{im\phi} e^{-im'\phi}\, d\phi &= \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi}\, d\phi \\
&= \left[\frac{e^{i(m-m')\phi}}{i(m-m')}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{i(m-m')}\left[e^{i(m-m')\phi}\right]_0^{2\pi} \\
\int_0^{2\pi} e^{im\phi} e^{-im'\phi}\, d\phi &= \frac{1}{i(m-m')}\left[e^{i(m-m')2\pi} - 1\right]
\end{aligned}$$

Como m e m' são inteiros, sua diferença também o é, e podemos definir $n = m - m'$. Como

$$e^{in2\pi} = \cos 2n\pi + i \operatorname{sen} 2n\pi = 1$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{im\phi} e^{-im'\phi}\, d\phi &= \frac{1}{in}[1 - 1] \\
\int_0^{2\pi} e^{im\phi} e^{-im'\phi}\, d\phi &= 0
\end{aligned}$$

Quando $m = m'$, a integral inicial fica

$$\int_0^{2\pi} e^{im\phi} e^{-im\phi}\, d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\int_0^{2\pi} e^{im\phi}e^{-im\phi}\,d\phi = [\phi]_0^{2\pi}$$
$$\int_0^{2\pi} e^{im\phi}e^{-im\phi}\,d\phi = 2\pi$$

Lembrando que, quando $m \neq m'$ a integral se anula, por meio de funções delta de Kronecker podemos escrever

$$\int_0^{2\pi} e^{im\phi}e^{-im'\phi}\,d\phi = 2\pi\delta_{m,m'} \qquad \text{(C.29)}$$

Observe que as funções $e^{im\phi}$ são ortogonais mas não ortonormais, assim como os polinômios de Legendre $P_\ell(x)$ e $P_{\ell,m}(x)$.

□

Os polinômios generalizados de Legendre $P_{\ell,m}(x)$ e as funções $e^{im\phi}$, nas soluções dos problemas em coordenadas esféricas, sempre aparecem multiplicados, formando fatores do tipo $P_{\ell,m}(\cos\theta)e^{im\phi}$. Por causa disso, estes produtos são definidos como funções especiais, chamadas de harmônicos esféricos $Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$, segundo a equação 6.78, que é

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_{\ell,m}(\cos\theta)e^{im\phi} \qquad \text{(C.30)}$$

O fator multiplicativo nesta expressão é escolhido de modo a fazer com que os harmônicos esféricos sejam funções ortonormais, não apenas ortogonais. Vamos conferir esta afirmativa, considerando dois harmônicos esféricos $Y_{\ell,m}$ e $Y_{\ell',m'}$. Tomamos o complexo conjugado de um deles, já que eles são funções complexas, multiplicamo-los e os integramos sobre os intervalos $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e $0 \leq \theta \leq \pi$, isto é, calculamos

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^*_{\ell',m'}(\theta,\phi)Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\,\text{sen}\,\theta\,d\theta d\phi$$

lembrando que $Y^*_{\ell',m'}$ é o complexo conjugado de $Y_{\ell',m'}$ e que $dx = d(\cos\theta) = -\text{sen}\,\theta\,d\theta$. Vamos agora utilizar a forma explícita dos harmônicos esféricos, dada por uma das equações 6.78 ou C.30, isto é,

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^*_{\ell',m'}(\theta,\phi)Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta d\phi =$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi}\frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}}P_{\ell',m'}(\cos\theta)e^{-im'\phi}\right] \times \left[\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_{\ell,m}(\cos\theta)e^{im\phi}\right]\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta d\phi$$

ou

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^*_{\ell',m'}(\theta,\phi)Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta d\phi =$$

$$\sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi}\frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\times \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_{\ell',m'}(\cos\theta)e^{-im'\phi}P_{\ell,m}(\cos\theta)e^{im\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta d\phi$$

As integrais podem ser escritas como

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_{\ell',m'}(\cos\theta)e^{-im'\phi}P_{\ell,m}(\cos\theta)e^{im\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta d\phi =$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-im'\phi}e^{im\phi}\, d\phi\left[\int_0^{\pi} P_{\ell',m'}(\cos\theta)P_{\ell,m}(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\right]$$

A equação C.28,

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell',m'}(x)P_{\ell,m}(x)\, dx = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell,\ell'}$$

pode ser reescrita, considerando que $x=\cos\theta$, como

$$\int_{\pi}^{0} P_{\ell',m'}(\cos\theta)P_{\ell,m}(\cos\theta)\, d(\cos\theta) = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell,\ell'}$$

ou

$$-\int_{\pi}^{0} P_{\ell',m'}(\cos\theta)P_{\ell,m}(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell,\ell'}$$

ou ainda, invertendo os limites de integração, o que troca o sinal da integral, como

$$\int_0^{\pi} P_{\ell',m'}(\cos\theta)P_{\ell,m}(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell,\ell'}$$

A partir desta expressão, voltamos à integral dos harmônicos esféricos, isto é,

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_{\ell',m'}(\cos\theta)e^{-im'\phi}P_{\ell,m}(\cos\theta)e^{im\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} e^{-im'\phi}e^{im\phi}\,d\phi\left[\frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell,\ell'}\right]$$

ou

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_{\ell',m'}(\cos\theta)e^{-im'\phi}P_{\ell,m}(\cos\theta)e^{im\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta d\phi = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell,\ell'}\int_0^{2\pi} e^{-im'\phi}e^{im\phi}\,d\phi$$

Agora, mediante a expressão C.29, obtemos

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_{\ell',m'}(\cos\theta)e^{-im'\phi}P_{\ell,m}(\cos\theta)e^{im\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta d\phi = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell,\ell'}2\pi\delta_{m,m'}$$

ou

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_{\ell',m'}(\cos\theta)e^{-im'\phi}P_{\ell,m}(\cos\theta)e^{im\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta d\phi = \frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'}$$

Note que, se $\ell \neq \ell'$ ou se $m \neq m'$, esta integral se anula. Voltando agora à expressão inicial, temos

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y^*_{\ell',m'}(\theta,\phi) Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi =$$
$$\sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi}\frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \times$$
$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_{\ell',m'}(\cos\theta)e^{-im'\phi}P_{\ell,m}(\cos\theta)e^{im\phi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi$$

ou

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y^*_{\ell',m'}(\theta,\phi) Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi =$$
$$\sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi}\frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}\delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'}$$

A integral acima é nula quando $\ell \neq \ell'$ ou quando $m \neq m'$. Se $\ell = \ell'$ e $m = m'$ ela torna-se

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi) Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi =$$
$$\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}\delta_{\ell,\ell}\delta_{m,m}$$

ou

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi) Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi = \frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}$$

ou finalmente,

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi) Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi = 1$$

o que comprova a ortonormalidade dos harmônicos esféricos. Assim, podemo escrever, simplesmente,

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y^*_{\ell',m'}(\theta,\phi) Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi = \delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'} \qquad \text{(C.31}$$

Para os harmônicos esféricos, vale também a relação 6.79,

$$Y_{\ell,-m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

que foi demonstrada no texto, logo em seguida à apresentação da equação, na página 395. A tabela C.3 reapresenta alguns dos harmônicos esféricos da tabela 6.4. Observe que estas funções reúnem as partes angulares da solução de problemas em coordenadas esféricas.

ℓ, m	$Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$
0,0	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
1,0	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$
1,1	$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta e^{i\phi}$
1,-1	$\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta e^{-i\phi}$
2,0	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$
2,1	$-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\operatorname{sen}\theta e^{i\phi}$
2,-1	$\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\operatorname{sen}\theta e^{-i\phi}$
2,2	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\operatorname{sen}^2\theta e^{2i\phi}$
2,-2	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\operatorname{sen}^2\theta e^{-2i\phi}$
ℓ, m	$\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_{\ell,m}(\cos\theta)e^{im\phi}$

Tabela C.3: Harmônicos esféricos $Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ da tabela 6.4.

Como os harmônicos esféricos são ortonormais, é possível expandir uma função qualquer $f(\theta,\phi)$ em uma série de harmônicos esféricos, ou seja,

$$f(\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell} A_{\ell,m}Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \tag{C.32}$$

e os coeficientes $A_{\ell,m}$ são obtidos através de

$$A_{\ell,m} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta,\phi) Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi \qquad \text{(C.33)}$$

como vamos demonstrar em seguida.

Demonstração. A prova da expressão C.33 pode ser obtida mediante a multiplicação da equação C.32 por $Y^*_{\ell',m'}(\theta,\phi)$ e sua posterior integração em $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e $0 \leq \theta \leq \pi$, ou seja,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta,\phi) Y^*_{\ell',m'}(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} A_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\theta,\phi) Y^*_{\ell',m'}(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi$$

As somatórias e a constante $A_{\ell,m}$ podem sair do sinal de integração, isto é,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta,\phi) Y^*_{\ell',m'}(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi =$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} A_{\ell,m} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{\ell,m}(\theta,\phi) Y^*_{\ell',m'}(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi$$

Agora, utilizamos a condição de ortonormalidade C.31,

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y^*_{\ell',m'}(\theta,\phi) Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

e obtemos

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta,\phi) Y^*_{\ell',m'}(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} A_{\ell,m} \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

Como os únicos termos diferentes de zero são aqueles que têm $\ell = \ell'$ e $m = m'$, achamos

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta,\phi) Y^*_{\ell',m'}(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta d\phi = A_{\ell',m'}$$

que é a expressão C.33, agora demonstrada.

□

C.5 Exercícios

C.1 Verifique a fórmula de Rodrigues C.9 para os polinômios de Legendre da tabela C.1.

C.2 Demonstre as relações C.10b, C.10c e C.10d, válidas para os polinômios de Legendre.

C.3 Encontre as séries de Legendre das funções abaixo, todas no intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Calcule pelo menos dois termos não-nulos, se houver.

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = 2x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

C.4 Confira os polinômios generalizados de Legendre $P_{\ell,m}(x)$ dados na tabela C.2, utilizando a fórmula de Rodrigues C.22 ou a relação C.21.

C.5 Os harmônicos esféricos são dados pela equação C.30. Verifique se a tabela C.3 está correta. Pode ser necessário utilizar a expressão 6.79.

Apêndice D

Equação, Funções e Série de Bessel

Neste apêndice, vamos resolver a equação diferencial de Bessel 6.121, obter as funções de Bessel e estudar a série de Fourier-Bessel. Iniciamos com a equação de Bessel.

D.1 Equação de Bessel e Funções de Bessel

A equação de Bessel é dada pela expressão 6.121,

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\varrho^2}\right)R = 0 \qquad \text{(D.1)}$$

sendo que $\varrho = k\rho$ e $\rho \in [0, \infty[$. Ela tem um ponto singular em $\varrho = 0$, já que esse ponto é raiz do denominador das duas frações que existem na equação, que são

$$f_1(\varrho) = \frac{1}{\varrho} \qquad\qquad f_2(\varrho) = \frac{\varrho^2 - \nu^2}{\varrho^2}$$

Para verificar se esse ponto singular é regular, devemos multiplicar a função f_1 por $\varrho - \varrho_0$ e a função f_2 por $(\varrho - \varrho_0)^2$, onde ϱ_0 é o ponto singular. Se as funções resultantes dessas multiplicações forem ambas analíticas em ϱ_0, então o ponto ϱ_0 é singular regular. Se uma for não-analítica ou se ambas o forem, o ponto é irregular. Para o nosso caso, $\varrho_0 = 0$, e assim, temos

$$(\varrho - \varrho_0) f_1 = \varrho \frac{1}{\varrho} = 1$$

e

$$(\varrho - \varrho_0)^2 f_2 = \varrho^2 \frac{\varrho^2 - \nu^2}{\varrho^2} = \varrho^2 - \nu^2$$

Como os resultados acima são ambos analíticos em $\varrho = 0$, o ponto é singular regular, o que nos sugere a utilização do método de Fröbenius para a resolução desta equação [1]. Começamos, reescrevendo-a como

$$\varrho^2 \frac{d^2 R}{d\varrho^2} + \varrho \frac{dR}{d\varrho} + \left(\varrho^2 - \nu^2\right) R = 0$$

e vamos supor que a solução seja dada pela série

$$R(\varrho) = \varrho^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^{n+r} \qquad \text{(D.2)}$$

O parâmetro r e os coeficientes a_n serão obtidos durante a resolução da equação diferencial. Se a expressão acima é solução da equação de Bessel, sua substitução na equação, juntamente com suas derivadas, deve resultar em uma igualdade, que nos permitirá obter r e a_n. Assim, temos

$$\frac{dR}{d\varrho} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) a_n \varrho^{n+r-1}$$

e

$$\frac{d^2 R}{d\varrho^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) a_n \varrho^{n+r-2}$$

e assim, a equação diferencial fica

$$\varrho^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) a_n \varrho^{n+r-2} + \varrho \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) a_n \varrho^{n+r-1} + \left(\varrho^2 - \nu^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^{n+r} = 0$$

[1] Para uma discussão detalhada sobre pontos singulares e o método de Fröbenius, veja por exemplo, *Equações Diferenciais Aplicadas à Física.*

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n\varrho^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n\varrho^{n+r}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varrho^{n+r+2}-\nu^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varrho^{n+r}=0$$

Todos os termos estão com a mesma potência de ϱ, exceto o terceiro. Portanto, precisamos reescrevê-lo, definindo $m = n + 2$ ou $n = m - 2$, e então,

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varrho^{n+r+2}=\sum_{m=2}^{\infty}a_{m-2}\varrho^{m+r}$$

e voltando para o índice n, já que m e n são apenas índices "mudos",

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varrho^{n+r+2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}\varrho^{n+r}$$

A equação diferencial fica

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n\varrho^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n\varrho^{n+r}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}\varrho^{n+r}-\nu^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varrho^{n+r}=0$$

Agora, notamos que os valores de n comuns a todos começam em $n = 2$. Vamos explicitar os termos com $n = 0$ e $n = 1$, ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n\varrho^{n+r}=r(r-1)a_0\varrho^{r}$$
$$+r(r+1)a_1\varrho^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n\varrho^{n+r}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n\varrho^{n+r}=ra_0\varrho^{r}+(r+1)a_1\varrho^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)a_n\varrho^{n+r}$$

e

$$\nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^{n+r} = \nu^2 a_0 \varrho^r + \nu^2 a_1 \varrho^{r+1} + \nu^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n \varrho^{n+r}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} r(r-1)a_0\varrho^r &+ r(r+1)a_1\varrho^{r+1} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n\varrho^{n+r} + ra_0\varrho^r + (r+1)a_1\varrho^{r+1} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty}(n+r)a_n\varrho^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}\varrho^{n+r} - \nu^2 a_0\varrho^r \\ &- \nu^2 a_1\varrho^{r+1} - \nu^2\sum_{n=2}^{\infty}a_n\varrho^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \big[r(r-1) + r - \nu^2\big]a_0\varrho^r &+ \big[r(r+1) + (r+1) - \nu^2\big]a_1\varrho^{r+1} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty}\Big\{\big[(n+r)(n+r-1) + (n+r) - \nu^2\big]a_n + a_{n-2}\Big\}\varrho^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \big(r^2 - \nu^2\big)a_0\varrho^r &+ \big[(r+1)^2 - \nu^2\big]a_1\varrho^{r+1} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty}\Big\{\big[(n+r)^2 - \nu^2\big]a_n + a_{n-2}\Big\}\varrho^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

que nos fornece as relações

$$\begin{aligned} \big(r^2 - \nu^2\big)a_0 &= 0 \\ \big[(r+1)^2 - \nu^2\big]a_1 &= 0 \\ \big[(n+r)^2 - \nu^2\big]a_n + a_{n-2} &= 0 \end{aligned}$$

A primeira relação determina o valor de r, ou seja, considerando que $a_0 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \big(r^2 - \nu^2\big)a_0 &= 0 \\ r^2 &= \nu^2 \\ r &= \pm\nu \end{aligned} \tag{D.4}$$

A segunda nos mostra que

$$\begin{aligned}\left[(r+1)^2 - \nu^2\right]a_1 &= 0 \\ \left(r^2 + 2r + 1 - \nu^2\right)a_1 &= 0 \\ (2r+1)a_1 &= 0\end{aligned} \tag{D.5}$$

enquanto a terceira estabelece a relação de recorrência, pois

$$\begin{aligned}\left[(n+r)^2 - \nu^2\right]a_n + a_{n-2} &= 0 \\ \left(n^2 + 2nr + r^2 - \nu^2\right)a_n &= -a_{n-2} \\ \left(n^2 + 2nr\right)a_n &= -a_{n-2} \\ n(n+2r)a_n &= -a_{n-2}\end{aligned}$$

ou

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2r)}, \qquad n \geq 2 \tag{D.6}$$

A equação D.4 estabelece dois valores possíveis para r, $r = \nu$ e $r = -\nu$. Considerando que $\nu \geq 0$, de modo que $r = \nu$ é um número não-negativo, vamos estudar inicialmente este valor para r.

Se $r = \nu \geq 0$, então a equação D.5 estabelece que

$$(2\nu + 1)a_1 = 0$$

o que só é possível se $a_1 = 0$, já que o menor valor de ν é zero. Desta conclusão, juntamente com a relação de recorrência D.6, resulta o fato de que todos os coeficientes a_n com n ímpar são nulos, já que a relação de recorrência relaciona os coeficientes a_n e a_{n-2}. Utilizando o valor de r, a expressão D.6 fica

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)}, \qquad n \geq 2$$

que pode ser usada para obter alguns dos coeficientes a_n. Vamos iniciar com $n = 2$, o que resulta em

$$\begin{aligned}a_2 &= -\frac{a_{2-2}}{2(2+2\nu)} \\ a_2 &= -\frac{a_0}{2^2(1+\nu)}\end{aligned}$$

Quando $n = 4$, temos

$$
\begin{aligned}
a_4 &= -\frac{a_{4-2}}{4(4+2\nu)} \\
&= -\frac{a_2}{2^3(2+\nu)} \\
&= -\frac{-\frac{a_0}{2^2(1+\nu)}}{2^3(2+\nu)} \\
a_4 &= \frac{a_0}{2^4[1.2](1+\nu)(2+\nu)}
\end{aligned}
$$

Para $n = 6$, obtemos

$$
\begin{aligned}
a_6 &= -\frac{a_{6-2}}{6(6+2\nu)} \\
&= -\frac{a_4}{3.2^2(3+\nu)} \\
&= -\frac{\frac{a_0}{2^4[1.2](1+\nu)(2+\nu)}}{3.2^2(3+\nu)} \\
a_6 &= -\frac{a_0}{[1.2.3]2^6(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}
\end{aligned}
$$

e se continuarmos com esse processo, veremos que os coeficientes a_n possuem uma lei de formação, dada por

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! \big[(1+\nu)(2+\nu)\cdots(n+\nu)\big]} a_0, \qquad n \geq 1 \tag{D.7}$$

Esta equação pode ser reescrita mediante a consideração da função Gama, definida por

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx \tag{D.8}$$

Há uma relação entre a função $\Gamma(n)$ e o fatorial de n, dada por

$$n! = \Gamma(n+1)$$

Esta expressão é usada para definir o fatorial de um número, mesmo que ele não seja inteiro. Se, além disso, ele for negativo (exceto se for um inteiro negativo), precisamos da expressão auxiliar

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

que vale para qualquer n, exceto n inteiros e negativos, além do zero, como $n = 0, -1, -2, \ldots$. Nestes casos, a função $\Gamma(n)$ diverge. Como exemplos, temos (tabelados) $\frac{1}{2}! = \Gamma(\frac{3}{2}) \simeq 0,8862$ e $\frac{3}{2}! = \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) \simeq 1,3293$. Considerando que ν é, em princípio, um número real, o fatorial de ν pode ser definido em termos de funções Γ, e a equação dos coeficientes pode ser reescrita como

$$a_{2n} = \frac{\nu!}{\nu!}\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!\big[(1+\nu)(2+\nu)\cdots(n+\nu)\big]}a_0, \qquad n \geq 1$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \nu!}{2^{2n}n!(n+\nu)!}a_0, \qquad n \geq 1$$

e agora, em termos de funções Gama,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \Gamma(\nu+1)}{2^{2n}n!\Gamma(n+\nu+1)}a_0, \qquad n \geq 1$$

A solução tentativa D.2 para a equação de Bessel torna-se então, lembrando que $r = \nu$,

$$R_\nu(\varrho) = \varrho^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$$

ou ainda, mediante a forma explícita dos a_n, sem esquecer que os termos com n ímpar são todos nulos,

$$R_\nu(\varrho) = \varrho^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\nu+1)}{2^{2n}n!\Gamma(n+\nu+1)}a_0 \varrho^{2n}$$

que pode ser reescrita como

$$R_\nu(\varrho) = a_0\Gamma(\nu+1)\frac{2^\nu}{2^\nu}\varrho^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

ou

$$R_\nu(\varrho) = a_0 2^\nu \Gamma(\nu+1)\left(\frac{\varrho}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

Definindo o coeficiente a_0 como

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \tag{D.9}$$

obtemos a função de Bessel de primeiro tipo de ordem ν, ou $J_\nu(\varrho)$, dada por

$$J_\nu(\varrho) = \left(\frac{\varrho}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n} \tag{D.10}$$

que é uma expressão válida para qualquer ν. As funções de Bessel são importantes em outras áreas de Física, além do Eletromagnetismo, porque elas apresentam um comportamento oscilatório amortecido, o que pode ser muito útil em Mecânica, por exemplo. A figura D.1 apresenta duas dessas funções, J_0 e J_1, para ilustrar a afirmação.

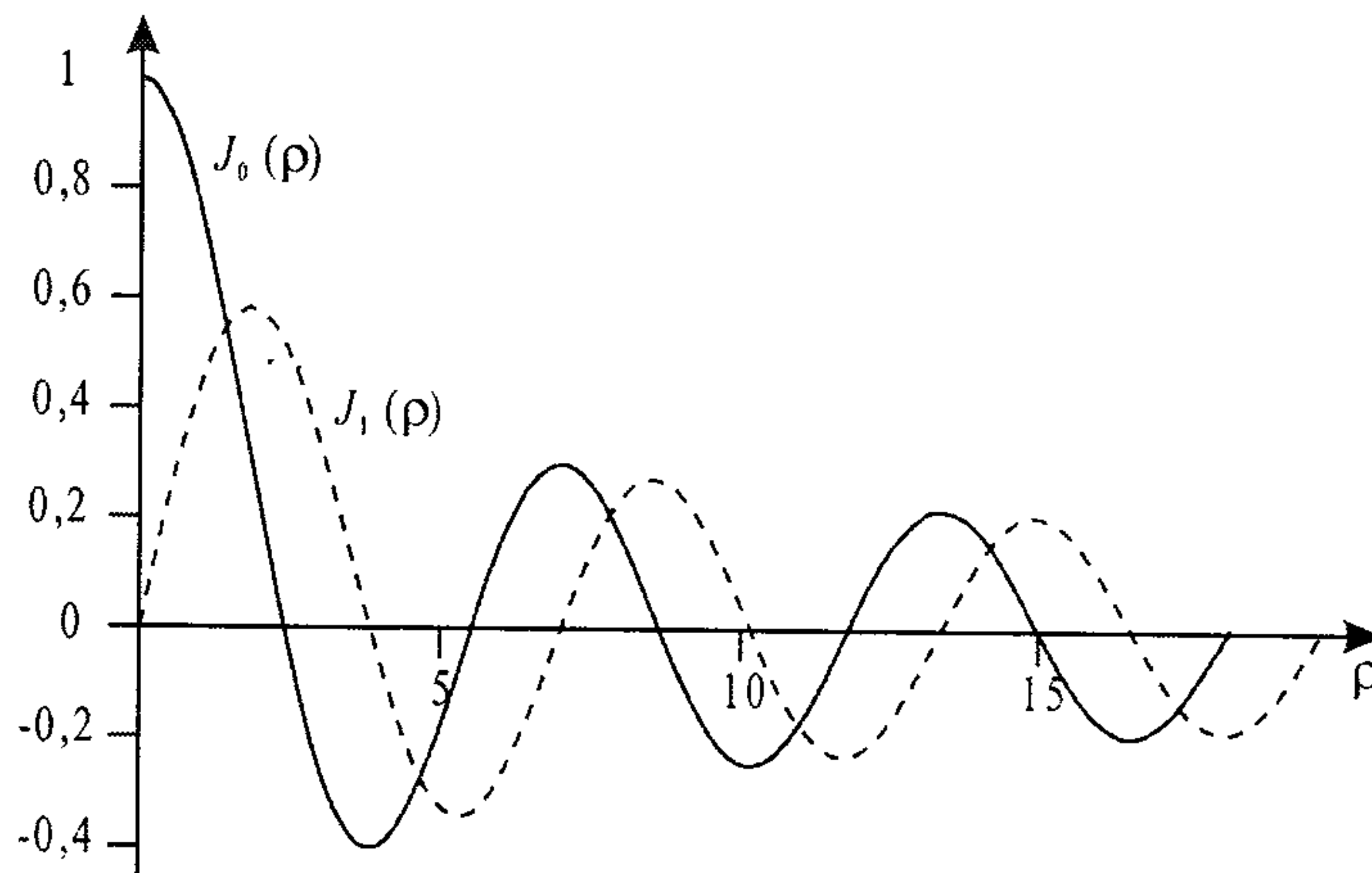



Figura D.1: Gráfico das funções de Bessel de primeiro tipo $J_0(\varrho)$ (linha cheia) e $J_1(\varrho)$ (linha tracejada). Ambas apresentam um comportamento oscilatório amortecido, que é característico de todas as funções de Bessel de primeiro tipo com $\nu \geq 0$.

A solução correspondente a $r = \nu$ é a função de Bessel J_ν. Vejamos o que ocorre quando $r = -\nu$, que é o outro valor possível para r. Neste caso, a equação D.5 fica

$$(1 - 2\nu)a_1 = 0 \tag{D.11}$$

e a relação de recorrência D.6 torna-se

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-2\nu)}, \qquad n \geq 2 \tag{D.12}$$

de modo que agora é possível que a_1 não seja nulo se ν for igual a $\frac{1}{2}$. Além disso, ocorrendo $n = 2\nu$, o denominador da relação de recorrência se anula, e isso gera um problema quando ν é um número inteiro ou semi-inteiro (como $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, etc.). Assim, existem três casos que precisam ser considerados separadamente, devido às características de cada um.

D.1.1 Solução para 2ν Não-Inteiro

Quando 2ν é um número não-inteiro, o denominador da relação de recorrência D.12 não pode se anular. Além disso, a_1 deve ser zero, já que, se $\nu = \frac{1}{2}$, 2ν é um número inteiro, o que está excluído desta discussão. Portanto, só existem os coeficientes a_n com n par, e podemos calcular alguns deles. Vamos começar com $n = 2$, isto é, vamos achar a_2.

$$a_2 = -\frac{a_{2-2}}{2(2-2\nu)}$$
$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(1-\nu)}$$

Vejamos agora o a_4.

$$\begin{aligned} a_4 &= -\frac{a_{4-2}}{4(4-2\nu)} \\ &= -\frac{a_2}{2^3(2-\nu)} \\ &= -\frac{-\frac{a_0}{2^2(1-\nu)}}{2^3(2-\nu)} \\ a_4 &= \frac{a_0}{[2.1]2^4(1-\nu)(2-\nu)} \end{aligned}$$

O coeficiente a_6 é

$$a_6 = -\frac{a_{6-2}}{6(6-2\nu)}$$
$$a_6 = -\frac{a_4}{3.2^2(3-\nu)}$$

$$a_6 = -\frac{\frac{a_0}{[2.1]2^4(1-\nu)(2-\nu)}}{3.2^2(3-\nu)}$$

$$a_6 = -\frac{a_0}{[3.2.1]2^6(1-\nu)(2-\nu)(3-\nu)}$$

Continuando com esse processo, obtemos uma lei de formação para os coeficientes a_n semelhante a D.7, só que agora para $-\nu$, ou seja,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!\big[(1-\nu)(2-\nu)\cdots(n-\nu)\big]}a_0, \qquad n \geq 1 \tag{D.13}$$

Podemos utilizar a função Γ para fazer com que esses coeficientes sejam dados por

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n\Gamma(1-\nu)}{2^{2n}n!\Gamma(n-\nu+1)}a_0, \qquad n \geq 1 \tag{D.14}$$

e substituindo-os na solução tentativa D.2, lembrando que existem somente os coeficientes com n par,

$$R_{-\nu}(\varrho) = \varrho^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(1-\nu)}{2^{2n}n!\Gamma(n-\nu+1)}a_0\varrho^{2n}$$

que pode ser reescrita como

$$R_{-\nu}(\varrho) = a_0\Gamma(1-\nu)\frac{2^{-\nu}}{2^{-\nu}}\varrho^{-\nu}\sum_{n\,=\,0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

ou

$$R_{-\nu}(\varrho) = a_0 2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{-\nu}\sum_{n\,=\,0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

e definindo a_0 como

$$a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)} \tag{D.15}$$

achamos a função de Bessel de primeiro tipo de ordem $-\nu$, ou $J_{-\nu}$, dada por

$$J_{-\nu}(\varrho) = \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{-\nu}\sum_{n\,=\,0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n} \tag{D.16}$$

A solução geral para a função R é então

$$R_\nu(\varrho) = E_\nu J_\nu(\varrho) + F_\nu J_{-\nu}(\varrho)$$

ou, lembrando que $\varrho = k\rho$,

$$R(\rho) = E_\nu J_\nu(k\rho) + F_\nu J_{-\nu}(k\rho) \tag{D.17}$$

que é idêntica à equação 6.122. Observe que esta solução é válida, até o momento, apenas para $2\nu \neq$ número inteiro.

D.1.2 Solução para ν Semi-Inteiro

Quando ν é um número semi-inteiro, como $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$, por exemplo, o denominador na relação de recorrência D.12 pode se anular. Para resolver este problema, reescrevemos essa equação na forma

$$n(n-2\nu)a_n = -a_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

e agora, quando $n = 2\nu$, temos

$$0.a_{2\nu} = -a_{2\nu-2} = 0$$

e portanto, $a_{2\nu-2} = 0$, mas $a_{2\nu}$ pode ter qualquer valor. De fato, como 2ν é um número inteiro ímpar, temos uma série com coeficientes a_n onde n é par, que começa com a_0, como no caso anterior, e que não é afetada pelo fato de ν ser um número semi-inteiro, a qual dá origem a um termo $J_{-\nu}$, e temos também uma série com coeficientes a_n com n ímpar, que começa em $a_{2\nu}$, sendo que os coeficientes a_n, com n ímpar e tal que $n < 2\nu$, são todos nulos. Esta série que começa em $a_{2\nu}$ é, na realidade, um múltiplo de J_ν, e assim, a solução geral para R é dada pela equação D.17,

$$R_\nu(\rho) = E_\nu J_\nu(k\rho) + F_\nu J_{-\nu}(k\rho)$$

que agora vale também para ν semi-inteiro. Vejamos um exemplo elucidativo. Vamos considerar que $\nu = \frac{1}{2}$, o que significa que $2\nu = 1$. A expressão D.11 mostra que

$$\begin{aligned}(1-2\nu)a_1 &= 0\\ (1-1)a_1 &= 0\\ 0.a_1 &= 0\end{aligned}$$

ou seja, a_1 não precisa ser necessariamente nulo. A relação de recorrência D.12 fica

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}, \qquad n \geq 2$$

Os coeficientes com n par originam a série de $J_{-\frac{1}{2}}$. Vamos calcular alguns dos coeficientes com n ímpar, começando com a_3.

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{a_{3-2}}{3(3-1)} \\ a_3 &= -\frac{a_1}{6} \end{aligned}$$

O valor de a_5 é

$$\begin{aligned} a_5 &= -\frac{a_{5-2}}{5(5-1)} \\ &= -\frac{a_3}{20} \\ &= -\frac{-\frac{a_1}{6}}{20} \\ a_5 &= \frac{a_1}{120} \end{aligned}$$

Lembrando a solução tentativa D.2, temos

$$R_{-\frac{1}{2}}(\varrho) = \varrho^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$$

ou, explicitando alguns termos, para os coeficientes com n ímpar, tendo em conta que os coeficientes com n par formam a função $J_{-\nu}$,

$$R_{-\frac{1}{2}}(\varrho) = \varrho^{-\frac{1}{2}} \left(a_1 \varrho + a_3 \varrho^3 + a_5 \varrho^5 + \cdots\right)$$

que fica

$$R_{-\frac{1}{2}}(\varrho) = a_1 \varrho^{\frac{1}{2}} - \frac{a_1}{6} \varrho^{\frac{5}{2}} + \frac{a_1}{120} \varrho^{\frac{9}{2}} + \cdots$$

ou ainda,

$$R_{-\frac{1}{2}}(\varrho) = a_1 \varrho^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\varrho^2}{6} + \frac{\varrho^4}{120} + \cdots\right) \tag{D.18}$$

Agora, vamos considerar a função $J_{\frac{1}{2}}$, utilizando a expressão D.10 para $\nu = \frac{1}{2}$,

$$J_{\frac{1}{2}}(\varrho) = \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\frac{1}{2}+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

ou, explicitamente,

$$J_{\frac{1}{2}}(\varrho) = \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{2})}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2 + \frac{1}{2\Gamma(\frac{7}{2})}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^4 + \cdots\right]$$

Para a função Γ vale

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

e assim,

$$\begin{aligned}
J_{\frac{1}{2}}(\varrho) &= \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{1}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2 + \frac{1}{2\frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2})}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^4 + \cdots\right] \\
&= \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{2}{3\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2 + \frac{1}{5\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^4 + \cdots\right] \\
&= \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{4}{3\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2 + \frac{2}{15\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^4 + \cdots\right] \\
&= \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{1}{3}\frac{\varrho^2}{2} + \frac{1}{15}\frac{\varrho^4}{8} + \cdots\right] \\
J_{\frac{1}{2}}(\varrho) &= \frac{2}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\varrho^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{\varrho^2}{6} + \frac{\varrho^4}{120} + \cdots\right]
\end{aligned}$$

Comparando esta equação com a expressão D.18, vemos que, se o coeficiente a_1 é dado por

$$a_1 = \frac{2}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{1}{2})}$$

as expressões tornam-se iguais, o que mostra que a outra solução, para os valores de n ímpares, é um múltiplo da função $J_{\frac{1}{2}}$. Assim, a solução geral é

$$R_{\frac{1}{2}}(\rho) = E_{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(k\rho) + F_{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(k\rho)$$

Vejamos um outro exemplo, sem fazer todas as contas. Quando $\nu = \frac{3}{2}$, $2\nu = 3$. A expressão D.5 diz que

$$(1 - 2\nu)a_1 = 0$$

$$(1 - 3)a_1 = 0$$

$$2a_1 = 0$$

e assim, $a_1 = 0$. A relação de recorrência D.12 fica

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-3)}, \qquad n \geq 2$$

e quando formos calcular a_3, acharemos

$$a_3 = -\frac{a_{3-2}}{3(3-3)}$$

ou

$$a_3 = -\frac{a_1}{0}$$

Como $a_1 = 0$, a fração é indeterminada, e assim, a_3 pode ter qualquer valor A série começa agora em a_3, não mais em a_1, e obtemos um múltiplo de $J_{\frac{3}{2}}$ (a verificação é deixada como exercício). Vejamos agora o último caso, em que ν é um número inteiro.

D.1.3 Solução para ν Inteiro

Quando ν é um número inteiro, que vamos chamar de m, $2\nu = 2m$ é um inteiro par e a equação D.5,

$$(1 - 2m)a_1 = 0$$

estabelece que $a_1 = 0$. Como a relação de recorrência D.12 é

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-2m)}, \qquad n \geq 2 \tag{D.19}$$

vemos que todos os coeficientes a_n com n ímpar são nulos, já que o denominador é sempre não-nulo para qualquer n ímpar. Entretanto, para n par e

denominador pode se anular se $n = 2m$. Lembrando do caso anterior, vemos que, se o denominador se anula, o numerador também deve ser nulo, para que a fração se torne a indeterminação $\frac{0}{0}$, pois senão o coeficiente tende a infinito, o que não é aceitável. Isso significa que $a_{2m-2} = 0$, o que implica que todos os coeficientes a_n com n par, desde a_0 até a_{2m-2}, têm que ser nulos também. Caso contrário, a_{2m-2} não tem como ser nulo, pois ele deve obedecer à relação de recorrência acima. A série começa em a_{2m}, e a partir daí, os coeficientes são dados pela relação de recorrência D.19, e eles obedecem à lei de formação D.14, só que, ao invés de serem dados em função de a_0, o são em função de a_{2m}, que é o primeiro coeficiente não-nulo, isto é,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \Gamma(1-\nu)}{2^{2n} n! \Gamma(n-\nu+1)} a_{2m}, \qquad n > m$$

Quando substituímos esses coeficientes na solução tentativa D.2, temos, sem esquecer que $r = -\nu = -m$,

$$R(\varrho) = \varrho^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$$

só que o índice da somatória começa em $n = m$, e não mais em $n = 0$, já que o primeiro termo não-nulo é a_{2m}. O resultado, feitas as devidas manipulações, e definindo o coeficiente a_{2m} de forma apropriada, é

$$R_{-m}(\varrho) = \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{-m} \sum_{n\,=\,m}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n-m+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

Agora definimos $n' = n - m$ ou $n = n' + m$, de modo que, neste índice, o resultado acima torna-se

$$R_{-m}(\varrho) = \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{-m} \sum_{n'\,=\,0}^{\infty} \frac{(-1)^{n'+m}}{(n'+m)! \Gamma(n'+m-m+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2(n'+m)}$$

ou então,

$$R_{-m}(\varrho) = \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{-m} \sum_{n'\,=\,0}^{\infty} \frac{(-1)^{n'}(-1)^m}{(n'+m)! \Gamma(n'+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n'} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2m}$$

ou ainda,

$$R_{-m}(\varrho) = (-1)^m \left(\frac{\varrho}{2}\right)^m \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n'}}{(n'+m)!\Gamma(n'+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n'}$$

Esta expressão pode ser reescrita se lembrarmos que

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

e assim,

$$\begin{aligned}
(n'+m)!\Gamma(n'+1) &= n'!(n'+m)\cdots(n'+2)(n'+1)\Gamma(n'+1) \\
&= n'!(n'+m)\cdots(n'+2)\Gamma(n'+1+1) \\
&= n'!(n'+m)\cdots(n'+3)\Gamma(n'+2+1) \\
\vdots \quad &= \quad \vdots \\
(n'+m)!\Gamma(n'+1) &= n'!\Gamma(n'+m+1)
\end{aligned}$$

de modo que a equação para R_{-m} fica

$$R_{-m}(\varrho) = (-1)^m \left(\frac{\varrho}{2}\right)^m \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n'}}{n'!\Gamma(n'+m+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n'}$$

ou, voltando agora para o índice n, já que n e n' são índices "mudos", obtemos a função $J_{-m}(\varrho)$,

$$J_{-m}(\varrho) = (-1)^m \left(\frac{\varrho}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

que é, na realidade (apenas para m inteiro, é preciso destacar), um múltiplo de $J_m(\varrho)$, como pode ser facilmente verificado se escrevermos a expressão D.10 para $\nu = m$, ou seja,

$$J_m(\varrho) = \left(\frac{\varrho}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

e assim,

$$J_{-m}(\varrho) = (-1)^m J_m(\varrho) \qquad \text{(D.20)}$$

o que comprova que as funções J_m e J_{-m} são linearmente dependentes. J_m é uma solução da equação de Bessel, mas ainda precisamos encontrar a outra. Definimos a *função de Bessel de segundo tipo* $N_\nu(\varrho)$, também chamada de *função de Neumann*,

$$N_\nu(\varrho) = \frac{J_\nu(\varrho)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(\varrho)}{\operatorname{sen}\nu\pi} \tag{D.21}$$

que vale para qualquer ν, inclusive para os valores inteiros de ν. Neste caso específico, a função de Neumann tem uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, já que

$$\frac{J_m(\varrho)\cos m\pi - J_{-m}(\varrho)}{\operatorname{sen} m\pi} = \frac{(-1)^m J_m(\varrho) - J_{-m}(\varrho)}{0} = \frac{J_{-m}(\varrho) - J_{-m}(\varrho)}{0} = \frac{0}{0}$$

e assim, é preciso considerar o limite $\nu \to m$ na expressão D.21, e depois, usar a regra de L'Hôpital, ou seja,

$$\begin{aligned}
N_m(\varrho) &= \lim_{\nu\to m} \frac{1}{\pi\cos\pi\nu}\left(\frac{\partial J_\nu(\varrho)}{\partial\nu}\cos\nu\pi + \pi J_\nu(\varrho)\operatorname{sen}\pi\nu - \frac{\partial J_{-\nu}(\varrho)}{\partial\nu}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to m}\frac{\partial J_\nu(\varrho)}{\partial\nu} + \frac{1}{\pi}\overbrace{\lim_{\nu\to m}\pi J_\nu(\varrho)\operatorname{tg}\pi\nu}^{0} - \frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to m}\frac{1}{\cos\pi\nu}\frac{\partial J_{-\nu}(\varrho)}{\partial\nu} \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to m}\left(\frac{\partial J_\nu(\varrho)}{\partial\nu} - (-1)^\nu\frac{\partial J_{-\nu}(\varrho)}{\partial\nu}\right) \\
N_m(\varrho) &= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\partial J_\nu(\varrho)}{\partial\nu} - (-1)^\nu\frac{\partial J_{-\nu}(\varrho)}{\partial\nu}\right\}_{\nu=m}
\end{aligned}$$

Agora precisamos calcular as derivadas da série que define a função de Bessel. Como este é um processo longo e tedioso, que não é particularmente elucidativo do ponto de vista físico, vamos omiti-lo. Mostraremos apenas o resultado final. Se você está interessado em obter informações mais detalhadas sobre este assunto, consulte os livros de Física-Matemática das referências bibliográficas. O resultado final para $N_m(\varrho)$ é

$$\begin{aligned}
N_m(\varrho) = {} & \frac{1}{\pi}\left[2\ln\frac{\varrho}{2} + 2\gamma - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right]J_m(\varrho) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{-m}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n} \\
& - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^m \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{(n+m)!n!}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m+k}\right)\right]\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}\right\}
\end{aligned} \tag{D.22}$$

onde a constante γ é a *constante de Euler-Mascheroni*, que aparece na derivação da função $\Gamma(x)$, a qual consta nas funções de Bessel, dada por

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+x}\right)$$

e ela vale

$$\gamma = \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln N\right) = 0,5772\ldots$$

É importante destacar que a função de Neumann diverge em $\varrho = 0$ por causa do termo $\ln\frac{\varrho}{2}$ que aparece na sua definição. Isso pode ser visto na figura D.2, que apresenta um gráfico das funções de Neumann $N_0(x)$ e $N_1(x)$, e onde se percebe que essas funções também têm um comportamento oscilatório amortecido.

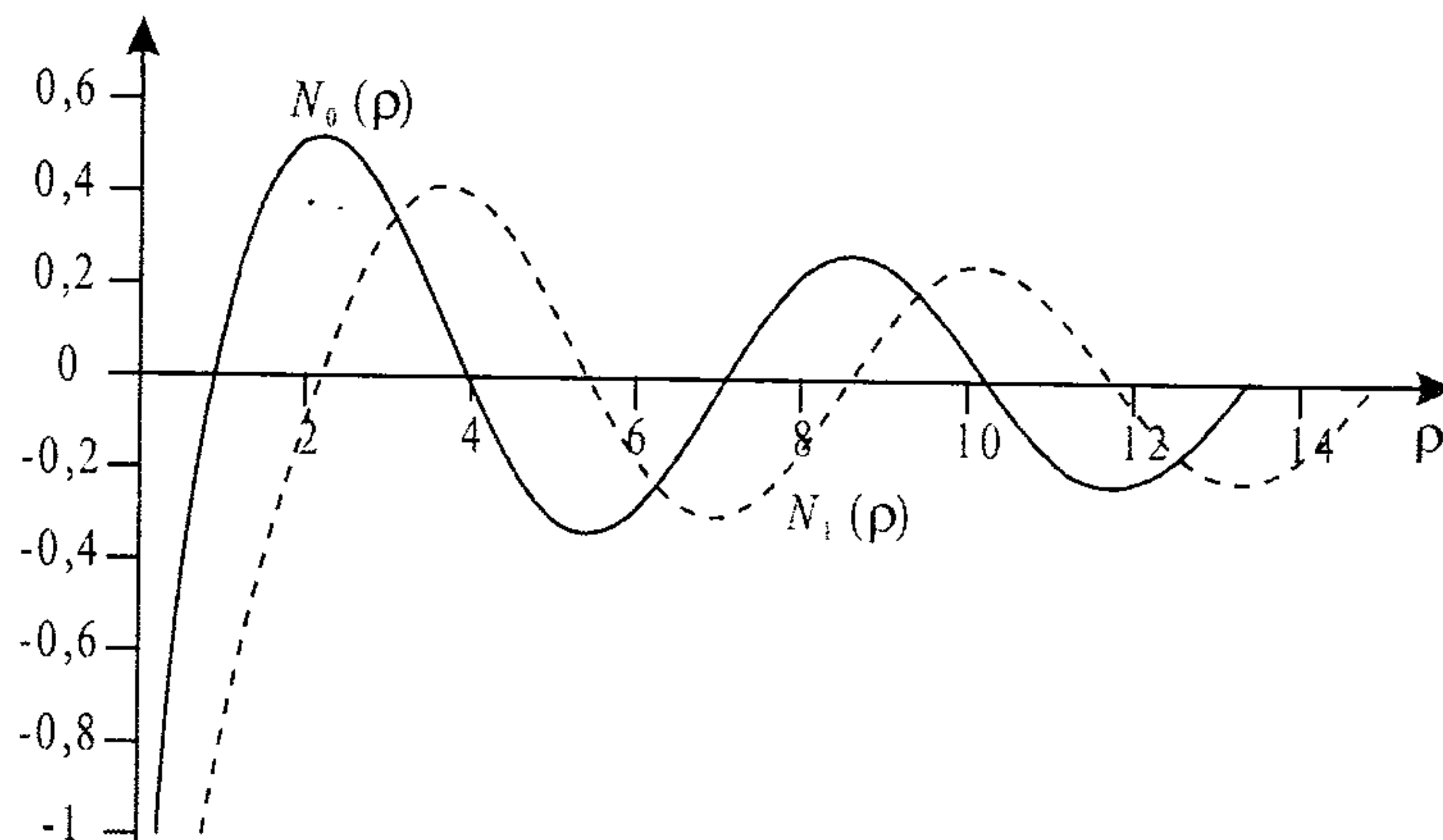



Figura D.2: Gráfico das funções de Bessel do segundo tipo, ou funções de Neumann, $N_0(x)$ (linha cheia) e $N_1(x)$ (linha tracejada). Ambas divergem em $x = 0$ e têm um comportamento oscilatório amortecido.

Além disso, as funções de Neumann são, de uma maneira muito clara, linearmente independentes das funções de Bessel J_ν, para qualquer valor de ν, o que faz com que a solução da equação de Bessel para ν inteiro seja dada

pela combinação linear da função de Bessel J_m com a função de Neumann N_m, isto é,

$$R(\varrho) = E_m J_m(\varrho) + F_m N_m(\varrho)$$

Como essas duas funções são linearmente independentes para qualquer valor de ν, é usual representar a solução como

$$R(\varrho) = E_\nu J_\nu(\varrho) + F_\nu N_\nu(\varrho)$$

para qualquer valor de ν, não apenas para ν inteiro. Assim, para ν diferente de um número inteiro, a solução pode ser tanto dada pela equação D.17 como pela expressão anterior. Já quando ν é inteiro, apenas esta última solução deve ser usada.

A solução em termos de ρ fica, lembrando que $\varrho = k\rho$,

$$R(\rho) = E_\nu J_\nu(k\rho) + F_\nu N_\nu(k\rho) \tag{D.23}$$

que é idêntica à equação 6.123. Note que, se $\rho = 0$ pertence ao domínio da solução, então pode ser necessário zerar a constante F_ν, pois $N_\nu(k\rho)$ diverge neste ponto.

Além das funções de Bessel de primeiro tipo, J_ν, e de segundo tipo, N_ν (funções de Neumann), existem as *funções de Bessel de terceiro tipo*, ou *funções de Hankel*, dadas por

$$H^1_\nu(\varrho) = J_\nu(\varrho) + iN_\nu(\varrho) \tag{D.24a}$$

$$H^2_\nu(\varrho) = J_\nu(\varrho) - iN_\nu(\varrho) \tag{D.24b}$$

As funções de Hankel também são soluções da equação de Bessel, e elas são linearmente independentes entre si, podendo ser usadas para formar a solução geral da equação de Bessel, ou seja,

$$R_\nu(\rho) = E_\nu H^1_\nu(k\rho) + F_\nu H^2_\nu(k\rho) \tag{D.25}$$

D.2 Série de Bessel

Da mesma forma como os polinômios de Legendre e os harmônicos esféricos podem ser utilizados para expandir uma função em uma série de Legendre ou de harmônicos esféricos, as funções de Bessel definem uma série, chamada de *série de Fourier-Bessel*, de modo que uma função qualquer $f(\rho)$, definida no intervalo $0 \leq \rho \leq a$, pode ser escrita em termos das funções de Bessel, como sendo

$$f(\rho) = \sum_{p=1}^{\infty} A_{\nu,p} J_\nu\Big(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a}\Big) \tag{D.26}$$

onde os números $x_{\nu,p}, p = 1, 2, 3, \ldots$ são as infinitas raízes da função de Bessel J_ν, isto é,

$$J_\nu(x_{\nu,p}) = 0, \qquad p = 1, 2, 3, \ldots$$

e os coeficientes $A_{\nu,p}$ são obtidos através da expressão

$$A_{\nu,p} = \frac{2}{a^2 J^2_{\nu+1}(x_{\nu,p})} \int_0^a f(\rho) J_\nu\Big(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a}\Big)\, \rho\, d\rho \tag{D.27}$$

A demonstração desta equação necessita de algumas propriedades adicionais, que são provadas em seguida. A primeira propriedade importante das funções de Bessel, válida para J_ν, N_ν, H^1_ν e H^2_ν, é

$$\Upsilon_{\nu-1}(\varrho) + \Upsilon_{\nu+1}(\varrho) = \frac{2\nu}{\varrho}\Upsilon_\nu(\varrho) \tag{D.28}$$

onde $\Upsilon_\nu(\varrho)$ representa as funções de Bessel de qualquer tipo. Vejamos a demonstração desta expressão para as funções de Bessel $J_\nu(\varrho)$.

Demonstração. A equação D.28, quando aplicada para as funções de Bessel J_ν, fica

$$J_{\nu-1}(\varrho) + J_{\nu+1}(\varrho) = \frac{2\nu}{\varrho} J_\nu(\varrho)$$

sendo que as funções de Bessel J_ν são dadas pela expressão D.10,

$$J_\nu(\varrho) = \Big(\frac{\varrho}{2}\Big)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \Big(\frac{\varrho}{2}\Big)^{2n}$$

Vamos escrever esta última para a função $J_{\nu-1}$, ou seja,

$$J_{\nu-1}(\varrho) = \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

Multiplicando esta expressão e dividindo-a por $n+\nu$, obtemos

$$J_{\nu-1}(\varrho) = \left(\frac{2}{\varrho}\right)\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+\nu)}{n!(n+\nu)\Gamma(n+\nu)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

ou, lembrando que $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$,

$$J_{\nu-1}(\varrho) = \left(\frac{2}{\varrho}\right)\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{2\nu}{\varrho}\right)\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

O último termo envolve a função de Bessel J_ν (veja a equação D.10). Além disso, como na somatória o termo com $n=0$ é nulo, ela começa efetivamente a partir de $n=1$. Assim, obtemos

$$J_{\nu-1}(\varrho) = \left(\frac{2}{\varrho}\right)\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n} + \frac{2\nu}{\varrho} J_\nu(\varrho)$$

Agora, introduzimos a seguinte mudança de variável na somatória: $m = n-1$ ou $n = m+1$. Achamos, portanto,

$$J_{\nu-1}(\varrho) = \left(\frac{2}{\varrho}\right)\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!\Gamma(m+\nu+2)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2(m+1)} + \frac{2\nu}{\varrho} J_\nu(\varrho)$$

ou

$$J_{\nu-1}(\varrho) = -\left(\frac{2}{\varrho}\right)\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{m!\Gamma(m+\nu+2)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2m} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2} + \frac{2\nu}{\varrho} J_\nu(\varrho)$$

ou então,

$$J_{\nu-1}(\varrho) = -\left(\frac{\varrho}{2}\right)\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+2)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2m} + \frac{2\nu}{\varrho} J_\nu(\varrho)$$

ou ainda,

$$J_{\nu-1}(\varrho) = -\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\nu+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+2)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2m} + \frac{2\nu}{\varrho} J_\nu(\varrho)$$

Vamos explicitar a função de Bessel $J_{\nu+1}$, utilizando a equação D.10,

$$J_{\nu+1}(\varrho) = \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\nu+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+2)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

Observe que a somatória na penúltima equação é justamente $J_{\nu+1}$, e assim,

$$J_{\nu-1}(\varrho) = -J_{\nu+1} + \frac{2\nu}{\varrho} J_\nu(\varrho)$$

ou

$$J_{\nu-1}(\varrho) + J_{\nu+1} = \frac{2\nu}{\varrho} J_\nu(\varrho)$$

que é a expressão que queríamos demonstrar.

□

A segunda propriedade importante válida para todas as funções de Bessel é

$$\Upsilon_{\nu-1}(\varrho) - \Upsilon_{\nu+1}(\varrho) = 2\frac{d\Upsilon_\nu(\varrho)}{d\varrho} \tag{D.29}$$

Vejamos sua demonstração para as funções de Bessel J_ν.

Demonstração. A equação D.29 para as funções de Bessel J_ν fica

$$J_{\nu-1}(\varrho) - J_{\nu+1}(\varrho) = 2\frac{dJ_\nu(\varrho)}{d\varrho}$$

Lembrando que

$$J_\nu(\varrho) = \left(\frac{\varrho}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

temos

$$\frac{dJ_\nu(\varrho)}{d\varrho} = \frac{\nu}{2}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{\varrho}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \frac{2n}{2} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n-1}$$

ou

$$\frac{dJ_\nu(\varrho)}{d\varrho} = \frac{\nu}{2}\left(\frac{2}{\varrho}\right)\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{\varrho}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n-1}$$

Na última somatória, o termo com $n = 0$ é nulo, e a somatória começa de fato em $n = 1$. Além disso, na primeira aparece a função J_ν, e assim,

$$\frac{dJ_\nu(\varrho)}{d\varrho} = \frac{\nu}{\varrho}J_\nu(\varrho) + \left(\frac{\varrho}{2}\right)^\nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n-1}$$

Pela propriedade D.28, temos

$$J_{\nu-1}(\varrho) + J_{\nu+1}(\varrho) = \frac{2\nu}{\varrho}J_\nu(\varrho)$$

e portanto,

$$\frac{\nu}{\varrho}J_\nu(\varrho) = \frac{J_{\nu-1}(\varrho) + J_{\nu+1}(\varrho)}{2}$$

Além disso, na segunda somatória fazemos $m = n - 1$ ou $n = m + 1$, e desse modo,

$$\frac{dJ_\nu(\varrho)}{d\varrho} = \frac{J_{\nu-1}(\varrho) + J_{\nu+1}(\varrho)}{2} + \left(\frac{\varrho}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!\Gamma(m+\nu+2)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2(m+1)-1}$$

ou

$$\frac{dJ_\nu(\varrho)}{d\varrho} = \frac{J_{\nu-1}(\varrho) + J_{\nu+1}(\varrho)}{2} - \left(\frac{\varrho}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{m!\Gamma(m+\nu+2)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2m+1}$$

ou ainda,

$$\frac{dJ_\nu(\varrho)}{d\varrho} = \frac{J_{\nu-1}(\varrho) + J_{\nu+1}(\varrho)}{2} - \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{\nu+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{m!\Gamma(m+\nu+2)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2m}$$

A somatória é a função de Bessel $J_{\nu+1}$, e assim, obtemos

$$\frac{dJ_\nu(\varrho)}{d\varrho} = \frac{J_{\nu-1}(\varrho) + J_{\nu+1}(\varrho)}{2} - J_{\nu+1}$$

ou

$$\frac{dJ_\nu(\varrho)}{d\varrho} = \frac{J_{\nu-1}(\varrho) - J_{\nu+1}(\varrho)}{2}$$

e por fim,

$$J_{\nu-1}(\varrho) - J_{\nu+1}(\varrho) = 2\frac{dJ_\nu(\varrho)}{d\varrho}$$

que é a equação D.29. □

Estas duas propriedades, em conjunto com a ortogonalidade das funções de Bessel, são necessárias para provar a equação D.27. Vejamos agora a demonstração da ortogonalidade dessas funções.

Demonstração. Vamos considerar a equação de Bessel D.1,

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\varrho^2}\right)R = 0$$

e reescrevê-la como

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho\frac{dR}{d\varrho}\right)+\left(1-\frac{\nu^2}{\varrho^2}\right)R=0$$

Agora, considerando que $\varrho = k\rho$, temos

$$\frac{1}{k\rho}\frac{d}{d(k\rho)}\left(k\rho\frac{dR}{d(k\rho)}\right)+\left(1-\frac{\nu^2}{k^2\rho^2}\right)R=0$$

ou

$$\frac{1}{k^2\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\left(1-\frac{\nu^2}{k^2\rho^2}\right)R=0$$

Multiplicando esta expressão por k^2, obtemos

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\left(k^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R=0 \tag{D.30}$$

A função $J_\nu(\frac{x_{\nu,p}}{a}\rho)$, que é uma função de Bessel, deve satisfazer a equação diferencial acima. Comparando esta função com a solução $J_\nu(k\rho)$, percebemos que devemos ter

$$k_{\nu,p}=\frac{x_{\nu,p}}{a} \tag{D.31}$$

Portanto, para esta função, a equação de Bessel fica

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a})}{d\rho}\right)+\left(\frac{x_{\nu,p}^2}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)J_\nu\left(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a}\right)=0$$

Multiplicamos esta equação por $\rho J_\nu(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a})$, ou seja, por uma função de Bessel de mesma ordem ν, mas com um argumento diferente, e a integramos no intervalo $[0,a]$. Assim, obtemos

$$\int_0^a J_\nu\left(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a})}{d\rho}\right)d\rho \\ +\int_0^a\left(\frac{x_{\nu,p}^2}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)\rho J_\nu\left(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a}\right)d\rho=0$$

A primeira integral pode ser efetuada por partes, definindo

$$u = J_\nu\Big(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a}\Big) \Rightarrow du = \frac{dJ_\nu(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a})}{d\rho}\,d\rho$$
$$dv = \frac{d}{d\rho}\bigg(\rho\frac{dJ_\nu(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a})}{d\rho}\bigg)\,d\rho \Rightarrow v = \rho\frac{dJ_\nu(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a})}{d\rho}$$

e ela fica

$$\int_0^a J_\nu\Big(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a}\Big)\frac{d}{d\rho}\bigg(\rho\frac{dJ_\nu(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a})}{d\rho}\bigg)\,d\rho =$$
$$\bigg[\rho\frac{dJ_\nu(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a})}{d\rho}J_\nu\Big(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a}\Big)\bigg]_0^a - \int_0^a \rho\frac{dJ_\nu(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a})}{d\rho}\frac{dJ_\nu(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a})}{d\rho}\,d\rho$$

O termo entre colchetes é nulo. Em $\rho = 0$ ele se anula porque a função de Bessel está multiplicada por ρ, e em $\rho = a$ ele se anula porque aparece o termo $J_\nu(x_{\nu,p'})$. Como $x_{\nu,p'}$ é uma raiz da função de Bessel J_ν, $J_\nu(x_{\nu,p'}) = 0$. Resta, portanto,

$$\int_0^a J_\nu\Big(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a}\Big)\frac{d}{d\rho}\bigg(\rho\frac{dJ_\nu(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a})}{d\rho}\bigg)\,d\rho = -\int_0^a \rho\frac{dJ_\nu(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a})}{d\rho}\frac{dJ_\nu(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a})}{d\rho}\,d\rho$$

Voltando agora à equação que envolve as duas integrais, temos

$$-\int_0^a \rho\frac{dJ_\nu(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a})}{d\rho}\frac{dJ_\nu(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a})}{d\rho}\,d\rho$$
$$+\int_0^a \left(\frac{x_{\nu,p}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)\rho J_\nu\Big(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a}\Big)J_\nu\Big(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a}\Big)\,d\rho = 0$$

Ao escrevermos esta mesma expressão trocando p por p', encontramos

$$-\int_0^a \rho\frac{dJ_\nu(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a})}{d\rho}\frac{dJ_\nu(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a})}{d\rho}\,d\rho$$
$$+\int_0^a \left(\frac{x_{\nu,p'}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)\rho J_\nu\Big(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a}\Big)J_\nu\Big(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a}\Big)\,d\rho = 0$$

e subtraindo esta última da anterior, obtemos

$$- \int_0^a \rho \frac{dJ_\nu(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a})}{d\rho} \frac{dJ_\nu(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a})}{d\rho} \, d\rho$$
$$+ \int_0^a \left(\frac{x_{\nu,p}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) \rho J_\nu \left(x_{\nu,p'} \frac{\rho}{a} \right) J_\nu \left(x_{\nu,p} \frac{\rho}{a} \right) d\rho$$
$$+ \int_0^a \rho \frac{dJ_\nu(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a})}{d\rho} \frac{dJ_\nu(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a})}{d\rho} \, d\rho$$
$$- \int_0^a \left(\frac{x_{\nu,p'}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) \rho J_\nu \left(x_{\nu,p} \frac{\rho}{a} \right) J_\nu \left(x_{\nu,p'} \frac{\rho}{a} \right) d\rho = 0$$

ou

$$\int_0^a \left(\frac{x_{\nu,p}^2}{a^2} - \frac{x_{\nu,p'}^2}{a^2} \right) \rho J_\nu \left(x_{\nu,p'} \frac{\rho}{a} \right) J_\nu \left(x_{\nu,p} \frac{\rho}{a} \right) d\rho = 0$$

ou ainda,

$$(x_{\nu,p}^2 - x_{\nu,p'}^2) \int_0^a \rho J_\nu \left(x_{\nu,p'} \frac{\rho}{a} \right) J_\nu \left(x_{\nu,p} \frac{\rho}{a} \right) d\rho = 0 \qquad \text{(D.32)}$$

Quando $p \neq p'$, o termo entre parênteses não é nulo, e portanto, a integral deve ser nula. Quando $p = p'$, este termo é nulo e a integral possui um valor diferente de zero. Para calcular este valor, consideramos a equação diferencial D.30,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

Agora, vamos reescrevê-la como

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{\nu^2}{\rho} R = -k^2 \rho R$$

e aplicá-la para a função $J_\nu(k_{\nu,p}\rho)$, onde $k_{\nu,p}$ é definido pela equação D.31, e para a função $J_\nu(k\rho)$, onde k é um valor genérico qualquer. Temos, então,

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho} \right) - \frac{\nu^2}{\rho} J_\nu(k_{\nu,p}\rho) = -k_{\nu,p}^2 \rho J_\nu(k_{\nu,p}\rho)$$

e

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho}J_\nu(k\rho) = -k^2\rho J_\nu(k\rho)$$

Agora, multiplicamos estas equações por $J_\nu(k\rho)$ e $J_\nu(k_{\nu,p}\rho)$, respectivamente, para obter

$$J_\nu(k\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho}J_\nu(k\rho)J_\nu(k_{\nu,p}\rho) = -k_{\nu,p}^2\rho J_\nu(k\rho)J_\nu(k_{\nu,p}\rho)$$

e

$$J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}\right) - \frac{\nu^2}{\rho}J_\nu(k_{\nu,p}\rho)J_\nu(k\rho) = -k^2\rho J_\nu(k_{\nu,p}\rho)J_\nu(k\rho)$$

O próximo passo é subtrair uma expressão da outra e integrar o resultado no intervalo $[0, a]$, ou seja,

$$\int_0^a \left[J_\nu(k\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}\right) - J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}\right)\right] d\rho =$$
$$\int_0^a \left[-k_{\nu,p}^2\rho J_\nu(k\rho)J_\nu(k_{\nu,p}\rho) + k^2\rho J_\nu(k_{\nu,p}\rho)J_\nu(k\rho)\right] d\rho$$

ou

$$\int_0^a J_\nu(k\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}\right) d\rho - \int_0^a J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}\right) d\rho =$$
$$\left(k^2 - k_{\nu,p}^2\right)\int_0^a \rho J_\nu(k\rho)J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\, d\rho$$

As integrais podem ser resolvidas através de uma integração por partes. Para a primeira, definimos

$$u = J_\nu(k\rho) \Rightarrow du = \frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}\, d\rho$$
$$dv = \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}\right) d\rho \Rightarrow v = \rho\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}$$

e ela torna-se

$$\int_0^a J_\nu(k\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}\right)d\rho =$$
$$\left[\rho\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}J_\nu(k\rho)\right]_0^a - \int_0^a \rho\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}d\rho$$

ou

$$\int_0^a J_\nu(k\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}\right)d\rho =$$
$$a\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}a)}{d\rho}J_\nu(ka) - \int_0^a \rho\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}d\rho$$

ou ainda, utilizando uma regra da cadeia para transformar a derivada da função de Bessel em

$$\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}a)}{d\rho} = \frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}a)}{d(k_{\nu,p}\rho)}\frac{d(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}$$
$$\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}a)}{d\rho} = k_{\nu,p}J'_\nu(k_{\nu,p}a)$$

onde a linha em $J'_\nu(x)$ representa a derivada de $J_\nu(x)$ em relação ao argumento x, obtemos

$$\int_0^a J_\nu(k\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}\right)d\rho =$$
$$ak_{\nu,p}J'_\nu(k_{\nu,p}a)J_\nu(ka) - \int_0^a \rho\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}d\rho$$

Para a segunda integral, temos

$$u = J_\nu(k_{\nu,p}\rho) \Rightarrow du = \frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}d\rho$$
$$dv = \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}\right)d\rho \Rightarrow v = \rho\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}$$

e assim,

$$\int_0^a J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}\right)d\rho =$$
$$\left[\rho\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\right]_0^a - \int_0^a \rho\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}\,d\rho$$

ou

$$\int_0^a J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}\right)d\rho =$$
$$a\frac{dJ_\nu(ka)}{d\rho}J_\nu(k_{\nu,p}a) - \int_0^a \rho\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}\,d\rho$$

ou, como

$$J_\nu(k_{\nu,p}a) = J_\nu\left(\frac{x_{\nu,p}}{a}a\right) = J_\nu(x_{\nu,p}) = 0$$

a segunda integral fica

$$\int_0^a J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}\right)d\rho = -\int_0^a \rho\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}\,d\rho$$

Combinando as duas integrais, temos

$$ak_{\nu,p}J'_\nu(k_{\nu,p}a)J_\nu(ka) - \int_0^a \rho\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}\,d\rho$$
$$-\left[-\int_0^a \rho\frac{dJ_\nu(k\rho)}{d\rho}\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}\rho)}{d\rho}\,d\rho\right] = \left(k^2 - k_{\nu,p}^2\right)\int_0^a \rho J_\nu(k\rho)J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\,d\rho$$

ou

$$ak_{\nu,p}J'_\nu(k_{\nu,p}a)J_\nu(ka) = \left(k^2 - k_{\nu,p}^2\right)\int_0^a \rho J_\nu(k\rho)J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\,d\rho$$

Agora, derivamos esta expressão em relação a k, isto é,

$$ak_{\nu,p}J'_\nu(k_{\nu,p}a)\frac{dJ_\nu(ka)}{dk} =$$
$$2k\int_0^a \rho J_\nu(k\rho)J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\,d\rho + \left(k^2 - k_{\nu,p}^2\right)\int_0^a \rho\frac{dJ_\nu(k\rho)}{dk}J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\,d\rho$$

ou

$$a k_{\nu,p} J'_\nu(k_{\nu,p}a) \frac{dJ_\nu(ka)}{d(ka)} \frac{d(ka)}{dk} =$$
$$2k \int_0^a \rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\, d\rho + \left(k^2 - k_{\nu,p}^2\right) \int_0^a \rho \frac{dJ_\nu(k\rho)}{d(k\rho)} \frac{d(k\rho)}{dk} J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\, d\rho$$

ou ainda,

$$a^2 k_{\nu,p} J'_\nu(k_{\nu,p}a) J'_\nu(ka) =$$
$$2k \int_0^a \rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\, d\rho + \left(k^2 - k_{\nu,p}^2\right) \int_0^a \rho^2 J'_\nu(k\rho) J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\, d\rho$$

Por fim, tomamos o limite $k \to k_{\nu,p}$ na expressão acima. O último termo se anula, e assim, obtemos

$$a^2 k_{\nu,p} J'_\nu(k_{\nu,p}a) J'_\nu(k_{\nu,p}a) = 2k_{\nu,p} \int_0^a \rho J_\nu(k_{\nu,p}\rho) J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\, d\rho$$

ou

$$\int_0^a \rho J_\nu(k_{\nu,p}\rho) J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\, d\rho = \frac{a^2}{2} \left[J'_\nu(k_{\nu,p}a)\right]^2$$

que é o valor da integral D.32 inicial quando $p = p'$. Ele pode ser reescrito mediante o uso das propriedades D.28 e D.29 vistas. Vamos subtraí-las, para obter

$$J_{\nu-1}(\varrho) + J_{\nu+1}(\varrho) - \left[J_{\nu-1}(\varrho) - J_{\nu+1}(\varrho)\right] = \frac{2\nu}{\varrho} J_\nu(\varrho) - 2\frac{dJ_\nu(\varrho)}{d\varrho}$$

ou

$$2J_{\nu+1}(\varrho) = \frac{2\nu}{\varrho} J_\nu(\varrho) - 2\frac{dJ_\nu(\varrho)}{d\varrho}$$

ou ainda,

$$\frac{dJ_\nu(\varrho)}{d\varrho} = \frac{\nu}{\varrho} J_\nu(\varrho) - J_{\nu+1}(\varrho)$$

Como $\varrho = k\rho$ e $k = k_{\nu,p} = \frac{x_{\nu,p}}{a}$, para o valor $\varrho = ka$, obtemos

$$\frac{dJ_\nu(k_{\nu,p}a)}{d(k_{\nu,p}a)} = \frac{\nu}{k_{\nu,p}a}J_\nu(k_{\nu,p}a) - J_{\nu+1}(k_{\nu,p}a)$$

ou

$$J'_\nu(k_{\nu,p}a) = \frac{\nu}{k_{\nu,p}a}J_\nu\left(\frac{x_{\nu,p}}{a}a\right) - J_{\nu+1}\left(\frac{x_{\nu,p}}{a}a\right)$$

ou ainda, lembrando que $x_{\nu,p}$ é raiz de J_ν,

$$J'_\nu(k_{\nu,p}a) = -J_{\nu+1}(x_{\nu,p})$$

Voltando à integral inicial, achamos

$$\int_0^a \rho J_\nu(k_{\nu,p}\rho)J_\nu(k_{\nu,p}\rho)\,d\rho = \frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}(x_{\nu,p})\right]^2$$

E finalmente, a condição de ortogonalidade das funções de Bessel torna-se, lembrando que, se $p \neq p'$, a integral é nula,

$$\int_0^a \rho J_\nu(k_{\nu,p}\rho)J_\nu(k_{\nu,p'}\rho)\,d\rho = \frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}(x_{\nu,p})\right]^2\delta_{p,p'} \tag{D.33}$$

□

Agora estamos em condições de demonstrar a equação D.27,

$$A_{\nu,p} = \frac{2}{a^2 J^2_{\nu+1}(x_{\nu,p})}\int_0^a f(\rho)J_\nu\left(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a}\right)\,\rho\,d\rho$$

Demonstração. Para provar a relação D.27, de início, multiplicando a séri de Bessel D.26 por $\rho J_\nu\left(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a}\right)$ e integramos o resultado no intervalo $[0, a]$ ou seja,

$$\int_0^a \rho f(\rho)J_\nu\left(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a}\right)\,d\rho = \int_0^a \sum_{p=1}^{\infty} A_{\nu,p}J_\nu\left(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a}\right)\rho J_\nu\left(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a}\right)\,d\rho$$

Podemos trocar o sinal de integração com o de somatória, e assim, como $A_{\nu,}$ é uma constante,

$$\int_0^a f(\rho) J_\nu\left(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a}\right)\rho\, d\rho = \sum_{p=1}^{\infty} A_{\nu,p}\int_0^a \rho J_\nu\left(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a}\right) J_\nu\left(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a}\right) d\rho$$

A integral é dada pela condição de ortogonalidade D.33, isto é,

$$\int_0^a \rho J_\nu\left(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a}\right) J_\nu(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a})\, d\rho = \frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}(x_{\nu,p})\right]^2 \delta_{p,p'}$$

e assim,

$$\int_0^a f(\rho) J_\nu\left(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a}\right)\rho\, d\rho = \sum_{p=1}^{\infty} A_{\nu,p}\frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}(x_{\nu,p})\right]^2 \delta_{p,p'}$$

Na somatória, sobrevive apenas o termo com $p = p'$, e portanto,

$$\int_0^a f(\rho) J_\nu\left(x_{\nu,p'}\frac{\rho}{a}\right)\rho\, d\rho = A_{\nu,p'}\frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}(x_{\nu,p'})\right]^2$$

ou, eliminando as linhas, já que elas são desnecessárias,

$$A_{\nu,p} = \frac{2}{a^2 J^2_{\nu+1}(x_{\nu,p})}\int_0^a f(\rho) J_\nu\left(x_{\nu,p}\frac{\rho}{a}\right)\rho\, d\rho$$

que é a equação D.27, agora demonstrada.

□

Existem outras relações importantes envolvendo as funções de Bessel. Uma delas é dada pela equação

$$\frac{dJ_0(\varrho)}{d\varrho} = -J_1(\varrho)$$

como pode ser visto mediante a utilização da expressão D.10 para $m = 0$, e neste caso,

$$J_0(\varrho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

A sua derivada é

$$\frac{dJ_0(\varrho)}{d\varrho} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1)}2n\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$= \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!\Gamma(n+1)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$
$$\frac{dJ_0(\varrho)}{d\varrho} = \frac{2}{\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!\Gamma(n+1)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

Agora, fazemos $n = m + 1$, e então,

$$\frac{2}{\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!\Gamma(n+1)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n} = \frac{2}{\varrho}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m!\Gamma(m+1+1)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2(m+1)}$$

$$\frac{2}{\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \frac{2}{\varrho}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{-(-1)^{m}}{m!\Gamma(m+1+1)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2m}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2}$$

ou

$$\frac{2}{\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!\Gamma(n+1)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n} = -\frac{\varrho}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!\Gamma(n+1+1)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

ou ainda,

$$\frac{dJ_0(\varrho)}{d\varrho} = -\frac{\varrho}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!\Gamma(n+1+1)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

onde, no penúltimo passo, retornamos ao índice n. Como

$$J_1(\varrho) = \left(\frac{\varrho}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!\Gamma(n+1+1)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n}$$

vemos que, de fato,

$$\frac{dJ_0(\varrho)}{d\varrho} = -J_1(\varrho)$$

Outras propriedades são estudadas nos exercícios (veja os exercícios D.1, D.2 e D.4), incluindo a fórmula de Rodrigues para as funções de Bessel (exercício D.3).

D.3 Funções de Bessel Modificadas

Ao resolvermos a equação de Laplace em cilíndricas, na seção 6.6, obtivemos as equações 6.101 e 6.102, que são, respectivamente,

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-k^2$$

e

$$\frac{d^2Z}{dz^2}-k^2Z=0$$

Observe que, para encontrar essas equações, consideramos a constante de separação como sendo $-k^2$. No entanto, poderíamos também tê-la considerado como κ^2. Neste caso, a equação para Z ficaria

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+\kappa^2Z=0$$

que possui a equação característica

$$m^2+\kappa^2=0\Rightarrow m=\pm i\kappa$$

a qual gera as soluções

$$m=i\kappa\Rightarrow Z=Ae^{i\kappa z}$$
$$m=-i\kappa\Rightarrow Z=Be^{-i\kappa z}$$

que produzem a solução geral

$$Z_\kappa(z)=A_\kappa e^{i\kappa z}+B_\kappa e^{-i\kappa z}$$

ou, mediante o uso da relação de Euler 6.6 para transformar as exponenciais complexas em senos e cossenos,

$$Z_\kappa(z)=A_\kappa\cos\kappa z+B_\kappa\,\mathrm{sen}\,\kappa z \tag{D.34}$$

Note que esta solução é oscilante. Ela é diferente da expressão 6.118 obtida na seção 6.6.2, que é

$$Z_k(z) = A_k e^{kz} + B_k e^{-kz}$$

Entretanto, uma pode ser obtida da outra, pois podemos relacionar as constantes $-k^2$ e κ^2 considerando que k é um número imaginário puro, e não real, como até agora vínhamos pensando. Assim, se $k = i\kappa$, temos

$$-k^2 = -i^2\kappa^2$$
$$-k^2 = -(-1)\kappa^2$$
$$-k^2 = \kappa^2$$

Com esta substituição, a expressão 6.118 pode ser reescrita como

$$Z_\kappa(z) = A_\kappa e^{i\kappa z} + B_\kappa e^{-i\kappa z}$$

e, mediante a relação de Euler, obtemos a expressão D.34. É possível mostrar também que, partindo desta última equação e considerando que $\kappa = \frac{k}{i} = -ik$, encontramos a expressão 6.118. Esta verificação fica como exercício (veja o exercício D.5). Isso resolve o problema da equação para Z. Vejamos agora o que acontece com a outra expressão.

A equação 6.101 também deve ser modificada, pois estamos utilizando a constante de separação κ^2. Ela fica, então,

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \kappa^2$$

Esta equação tem como resultado duas outras equações, que utilizam uma nova constante de separação, ν, que são as expressões 6.119,

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \nu^2\Theta = 0$$

para Θ, e 6.121,

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\varrho^2}\right)R = 0$$

para R. Note que esta última é a equação de Bessel e que $\varrho = k\rho$. Na equação para Θ não aparece k, e assim, ela continua tendo as soluções 6.120 e 6.107, que são, respectivamente,

$$\Theta_\nu(\theta) = C_\nu \cos \nu\theta + D_\nu \operatorname{sen} \nu\theta$$

para $\nu \neq 0$, e

$$\Theta_0(\theta) = C_0 + D_0\theta$$

se $\nu = 0$. Estas expressões não mudam. Entretanto, a equação de Bessel precisa ser modificada, pois nela aparece o fator k, que deve ser substituído por $i\kappa$. Assim, como $\varrho = k\rho$, temos $\varrho = i\kappa\rho = i\varrho'$, $\varrho^2 = -(\varrho')^2$, e também

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varrho'} &= \frac{d\varrho}{d\varrho'}\frac{d}{d\varrho}\\ \frac{d}{d\varrho'} &= i\frac{d}{d\varrho}\\ \frac{1}{i}\frac{d}{d\varrho'} &= \frac{d}{d\varrho}\\ \frac{d}{d\varrho} &= -i\frac{d}{d\varrho'}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\varrho^2} &= \left(\frac{d}{d\varrho}\right)\left(\frac{d}{d\varrho}\right)\\ &= \left(-i\frac{d}{d\varrho'}\right)\left(-i\frac{d}{d\varrho'}\right)\\ \frac{d^2}{d\varrho^2} &= -\frac{d^2}{d(\varrho')^2}\end{aligned}$$

Assim, a equação de Bessel fica

$$-\frac{d^2R}{d(\varrho')^2} - \frac{i}{i\varrho'}\frac{dR}{d\varrho'} + \left(1 + \frac{\nu^2}{(\varrho')^2}\right)R = 0$$

ou

$$\frac{d^2R}{d(\varrho')^2} + \frac{1}{\varrho'}\frac{dR}{d\varrho'} - \left(1 + \frac{\nu^2}{(\varrho')^2}\right)R = 0 \tag{D.35}$$

Esta equação é chamada de *equação de Bessel modificada*, e suas soluções são as *funções de Bessel modificadas*. No entanto, como $k = i\kappa$ e $\varrho = i\varrho'$, é fácil

perceber que estas funções são as funções de Bessel normais, apenas com um argumento que é imaginário puro, ou seja, as soluções são as funções de Bessel $J_\nu(i\varrho)$, as funções de Neumann $N_\nu(i\varrho)$, e as funções de Hankel $H_\nu^1(i\varrho)$ e $H_\nu^2(i\varrho)$, sendo que não colocamos a linha em ϱ' para evitar complicações desnecessárias. Em geral, as soluções linearmente independentes da equação de Bessel modificada são escritas em termos das funções $\mathfrak{I}_\nu(\varrho)$ e $\mathcal{K}_\nu(\varrho)$, definidas da seguinte forma:

$$\mathfrak{I}_\nu(\varrho) = i^\nu J_\nu(i\varrho) \tag{D.36}$$

e

$$\mathcal{K}_\nu(\varrho) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^1(i\varrho) \tag{D.37}$$

Elas são reais se ϱ e ν forem reais. A solução geral fica

$$R_\nu(\rho) = E_\nu \mathfrak{I}_\nu(\kappa\rho) + F_\nu \mathcal{K}_\nu(\kappa\rho) \tag{D.38}$$

lembrando que, como $\mathcal{K}_\nu$ é derivada da função de Hankel, que por sua vez envolve a função de Neumann, ela diverge em $\rho = 0$, e isso precisa ser levado em conta quando utilizamos a expressão D.38 num determinado problema. Essas funções são utilizadas, normalmente, quando alguma condição de contorno do problema envolve a variável z, como é o caso do exemplo 6.18. Nestes casos, pode ser preciso expandir as condições de contorno nas funções de z, que agora são senos e cossenos, e então obtemos alguma série de Fourier.

D.4 Exercícios

D.1 Demonstre a equação

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{J_1(\varrho)}{\varrho}\right) = -\frac{1}{\varrho} J_2(\varrho)$$

D.2 Prove que, para as funções de Bessel, vale a relação

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{J_\nu(\varrho)}{\varrho^\nu}\right) = -\frac{1}{\varrho^\nu} J_{\nu+1}(\varrho) \tag{D.39}$$

D.3 A fórmula de Rodrigues para as funções de Bessel é dada por

$$J_\nu(\varrho) = \varrho^\nu \left(-\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho} \right)^\nu J_0(\varrho) \tag{D.40}$$

Mostre esta relação, utilizando, se necessário, o resultado do item anterior.

D.4 Demonstre que

$$\frac{d}{d\varrho}[\varrho J_1(\varrho)] = \varrho J_0(\varrho)$$

e que, em geral,

$$\frac{d}{d\varrho}[\varrho^\nu J_\nu(\varrho)] = \varrho^\nu J_{\nu-1}(\varrho)$$

D.5 Mostre que, partindo da expressão D.34, é possível obter a equação 6.118 mediante a substituição $\kappa = -ik$.

Referências Bibliográficas

Listamos a seguir algumas obras que foram consultadas durante a realização deste trabalho. Para facilitar a consulta sobre assuntos específicos, elas estão catalogadas de acordo com a área ou áreas de abrangência. Por este motivo, algumas delas aparecem mais de uma vez. Devem ser consideradas também as próprias referências contidas nesses livros.

1. FÍSICA BÁSICA - ELETROMAGNETISMO

ALONSO, M.; FINN, E. *Física.* São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1972. v. 2.

EISBERG, R.; LERNER, L. *Física: Fundamentos e Aplicações.* Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1982. v. 3 e 4.

GOLDEMBERG, José. *Física Geral e Experimental.* São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1970. v. 2.

GONÇALVES, Dalton. *Física, do Científico ao Vestibular.* 4. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S/A, 1970. v. 2.

KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J. *Física.* São Paulo: Makron Books, 1999. v. 2.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica.* São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1997. v. 3.

SALMERON, R. A. *Introdução à Eletricidade e ao Magnetismo.* 5. ed. São Paulo, 1971.

SEARS, F.; ZEMANSKY, M.; YOUNG, H. *Física.* 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1984. v. 3

SERWAY, R. A. *Física.* 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1996. v. 3.

TIPLER, Paul. *Física.* 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1986. v. 2b.

2. FÍSICA BÁSICA - GERAL

ALONSO, M.; FINN, E. *Física.* São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1972. v. 1.

EISBERG, R.; LERNER, L. *Física: Fundamentos e Aplicações.* Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1982. v. 1 e 2.

GOLDEMBERG, José. *Física Geral e Experimental.* São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1970. v. 1.

GONÇALVES, Dalton. *Física, do Científico ao Vestibular.* 4. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S/A, 1970. v. 1.

KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J. *Física.* São Paulo: Makron Books, 1999. v. 1.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica.* São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1981. v. 1 e 2.

________. *Curso de Física Básica.* São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda 1997. v. 4.

SEARS, F.; ZEMANSKY, M.; YOUNG, H. *Física.* 3. ed. Rio de Janeiro Livros Técnicos e Científicos, 1984. v. 1, 2 e 4.

SERWAY, R. A. *Física.* 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos 1996. v. 1 e 2.

TIPLER, Paul. *Física.* 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1986. v. 1a 1b e 2a.

3. FÍSICA BÁSICA - ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

ARRIBAS, S. D. *Experiências de Física ao Alcance de Todas as Escolas* 1. ed. Rio de Janeiro: Fundação de Assistência ao Estudante, 1988.

FERNANDES, J. *Atividades Práticas de Física Geral.* Florianópolis: Editora da UFSC, 1985.

FUNBEC. *Laboratório Portátil de Física - 2º grau.* São Paulo: EDART.

GOLDEMBERG, José. *Física Geral e Experimental.* São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1970. v. 1.

4. ELETROMAGNETISMO

FRENKEL, Josif. *Princípios de Eletrodinâmica Clássica.* São Paulo: Edusp, 1996.

HEALD, M. A.; MARION, J. B. *Classical Eletromagnetic Radiation.* 3. ed. [s. l.]: Saunders College Publishing, 1995.

JACKSON, John David. *Eletrodinâmica Clássica.* 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1983.

________. *Classical Electrodynamics.* 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1999.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Electrodynamics of Continuous Media.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1960.

PANOFSKY, W. K.; PHILLIPS, M. *Classical Electricity and Magnetism.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1962.

REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética.* 3. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1982.

SALMERON, R. A. *Introdução à Eletricidade e ao Magnetismo.* 5. ed. São Paulo, 1971.

5. ESTADO SÓLIDO E ESTRUTURA DA MATÉRIA

ASHCROFT, N. W.; MERMIN, N. D. *Solid State Physics.* International Edition. [s. l.]: Saunders College Publishing, 1976.

EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física Quântica, Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas.* 6. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1988.

KITTEL, C. *Introduction to Solid State Physics.* 4. ed. New York: John Wiley & Sons, 1971.

6. MECÂNICA CLÁSSICA

FOWLES, G. R.; CLASSIDAY, G. L. *Analytical Mechanics.* 6. ed. [s. l.]: Saunders College Publishing, 1999.

GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics.* 2. ed. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1980.

MARION, J. B.; THORNTON, S. T. *Classical Dynamics of Particles and Systems.* 4. ed. [s. l.]: Saunders College Publishing, 1995.

SYMON, Keith. *Mecânica.* 3. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1982.

7. MECÂNICA QUÂNTICA

EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física Quântica, Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas.* 6. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1988.

MERZBACHER, E. *Quantum Mechanics.* 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1964.

MESSIAH, A. *Quantum Mechanics.* New York: Interscience, 1961.

ROBINETT, R. W. *Quantum Mechanics: Classical Results, Modern Systems, and Visualized Examples.* New York: Oxford University Press, 1997.

SAKURAY, J. J. *Modern Quantum Mechanics.* Reading, MA: Addison Wesley Publishing Company, 1994.

________. *Advanced Quantum Mechanics.* Reading, MA: Addison Wesley Publishing Company, 1967.

8. TERMODINÂMICA E MECÂNICA ESTATÍSTICA

CALLEN, H. B. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics* 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1985.

HUANG, K. *Statistical Mechanics.* 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1987.

KUBO, R. *Thermodynamics.* New York: John Wiley & Sons, 1960.

9. FÍSICA-MATEMÁTICA

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions.* New York: Macmilan, 1964.

ARFKEN, G. *Mathematical Methods for Physicists.* 2. ed. New York: Academic, 1970.

BUTKOV, Eugene. *Física Matemática.* Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1978.

MACHADO, K. D. *Equações Diferenciais Aplicadas à Física.* Ponta Grossa: Editora UEPG, 1999.

10. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

BUTKOV, Eugene. *Física Matemática.* Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1978.

MACHADO, K. D. *Equações Diferenciais Aplicadas à Física.* Ponta Grossa: Editora UEPG, 1999.

ROSS, Shepley. *Differential Equations.* 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1984.

11. ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. *Álgebra Linear.* 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear.* 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

________. *Geometria Analítica.* 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

12. CÁLCULO VETORIAL

SPIEGEL, M. R. *Análise Vetorial.* São Paulo: McGraw-Hill, 1974.

13. QUÍMICA GERAL

SARDELLA, A.; MATEUS, E. *Curso de Química.* 4. ed. São Paulo: Editora Ática, 1987. v. 1, 2 e 3.

Índice Remissivo